# UNE VERSION BILATERE DE L'ETOILE DES SERIES FORMELLES

*M. Anselmo*

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni
Università di Palermo
Via Archirafi, 34, I-90123 PALERMO (ITALY)

**Abstract.** We introduce a new operation over formal power-series, denoted $\uparrow$. It is founded over the zig-zag factorization of words, i. e. factorization obtained allowing some backward coming in concatenation. This operation is not rational; moreover, the image of rational power-series is not always algebraic. We give here a double characterization of rational power-series $s^{\uparrow}$, for $s \in Rat(R^{+}\langle\langle A \rangle\rangle)$. It uses the representation of $s^{\uparrow}$ by two-way finite automata with multiplicity, here introduced. We also show that for $s \in Rat(R^{+}\langle\langle A \rangle\rangle)$ it is decidable whether the power-series $s^{\uparrow}$ is rational or not.

**Résumé.** On introduit une nouvelle opération sur les séries formelles, notée $\uparrow$. Elle est basée sur les factorisations zig-zag des mots, c'est-à-dire les factorisations obtenues en permettant des retours en arrière dans l'opération de concaténation. Cette opération n'est pas rationnelle; de plus, l'image de séries rationnelles n'est toujours pas algébrique. On donne ici une double caractérisation des séries $s^{\uparrow}$ rationnelles, lorsque $s \in Rat(R^{+}\langle\langle A \rangle\rangle)$. Celle-ci utilise la représentation de $s^{\uparrow}$ par automates bilatères finis avec multiplicité, ici introduite. On montre aussi que pour toute série $s \in Rat(R^{+}\langle\langle A \rangle\rangle)$ il est décidable si la série $s^{\uparrow}$ est rationnelle ou non.

## Introduction

opération $\uparrow$ sur les langages formels, i.e. les notions de langage, factorisation ode zig-zag ont été introduites dans [1]. L'opération constitue une version ère de l'étoile sur les langages, c'est-à-dire la concaténation des mots, dans le sens où elle permet non seulement de concaténer un mot après l'autre, i.e. de lire de gauche à droite, mais aussi de revenir en arrière en lisant de droite à gauche (fig. 1).

Element of $X^*$      Element of $X^{\uparrow}$

fig. 1

Les langages engendrés par $\uparrow$ sont aisément représentés au moyen des automates bilatères finis (2FA), comme montré dans [1,2], où l'on étudie leur propriétés de rationalité et de décidabilité. La série zig-zag sur un langage $X$, notée $(\underline{X})^{\uparrow}$, est étudiée dans [3]: elle est la série qui compte le nombre de factorisations zig-zag d'un mot sur $X$.

L'opération sur les séries formelles ici introduite généralise la notion de série zig-zag, qui en constitue son application aux séries caractéristiques des langages. L'idée de cette définition est juste mentionnée dans [6]. Ici on étudie les propriétés de $\uparrow$ sur les séries rationnelles. Le premier pas est la construction, pour toute série rationnelle $s$, d'une famille d'automates bilatères finis avec multiplicité (K-2FA) qui reconnaissent $s^{\uparrow}$. La notion de K-2FA et de leur comportement est introduite dans [5], où l'on présente des résultats sur la rationalité des séries reconnues par K-2FA. La définition d'automate (unilatère) fini avec multiplicité (K-1FA) est plus classique [17,18,19,9,12,13].

Un premier résultat sur l'opération $\uparrow$ est le fait qu'elle n'est pas une opération rationnelle : l'image par $\uparrow$ d'une série rationnelle n'est parfois même pas algébrique. Un exemple est montré dans le paragraphe 4. On s'intéresse alors à établir les conditions pour la rationalité de $s^{\uparrow}$. Pour le cas du demi-anneau $\mathbb{R}^+$ des réels positifs, on donne (Théorème 1) deux caractérisations des séries $s \in Rat(\mathbb{R}^+ \langle\langle A \rangle\rangle)$ pour lesquelles $s^{\uparrow}$ est encore une série rationnelle. La première caractérisation concerne le support de $s$ et elle est de caractère combinatoire. La deuxième porte sur les K-2FA reconnaissant $s^{\uparrow}$, construits comme dans le paragraphe 3. La preuve du Théorème 1 est obtenue en reportant dans le contexte de l'opération $\uparrow$ un résultat montré dans [3] pour les séries zig-zag et en le généralisant au cas des multiplicités dans le demi-anneau $\mathbb{R}^+$. Un exemple (Ex. 2, par. 5) montre que ce résultat n'est pas valable pour un demi-anneau quelconque.

