

# Animaux et arbres guingois<sup>+</sup>

J. Bétréma et J.G. Penaud  
LABRI Université de Bordeaux I  
33405 Talence Cedex, France

Résumé. Les *animaux dirigés* sont mis en bijection avec une famille d'arbres asymétriques, les *arbres guingois*. On en déduit un code des animaux et des algorithmes linéaires de construction du code et de dessin. Il est alors possible de générer un animal aléatoire de grande taille. Dans un deuxième temps nous étendons cette bijection aux animaux 3D, animaux dont le dénombrement n'a pas encore de solution combinatoire.

Abstract. The directed animals are put in a one to one correspondance with a kind of asymmetric trees.

## 1. Introduction

Les *animaux dirigés* font partie des modèles sur réseau géométrique en vogue ces dernières années pour le rôle qu'ils jouent en physique statistique, particulièrement dans la théorie des phénomènes critiques ([PS], [Te]). Ce sont des ensembles de points deux à deux voisins sur un réseau carré et qui se développent par ajout de nouveaux points dans une *direction privilégiée* à partir d'une origine appelée *source*. Un large tour d'horizon sur les relations entre les objets combinatoires de ce type et la physique fut exposé au séminaire Bourbaki par Viennot [Vi1].

Les propriétés statistiques de ces objets ont été abondamment étudiées par les physiciens: citons les travaux de Nadal, Derrida et Vannimenus [NDV], Hakim et Nadal [HN], Dhar [Dh1], [Dh2].

Mais c'est par des méthodes combinatoires issues des travaux de M.P Schützenberger ([Sc]) que Gouyou-Beauchamps et Viennot [GBV] ont retrouvé les résultats d'énumération des animaux à une source selon le nombre de points, établis par Dhar [Dh1], [Dh2], d'une part, et par Hakim et Nadal d'autre part [HN]. Leur construction les a conduits de façon naturelle à trouver et démontrer la formule d'énumération des animaux à *source compacte*.

En utilisant un nouvel objet combinatoire, les *empilements de pièces*, qui constitue un équivalent visuel du monoïde de commutation de Cartier et Foata [CF], Viennot a résolu combinatoirement un autre problème, l'énumération des animaux sur réseau triangulaire ([Vi2], [Dh1], [Dh2]). Ce même outil a permis à l'auteur [Pe1] de définir une bijection générale qui s'applique aux divers réseaux par l'emploi d'opérateurs qui font "croître l'animal par le haut".

C'est une nouvelle approche qui est suivie dans le présent travail, où l'on établit une bijection entre les animaux et une nouvelle famille d'arbres asymétriques, les *arbres guingois*. Cette bijection conduit à un nouveau codage des animaux par un langage dont on donne les équations. De plus elle conduit, par une légère modification des algorithmes classiques de parcours d'arbres que sont les

---

<sup>+</sup>Travail réalisé avec les soutiens conjoints du PRC Mathématiques et Informatique et du CJPP.

*parcours en profondeur* et *en largeur* à des algorithmes de codage et de dessin en temps linéaire par rapport au nombre de points. Contrairement à la précédente, cette bijection induit une construction utilisant des opérateurs qui font "croître l'animal par le bas". De plus ce codage permet la génération aléatoire des animaux avec les techniques développées dans [HC].

Enfin les arbres guingois se généralisent à l'espace. Il est alors aisé d'engendrer systématiquement ces arbres à trois dimensions, et de fournir ainsi les séquences de nombres qui comptent les animaux dans l'espace [CP]. Peut-être est-ce une voie pour trouver la solution combinatoire générale de l'énumération des animaux dans l'espace ? En effet Dhar [Dh<sub>2</sub>], et Viennot [Vi<sub>1</sub>] ont montré dans un cas particulier (réseau cubique ou empilement d'hexagones) l'équivalence avec le problème des *hexagones durs*, problème résolu récemment par Baxter de façon analytique [Ba] à l'aide des célèbres identités de Rogers-Ramanujan.

Cet article comprend 6 paragraphes. Le deuxième rappelle sur l'exemple très classique des arbres binaires la méthodologie de Schützenberger de dénombrement : codage à l'aide d'une bijection entre l'objet combinatoire et un mot d'un langage algébrique non ambigu puis passage de la grammaire générative à un système d'équations algébriques vérifié par la série énumératrice des objets à dénombrer.

C'est dans le troisième paragraphe que l'on introduit la notion d'arbre guingois et que l'on détermine le langage qui les code. Le quatrième paragraphe expose le résultat principal de cet article, c'est-à-dire la bijection entre animaux et arbres guingois. Le cinquième donne une interprétation de cette bijection en termes d'empilements de dominos dont on rappelle la définition et les opérations de base.