La première caractérisation du Théorème 1 est testable par un procédé fini, à l'aide de raisonnements sur les langages reconnus par automates finis. Ce fait permet alors de montrer que étant donné une série $s \in Rat(\mathbb{R}^{+}\langle\langle A\rangle\rangle)$, il est décidable si $s^{\uparrow}$ est une série rationnelle ou non.

*Les automates considérés dans ce papier seront tous à ensemble d'états fini.*

## 1. Définitions et préliminaires

Les automates bilatères (2FA) sont des machines à mi-chemin entre les automates unilatères et les machines de Turing. Un automate bilatère peut lire un mot d'entrée et peut déplacer sa tête de lecture dans les deux sens : à gauche ou à droite. Dans le modèle utilisé ici, la tête de lecture pointe à chaque instant sous une position entre deux cases et peut examiner la lettre à droite ou celle à gauche. Un automate bilatère sur un alphabet $A$ peut être représenté comme un automate unilatère sur l'alphabet $A \cup \overline{A}$, où $\overline{A}$ est une copie barrée de $A$ : $\overline{A}=\{\ \overline{a}\ /\ a\in A\}$. Les flèches étiquetées par une lettre barrée $\overline{a}$ représentent un mouvement vers la gauche de la tête de lecture, de la position à droite d'une occurrence de la lettre $a$ dans le mot d'entrée, à la position à sa gauche.

Etant donné un chemin $u$ qui calcule un mot $w=w_1w_2$, la *suite de croisement* de $u$ sous la position $(w_1,w_2)$ de $w$ est la suite ordonnée des états de l'automate lors des passages successifs sous la position donnée.

Des références bibliographiques sur les automates bilatères sont [9,10,14,15,20].

Soit $A$ un alphabet fini et $K$ un demi-anneau.

Une *série formelle* $s$ en plusieurs variables non commutatives dans $A$ et coefficients dans un demi-anneau $K$ est une application $s: A^* \rightarrow K$.

L'image de $w\in A^*$ par $s$ est notée $(s,w)$; le *support* de $s$ est le langage $supp(s) = \{\ w \in A^*\ /\ \ (s,w) \neq 0\ \}$. L'ensemble des séries formelles sur $A$ à valeurs dans $K$ est notée $K\langle\langle A\rangle\rangle$. Un *polynôme* est une série formelle de support fini; l'ensemble des polynômes est noté $K\langle A\rangle$. La *série caractéristique* d'un langage $X$ est la série notée $\underline{X}$, définie par $(\underline{X},w) = 1$ si $w$ appartient à $X$, $(\underline{X},w) = 0$ sinon.

Une série formelle $s\in K\langle\langle A\rangle\rangle$ est *algébrique* si elle est une composante de la solution d'un système algébrique de la forme

$$z_i=p_i \qquad\qquad i=1,\ldots,n$$

où $Z=\{z_1,\dots,z_n\}$ est un ensemble de variables tel que $Z\cap A=\phi$ et $p_i\in K\langle A\cup Z\rangle$ sont des polynômes tels que pour tout $i,j$, $(p_i,\varepsilon)=0$ et $(p_i,z_j)=0$.

Une série formelle est *rationnelle* si elle appartient à la *clôture rationnelle* de $K\langle A\rangle$, c'est-à-dire à la plus petite partie contenant les polynômes et close pour les opérations rationnelles : somme, produit de Cauchy et étoile. On dénote $Rat(K\langle\langle A\rangle\rangle)$ la famille des séries rationnelles de $K\langle\langle A\rangle\rangle$. Des références bibliographiques sur les séries formelles sont [8,9,16].

Une série formelle $s\in K\langle\langle A\rangle\rangle$ est dite *reconnaissable* [8,13,16] s'il existe un entier $n\geq 1$, un morphisme de monoïde

$$f : A^*\rightarrow K^{n\times n}$$

($K^{n\times n}$ multiplicatif) et deux matrices $l\in K^{1\times n}$ et $c\in K^{n\times 1}$ tels que pour tout mot $w$

$$(s,w)=lf(w)c.$$

Le triplet $(l,f,c)$ est appelé une *représentation linéaire* de $s$ de dimension $n$.

Soit $m$ la $n\times n$-matrice à éléments dans $K^A$ définie par $m=\sum_{a\in A} f(a)a$. La série $s$ représentée par $(l,f,c)$ s'écrit avec ces notations

$$s=lm^*c$$

où $m^*=I+m+m^2+\dots$

Les représentations linéaires des séries, équivalent aux représentations des séries par K-1FA (automates unilatères finis avec multiplicité), dans le sens que l'on va spécifier.

Un *automate unilatère fini* sur un alphabet $A$ *avec multiplicité* dans un demi-anneau $K$ ($K$-$1FA$) [17,18,19,9,12,13] est un quadruplet $\mathcal{A} = (Q,f,l,c)$ composé par :

- un ensemble fini $Q$ d'*états*;
- une *fonction de transition* $f\colon Q\times A\times Q \rightarrow K$;
- une *fonction d'entrée* $l\colon Q \rightarrow K$;
- une *fonction de sortie* $c\colon Q \rightarrow K$.

Une *flèche* est un triplet $(p,a,q)\in Q\times A\times Q$ tel que $f((p,a,q))\neq 0$. Un *chemin* dans l'automate est une suite $u=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de flèches consécutives $e_i=(p_i,a_i,p_{i+1})$; son étiquette est le mot $a_1\dots a_n$. La *multiplicité* du chemin $u$ est le nombre

$$mult(u) = l(p_1)f(e_1)f(e_2)...f(e_n)c(p_{n+1}).$$

Le *comportement* de l'automate $\mathcal{A}$, ou *série reconnue* par $\mathcal{A}$, est la série $\mathcal{S}(\mathcal{A}) : A^* \to K$ qui associe à un mot $w$ la somme des multiplicités des chemins d'étiquette $w$.

Un automate unilatère au sens classique peut être considéré comme un automate avec multiplicité dans le demi-anneau des entiers, où : la multiplicité de toute flèche de l'automate est égale à $1$; la valeur de la fonction d'entrée est $1$ sur les états initiaux, $0$ ailleurs et la valeur de la fonction de sortie est $1$ sur les états terminaux, $0$ ailleurs. Le comportement d'un automate unilatère (sans multiplicité) est ainsi la série qui à tout mot associe le nombre de chemins réussis qui le calculent, comme défini par exemple dans [7].

Les représentations linéaires des séries à coefficients dans un demi-anneau $K$, équivalent aux représentations des séries par K-1FA. Une représentation linéaire du comportement d'un automate unilatère $\mathcal{A}=(Q,f,l,c)$ avec $Q=\{1,2,...,n\}$, est donnée par le triplet $(l,f',c)$ où $f': A^* \to K^{n\times n}$ est le morphisme extension de la fonction de transition $f$, lorsqu'elle est considérée comme une application $f: A \to K^{n\times n}$ (le coefficient d'indice $(i,j)$ de la matrice $f(a)$ est égal à $f((i,a,j))$, pour toute lettre $a \in A$). On trouve en effet, pour tout mot $w \in A^*$ : $(\mathcal{S}(\mathcal{A}),w) = lf'(w)c$. La réciproque suit aisément.

Le théorème fondamental sur les séries formelles et le comportement des automates avec multiplicité est une extension du théorème de Kleene [11,9,10, etc.] au cas des automates avec multiplicité [18,8,12,13,16]. Il est dû à M. P. Schützenberger.

**Théorème** (Schützenberger '61) *Une série formelle est rationnelle si et seulement si elle est reconnaissable.*

## 2. Définition de l'opération ↑

L'opération étoile (*) sur les langages et les séries formelles est définie de la façon suivante, pour tout langage $X$ sur un alphabet fini $A$ et série $s: A^* \to K$ telle que $(s,\varepsilon)=0$ :

$$* : X \to X^* = \{\, x_1x_2...x_n \in A^* \;/\; x_i \in X \text{ pour tout } i=1,2,...,n;\ n \in \mathbb{N} \,\};$$

$$* : s \to s^* = \sum_{n \geq 0} s^n .$$

En d'autres mots, pour tout $w \in A^*$:

$$s^* : w \to \sum_{w = x_1 x_2 \ldots x_n} (s,x_1)(s,x_2)\ldots(s,x_n)$$

où la sommation tient compte de toutes les factorisations de $w$ ε concaténation de mots du support de $s$.

On reprend la définition de factorisation zig-zag introduite dans [1].

Soit $X \subset A^*$ et $Z = \{ ((w',xw''),(w'x,w'')) \ / \ w',w'' \in A^*, \ x \in X \}$.