Enfin le sixième paragraphe, où l'on évoque les grammaires d'empilements et l'extension des animaux à l'espace, sert de conclusion. Nous avons pu définir une bijection entre les animaux dans l'espace et une généralisation des arbres guingois, mais le dénombrement de ces arbres guingois généralisés reste un problème ouvert.

## 2. Arbres et codages

Considérons la famille  $\mathfrak{B}$  des arbres binaires (pas nécessairement complets) au sens de Knuth [Kn], c'est-à-dire des arbres possédant un sommet privilégié, *la racine*, et dans lesquels on distingue le fils droit du fil gauche. La figure 1 en illustre une définition récursive.

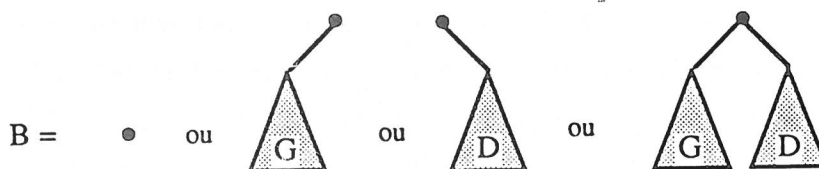


Figure 1. Génération d'un arbre binaire.

Rappelons le vocabulaire utilisé dans le cas binaire sur l'exemple de la figure 2.

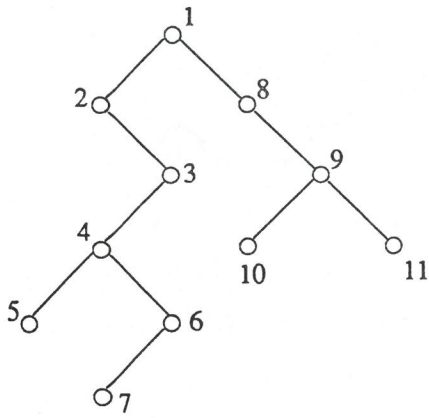


Figure 2. Ordre préfixe d'un arbre binaire.

La figure 2 montre un arbre binaire à 11 sommets numérotés de 1 (racine) à 11.

Les sommets qui n'ont pas de fils (racines de sous-arbres à un seul sommet) sont les sommets *externes* ou *feuilles*, (exemple 5, 7, 10 et 11) tandis que les autres sommets, dits sommets *internes*, se repartissent en trois classes,

- les *points doubles*, qui ont exactement deux fils, (ex. 1,4,9)
- les *points simples à gauche* qui ont un fils à gauche uniquement, (ex. 3,6)
- les *points simples à droite* qui n'ont qu'un fils droit (ex. 2,8).

Rappelons sur l'exemple classique des arbres binaires, la méthode de Schützenberger de codage par des mots et d'obtention des séries énumératrices. (pour plus de détail, voir [Vi<sub>2</sub>]). De la définition récursive des arbres binaires résumée dans la figure 1, on déduit immédiatement une *grammaire algébrique* ou de *Chomsky* engendrant de façon non *ambiguë* un langage et dont les règles syntaxiques (séparées par le symbole +) traduisent la façon dont un arbre peut être construit à partir d'arbres plus petits, ( $\epsilon$  désigne le mot vide),

$$M_2 \Rightarrow \epsilon + a M_2 + b M_2 + x M_2 \bar{x} M_2 \tag{1}$$

Le langage engendré constitue un *codage* des arbres binaires ayant  $n$  sommets par des mots de longueur  $n-1$  sur l'alphabet  $A_2 = \{x, \bar{x}, a, b\}$ . C'est le langage bien connu de *Motzkin bicolore*, noté  $M_2$ . Cette grammaire peut être considérée comme un système d'équations (réduit à une seule équation dans l'exemple), en variables non commutatives dont les inconnues sont les langages solutions. La non ambiguïté de la grammaire se traduit dans le système par le fait que les membres droits des équations sont des unions disjointes de produits (de concaténation) non-ambigus.

Le langage  $M_2$  est un cas particulier de la famille de langages  $M_k, k \geq 0$ , sur l'alphabet à  $k+2$  lettres,  $A_{k+2} = \{x, \bar{x}, a_1, a_2, \dots, a_k\}$  dont les plus connus sont le *langage de Dyck* (ou de parenthèses),  $M_0$  noté généralement  $D$ , (c'est le code usuel des arbres binaires *complets*), d' équation,

$$D = \epsilon + x D \bar{x} D, \tag{2}$$

et le *langage de Motzkin*  $M_1$ , noté usuellement  $M$ , d'équation,

$$M_1 = \epsilon + a M_1 + x M_1 \bar{x} M_1. \tag{3}$$

Ces langages s'obtiennent pour  $k \geq 1$  en appliquant l'opérateur *mélange* (cf [Lo] p 108) noté  $\sqcup$ , aux mots du langage de Dyck, ainsi, on a par exemple,

$$M_2 = D \sqcup (a, b)^*.$$

En définissant pour tout mot de  $A^*$  le paramètre  $\delta$  par  $\delta(f) = |f|_x - |f|_{\bar{x}}$ , les mots  $f$  de  $M_k, k \geq 0$ , sont aussi caractérisés par la double condition, que pour tout mot  $w$  *facteur gauche* de  $f$ , c'est-à-dire tel que  $f = wg, \delta(w) \geq 0$ , et pour  $f, \delta(f) = 0$ .