On écrit $(w',w'') \to (v',v'')$ et on l'appelle un *pas sur* $X$ si $((w',w''),(v',v'')) \in Z$ ou $((v',v''),(w',w'')) \in Z$. Pour un mot $w \in A^*$, une *factorisation zig-zag* sur $X$ à $m-1$ pas est une suite de pas sur $X$ :

$$(\varepsilon,w) = (w'_1,w''_1) \to \ldots \to (w'_i,w''_i) \to (w'_{i+1},w''_{i+1}) \to \ldots \to (w'_m,w''_m) = (w,\varepsilon)$$

n'ayant pas de sous-suite $(k \neq 0)$

$$(w'_j,w''_j) \to (w'_{j+1},w''_{j+1}) \to \ldots \to (w'_{j+k},w''_{j+k}) = (w'_j,w''_j).$$

La définition interdit dans une factorisation zig-zag la présence de "boucles" sur une même position; autrement, le nombre de factorisations zig-zag d'un mot serait toujours $\infty$ ou $0$.

L'opération *flèche* ($\uparrow$) sur les langages est définie comme il suit [1] :

$$\uparrow : X \to X^{\uparrow} = \{ w \in A^* \ / \ w \text{ a une factorisation zig-zag sur } X \}.$$

Soit $s$ une série telle que $(s,\varepsilon) = 0$. Soit $w$ un mot de $X^{\uparrow}$ et $f = p_1 p_2 \ldots p_n$ u factorisation zig-zag de $w$, où tout $p_i$ est un pas sur un mot $x_i$ de $X$, i $p_i = (u,x_i v) \to (ux_i,v)$ ou bien $p_i = (ux_i,v) \to (u,x_i v)$. On définit $s(p_i) = (s,x_i)$ et encore

$$s(f) = (s,x_1)(s,x_2)\ldots(s,x_n).$$

L'opération $\uparrow : K\langle\langle A \rangle\rangle \to K\langle\langle A \rangle\rangle$ sur les séries formelles peut être définie de façon suivante.

**Définition 1.** Soit $s \in K\langle\langle A \rangle\rangle$ une série formelle telle que $(s,\varepsilon) = 0$. La sé $s^{\uparrow} : A^* \to K$ est définie par $(w \in A^*)$ :

$$s^{\uparrow}: w \to \sum s(f)$$

pour toutes les factorisations zig-zag $f$ de $w$ sur le support de $s$.

**Remarque 1.** Dans le cas particulier des séries caractéristiques de langages, cette définition donne celle de série zig-zag sur un langage [1,3], c'est-à-dire la série qui compte les factorisations zig-zag des mots sur le langage.
L'opération flèche sur les langages et les séries est une généralisation de l'opération étoile, étant donné que toute concaténation de mots d'un langage $X$ est une factorisation zig-zag sur $X$ particulière.

Dans la suite on va s'intéresser au cas des séries $s$ rationnelles. On verra que l'opération $\uparrow$ ne garde pas les mêmes propriétés que l'opération $*$ par rapport à la rationalité des langages et des séries.

## 3. Représentation par automates bilatères avec multiplicité

Soit $s$ une série rationnelle à coefficients dans un demi-anneau $K$ et $s=lm^*c$ une représentation de dimension $n$ relative à un K-1FA $\mathscr{A}_S$. On montre dans ce paragraphe comment construire à partir de $l$, $m$, $c$, une famille de K-2FA qui reconnaissent $s^{\uparrow}$.
On rappele que [13] la série $s^*$ peut être reconnue par la représentation linéaire de dimension $n+1$ suivante; en bref elle est obtenue en ajoutant à $\mathscr{A}_S$ un premier nouvel état, l'état $1$, où se confondent tous les états initiaux et tous les états terminaux de $\mathscr{A}_S$ :

$$s^*=[1\ 0]\begin{bmatrix} lmc & lm \\ mc & m \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour représenter $s^{\uparrow}$ considérons la représentation suivante de dimension $2n+1$, où pour une matrice $m$ à coefficients dans $K«A»$, $m$ "barrée" est la matrice ayant par coefficients les mêmes séries que $m$, mais considérées sur une copie barrée de l'alphabet : $\overline{A}=\{\ \overline{a}\ /\ a\in A\}$, et "$^T$" dénote la transposée d'une matrice :

$$l^{\uparrow} = [1\ 0] \quad ; \qquad m^{\uparrow} = \begin{bmatrix} lmc+\overline{lmc} & lm & \overline{mc}^{T} \\ mc & m & 0 \\ \overline{lm}^{T} & 0 & \overline{m}^{T} \end{bmatrix} \quad ; \qquad c^{\uparrow} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Un exemple est montré en fig. 2, pour $s \in K«a»$, $s=\underline{aa^*}$.

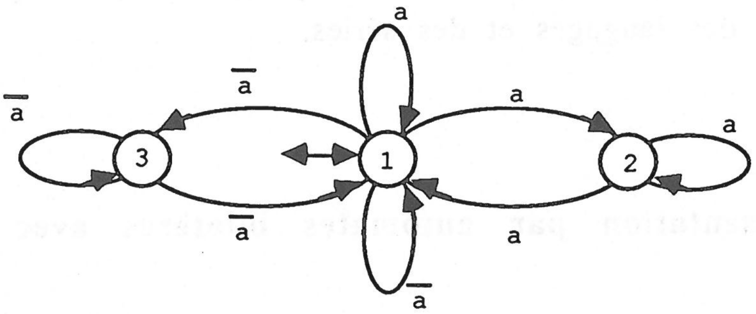


fig. 2

L'automate sous-jacent à cette représentation est un K-1FA $\mathscr{A}^{\uparrow}{}_{s}$ sur l'alphabe $A \cup \overline{A}$ qui reconnaît la série $( s+ \overline{s} )^*$. Remarquons que pour une séri rationnelle $s$ il existe plusieures représentations linéaires différentes; il exist donc toute une famille de K-2FA $\mathscr{A}^{\uparrow}{}_{s}$.

Regardons à $\mathscr{A}^{\uparrow}{}_{s}$ comme un automate bilatère sur l'alphabet $A$ ave multiplicité dans $K$. Considérons la définition de "comportement zig-zag" d'un K-2FA, $\mathscr{S}_{Z}(\mathscr{A}\ )$, comme introduite dans [5] : le comportement zig-zag de $\mathscr{A}^{\uparrow}{}_{s}$ est la série associant à tout mot la somme des multiplicités des chemins "réussis " qu le calculent, où un chemin est dit *réussi* s'il ne passent pas deux fois dans l'éta *1* sous une même position du mot.

**Proposition 1.** *Soit $s \in K«A»$ et $\mathscr{A}^{\uparrow}{}_{s}$ un K-2FA associé. On a :*

$$\mathscr{S}_{Z}(\mathscr{A}^{\uparrow}{}_{s}) = s^{\uparrow}.$$

**Preuve.** Il y a une bijection entre les chemins réussis de $\mathscr{A}^{\uparrow}{}_{s}$ calculant un mot et ses factorisations zig-zag sur $X=supp(s)$.□

## 4. Sur la rationalité des séries $s^{\uparrow}$

L'opération $\uparrow$ ne garde pas les mêmes propriétés que l'opération *. Elle préserve la rationalité des langages, mais non des séries.

**Proposition 2.** ([1]) *L'opération flèche ($\uparrow$) préserve la rationalité des langages.*

**Preuve.** Soit $X$ un langage rationnel et $s=\underline{X}$. Les automates bilatères finis $\mathcal{A}^{\uparrow}{}_{s}$ reconnaissent le langage $X^{\uparrow}$ qui est alors rationnel au moyen du théorème de Rabin et Shepherdson [14,15,20,9,10], assurant qu'un langage reconnu par un automate bilatère l'est aussi par automate unilatère, et du théorème de Kleene [11,9,10, etc.], qui assure qu'un langage reconnu par un automate unilatère est rationnel.□

Soit $s: A^* \to K$ une série formelle à valeurs dans un demi-anneau $K$. Si $s$ est $K$-rationnelle alors $s^*$ l'est aussi. Il n'en est pas de même pour l'opération $\uparrow$.

**Proposition 3.** *L'opération flèche ($\uparrow$) ne préserve pas la rationalité des séries. De plus, l'image par $\uparrow$ d'une série rationnelle n'est en général pas algébrique.*

La preuve est donnée par un exemple.

**Exemple 1.** Soit $A=a$ et $X=a^+$.
La série $s=\underline{X}$ est rationnelle. Considérons la série $s^{\uparrow}$, série zig-zag sur $X$.
Soit $a^n$ un mot de $A^*$. Il existe une bijection entre les factorisations zig-zag de $a^n$ et les suites de positions internes de $a^n$ : $(a^i,a^{n-i})$, $i=1,\dots,n-1$, où une même position n'est jamais répétée deux fois (se souvenir de l'interdiction sur la présence de boucles dans une factorisation zig-zag). Pour tout sous-ensemble de $\{1,\dots,n-1\}$ à $k$ éléments, il existe $k!$ factorisations zig-zag à $k+1$ pas de $a^n$, une pour chaque permutation des positions. On a alors que pour tout $n \geq 0$, le nombre $z_n$ de factorisations zig-zag du mot $a^n$ est

$$z_n = (s^{\uparrow},a^n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} k!.$$

De façon équivalente : $z_n = 1 + (n-1) + (n-1)(n-2) + \dots + 2(n-1)!.$

Pour $n$ allant vers l'infini on trouve $limsup \sqrt[n]{|z_n|} \geq lim \sqrt[n]{n!} = \infty$. Le rayon de convergence de $s^{\uparrow}$ est alors nul et la série zig-zag $(\underline{aa^*})^{\uparrow}$ n'est pas algébrique.

## 5. Caractérisation des séries s↑ rationnelles

Les séries $s^{\uparrow}$ ne sont pas toujours rationnelles. Dans le théorème suivant on donne une double caractérisation des séries $s^{\uparrow}$ rationnelles, lorsque le demi-anneau considéré est celui des réels positifs, $K=\mathbb{R}^+$. Ce résultat généralise au cas du demi-anneau $\mathbb{R}^+$ un résultat sur les séries zig-zag contenu dans [3]. On montre aussi (par l'Exemple 2) que ce résultat n'est pas valable pour un demi-anneau quelconque.

On dit qu'un langage est *simple* [3] s'il n'existe pas une suite infinie de ses mots l'un facteur propre du suivant.

**Théorème 1.** *Soit* $s \in Rat(\mathbb{R}^+ \langle\langle A \rangle\rangle)$ *et* $\mathcal{A}^{\uparrow}{}_s$ *un K-2FA associé. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

*i)* $s^{\uparrow}$ *est une série rationnelle;*

*ii) supp(s) est simple;*

*iii) l'ensemble des suites de croisement de* $\mathcal{A}^{\uparrow}{}_s$ *est fini.*

**Preuve.** iii)⇒i) Si l'ensemble des suites de croisement d'un K-2FA est fini on peut construire un K-1FA reconnaissant son comportement zig-zag, en appliquant la technique montrée dans [5]; la série reconnue est donc rationnelle.

Pour les autres implications remarquons d'abord [5] qu'un langage rationnel $X$ sur un alphabet $A$ est non-simple ssi il existe des mots $x \in A^*$, $y$, $z \in A^+$ tels que pour tout $l, m \in \mathbb{N}$ le mot $y^l x z^m \in X$.

i)⇒ii) Si $X=supp(s)$ (qui est un langage rationnel) n'est pas simple il existe des mots $x$, $y$, $z$ comme ci-dessus. Pour tout mot $w_n=y^n x z^n$ il existe alors $P(n)$ chemins réussis qui le calculent dans $\mathcal{A}^{\uparrow}{}_s$, avec $P(n) \geq 1 + n^2 + n^2(n-1)^2 + \ldots + (n!)^2$. En effet, on rappelle que tout mot $y^l x z^m$ appartient à $X$ et que pour tout mot $w \in X$ il existe dans $\mathcal{A}^{\uparrow}{}_s$ un chemin *simple* (i.e. non traversant l'état $1$) de $1$ à $1$ étiqueté $w$ et un chemin simple de $1$ à $1$ étiqueté $\overline{w}$. Parmi les chemins qui calculent $w_n$ il y a alors tous ceux-là qui renversent leur direction alternativement sous une position $(y^n x z^i, z^{n-i})$ et sous une position $(y^i, y^{n-i} x z^n)$. Pour ces chemins-là, le choix de la position

$(y^n x z^i, z^{n-i})$ à rejoindre se fait : la première fois parmi toutes les $n$ positions à disposition; la deuxième fois parmi les restantes $n-1$ et ainsi de suite.

La multiplicité de $w_n$ est alors $m(w_n) \geq P(n) \times |w_n| \times min\ f((p,a,q))$. La série $s^{\uparrow}$ ne peut pas être algébrique car sa croissance est plus que exponentielle dans la longueur des mots.

ii)$\Rightarrow$iii) On remarque que si un état $q$ de l'automate $\mathscr{A}^{\uparrow}{}_s$ paraît $n$ fois dans une suite de croisement $cs_z(u,v)$ d'un chemin réussi $z$, alors $supp(s)$ contient une suite $\{u_1v_1,\ldots,u_nv_n\}$ de $n$ mots l'un facteur propre du suivant. Les mots $u_1,\ldots,u_n$ sont des suffixes de $u$ qui sont les étiquettes de $n$ chemins simples de $1$ à $q$, sous-chemins de $z$ (pris dans l'ordre croissante des longueurs); les mots $v_1,\ldots,v_n$ sont des suffixes de $v$ qui sont les étiquettes de $n$ chemins simples de $q$ à $1$, sous-chemins de $z$ (pris dans l'ordre croissante) (voir fig. 3). Tout mot $u_iv_i$ appartient à $supp(s)$ parce qu'il est calculé par un chemin simple de $1$ à $1$.

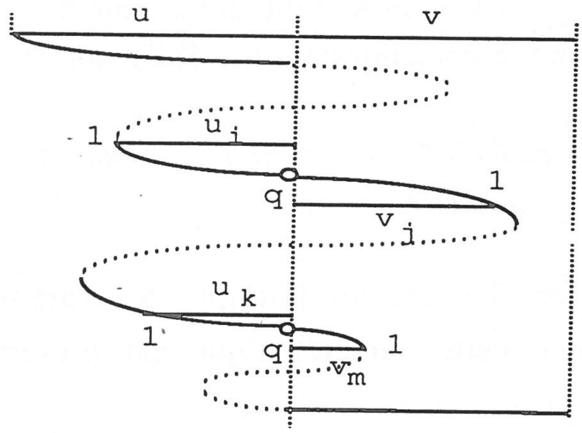


fig. 3

Si l'ensemble des suites de croisement de $\mathscr{A}^{\uparrow}{}_s$ est infini, alors il existe un état e $\mathscr{A}^{\uparrow}{}_s$ qui paraît combien de fois l'on veut dans une suite de croisement. Cette ituation implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $supp(s)$ contient $n$ mots l'un facteur ropre du suivant et donc il n'est pas simple.□

**Corollaire 1.** *Soit $s \in Rat(\mathbb{R}^+ \langle\langle A \rangle\rangle)$. Il est décidable si $s^{\uparrow}$ est une série ationnelle ou non.*

**Preuve.** La preuve suit de la caractérisation ii) du Théorème 1 et de la écidabilité de la simplicité d'un langage rationnel. Celle-ci peut se montrer par caractérisation suivante [5] : un langage rationnel $X \subset A^*$ est non-simple ssi il xiste des mots $x, y, z \in A^*$, $y, z$ non vides, tels que le langage $x^*yz^* \subset X$. Un langage rationnel $X$ est alors non-simple ssi dans un automate fini qui reconnaît il existe un état $q$ tel que le langage $L_q$ des étiquettes d'un état initi à $q$ contient un sous-ensemble $x^*v$ et le langage $R_q$ des étiquettes de $q$ à un ét terminal contient un sous-ensemble $wz^*$. Ces propriétés peuvent être vérifié en décidant de la présence de boucles sur un état initial dans un automa codéterministe émondé qui reconnaît $L_q$ et de la présence de boucles sur u état terminal dans un automate déterministe émondé qui reconnaît $R_q$.□

**Corollaire 2.** *Soit* $s \in Rat(\mathbb{R}^+\langle\langle A\rangle\rangle)$. *Si* $s^{\uparrow}$ *est une série rationnelle, alors on pe construire sa représentation linéaire.*

**Preuve.** Considérons un automate $\mathcal{A}{\uparrow}_s$. Si $s^{\uparrow}$ est une série rationnelle, alors Théorème 1 assure que l'ensemble des suites de croisement de $\mathcal{A}{\uparrow}_s$ est fini. L technique montrée dans [5] pour construire un K-1FA reconnaissant comportement zig-zag d'un K-2FA peut alors s'applier à $\mathcal{A}{\uparrow}_s$. On obtient ainsi u K-1FA $\mathcal{B}=(Q,l,f,c)$ dont le comportement est $\mathcal{S}(\mathcal{B})=lm^*c=\mathcal{S}_z(\mathcal{A}{\uparrow}_s)=s^{\uparrow}$.□

**Corollaire 3.** *Soit* $s \in Rat(\mathbb{R}^+\langle\langle A\rangle\rangle)$. *Si* $s^{\uparrow}$ *est une série rationnelle, alors elle e l'étoile d'une série rationnelle.*

**Preuve.** L'assertion découle du fait que les automates $\mathcal{A}{\uparrow}_s$ ont un seul ét initial et final et que cette caractéristique est préservée par la construction c [5].□

L'exemple suivant montre que le Théorème 1 n'est pas valable pour un dem anneau quelconque.

**Exemple 2.** Soient $A=a$, $X=a^+$, $K=\mathcal{B}$, le demi-anneau de Boole.
Considérons la série $s \in \mathcal{B}\langle\langle A\rangle\rangle$ qui vaut *1* sur les mots de $X$ et *0* ailleurs. So support est $supp(s)=X$, qui est un langage non-simple. Par contre $s^{\uparrow}$ est la séri qui vaut *1* sur $X^{\uparrow}$, *0* ailleurs; elle est donc une série rationnelle puisque $X^{\uparrow}$ est u langage rationnel.

## Remerciement

Ce travail a mûri pendant mon séjour au Laboratoire d'Informatiqu Théorique et Programmation (LITP) de l'Université Paris 7. Je vais ain remercier tous les membres du laboratoire, et notamment le Prof. Dominiqu Perrin qui a suivi de plus près mon travail.

## Bibliographie et références

1. M. Anselmo, Automates et codes zig-zag, à paraître dans *RAIRO-Informatique Théorique*, vol. 24 n°6 (1990); et *rapport technique LITP* n° 88-74 (Novembre 1988)

2. M. Anselmo, Sur les codes zig-zag et leur décidabilité, *Theor. Comp. Sc.* 74 (1990) pp. 341-354; et rapport technique LITP n° 89-36 (Mai 1989)

3. M. Anselmo, The zig-zag power-series: a two-way version of the star operator, *Theor. Comp. Sc.*- special issue, à paraître

4. M. Anselmo, Automates bilatères et codes zig-zag, *thèse de doctorat*, Université Paris 7 (1990); *rapport technique LITP* n° 90-27 (Mars 1990)

5. M. Anselmo, Two-way Automata with Multiplicity, *Proc. ICALP 90* LNCS 443 (Springer-Verlag, 1990) pp. 88-102

6. M. Anselmo, Two-way Reading on Words, *Proc. IMYCS 90*, LNCS 464 (Springer-Verlag, 1990) pp. 110-119

7. J. Berstel - D. Perrin, *Theory of codes*, (Academic Press, London, 1985)

8. J. Berstel - C. Reutenauer, *Les séries rationnelles et leur langages*, (Masson, Paris, 1984)

9. S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines, Vol. A*, (Academic Press, London, 1974)

10. J.E. Hopcroft - J.D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, (Addison-Wesley, New York, 1979)

11. S.C. Kleene, Representation of events in nerve nets and finite automata, dans C. E. Shannon, J. McCharty (eds.) *Automata Studies* (Princeton N. J., 1956) pp. 3-40

12. W. Kuich - A. Salomaa, *Semirings, Automata, Languages*, EATCS Monographs on Theor. Comp. Sc. 5 (Springer Verlag, Berlin, 1986)

13. D. Perrin, Automates avec multiplicité, *rapport technique LITP* n°88-42 (Mai 1988)

14. M.O. Rabin, Two-way Automata, *Proc. Summer Institute of Symbolic Logic* Cornell University (Ithaca 1957) 366-369.

15. M. O. Rabin - D. Scott, Finite Automata and their Decision Problems, *IBM J. Res. Dev.* 3, n°2 (1959) 114-125; et dans E.F. Moore (editor), *Sequential Machines: Selected Papers* (Addison- Wesley, New York, 1964).

16. A. Saloma - M. Soittola, *Automata-theoretic Aspects of Formal Power Series*, (Springer Verlag, 1978)

17. M.P. Schützenberger, On the definition of a family of automata, *Information and Control* vol. 4 (1961) pp. 245-270

18. M.P. Schützenberger, On a theorem of R. Jungen, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 13 (1962) pp. 885-889

**19.** M.P. Schützenberger, Certain elementary families of automata, *Proc. Symposium on Math. th. of Automata*, Polytechnic Institute of Brooklyn (1962) pp. 139-153

**20.** J.C. Shepherdson, The reduction of two-way automata to one-way automata, *IBM J. Res. Dev.* 3, n°2 (1959), 198-200; et dans E.F. Moore (editor), *Sequential Machines: Selected Papers* (Addison - Wesley, New York, 1964).