Il est usuel ( voir [Vi<sub>4</sub>]) de représenter ces mots par des chemins sur un quadrillage à coordonnées entières, la lettre  $x$  codant un pas Nord-Est (NE), c'est à dire joignant le point  $(i, j)$  au point  $(i+1, j+1)$ , la lettre  $\bar{x}$  un pas Sud-Est (SE), joignant le point  $(i, j)$  au point  $(i-1, j-1)$  et les lettres  $a, b, \dots$  par des



paliers c'est à dire des pas Est joignant le point  $(i,j)$  au point  $(i+1,j)$  colorés. Ainsi  $\delta(f)$  est égal la hauteur finale du chemin code par  $f$ . La figure 3 ci-contre montre un mot de Motzkin, et le chemin associé au mot .

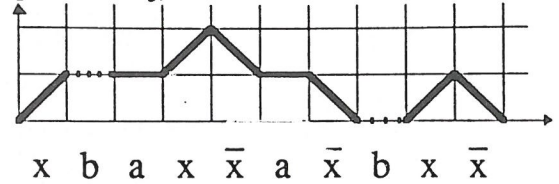


Figure 3. Chemin de Motzkin bicoloré.

Par le morphisme  $\tau$  tel que

$$\tau(a) = \tau(b) = \tau(x) = \tau(\bar{x}) = t ,$$

appliqué au langage  $M_2$ , on obtient la série à une variable  $m_2(t)$  énumérant les mots de  $M_2$  selon leur longueur. Elle est solution de l'équation en variables commutatives,

$$m_2 = 1 + 2 t m_2 + t^2 (m_2)^2. \tag{4}$$

En développant la solution analytique à l'origine, on trouve que le coefficient de  $t^n$ , noté  $m_{2,n}$ , s'exprime en fonction des fameux *nombre de Catalan*  $C_n$ , soit  $m_{2,n} = C_{n+1}$ , ( $n \geq 0$ ), avec

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \tag{5}$$

Remarquons que les nombres de Catalan sont généralement définis en développant l'expression,  $d(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}$ , solution analytique à l'origine de l'équation vérifiée par la série  $d(t)$ ,  $d = 1 + t^2$ , énumérant les mots du langage de Dyck . Le lecteur trouvera dans [Vi4] les autres façons usuelles d'établir la relation (6) ainsi que la bijection classique entre mots de Dyck et mots de Motzkin bicolorés.

L'algorithme classique de parcours d'un arbre binaire est le *parcours en profondeur* ou de *Trémaux* [Be], appelé encore *parcours préfixe*. Rappelons qu'il consiste à visiter d'abord la racine, puis récursivement le sous-arbre gauche s'il existe, et enfin le sous-arbre droit s'il existe. En numérotant les sommets lorsque l'on débute la visite du sous-arbre dont ils sont racines par des entiers croissants de 1 à  $n$  (nombre de sommets), on obtient une numérotation canonique des sommets appelée *l'ordre préfixe* .

Terminons ces rappels en remarquant que pour coder un arbre binaire par un mot du langage de Motzkin bicoloré, il suffit au long de ce parcours préfixe, de coder un point double par "x", un point simple à gauche par "a", un point simple à droite par "b" et une feuille (sauf la dernière) par "x̄". Cet algorithme de codage est classique, voir par exemple [Fr].

### 3. Arbres guingois

Pour définir la famille des arbres *gingois*, introduisons un paramètre qui mesure l'écart entre les projections horizontales d'un sommet et celle de la racine.

DEFINITION 3.1.

Le *déport par rapport à z* (en abrégé  $dép_z(x)$ ) est un entier relatif attaché à tout sommet  $x$  d'un arbre binaire de racine  $z$  égal par définition à la différence entre le nombre de pas à droite et le nombre de pas à gauche dans l'unique chemin de l'arbre de  $z$  à  $x$ . Cette notion s'étend aux arbres en posant ,



pour un arbre  $T$  de racine  $z$ ,

$$\text{dep}(T) = \max_{x \in T} \text{dep}_z(x).$$

Un arbre de déport négatif ou nul sera appelé une *équerre*, et une équerre dont le dernier sommet dans l'ordre préfixe est de déport nul sera dite *stricte*.

La figure 4 ci-contre montre les déports des sommets calculés par rapport à la racine  $z$  de l'arbre et portés sur un axe horizontal.

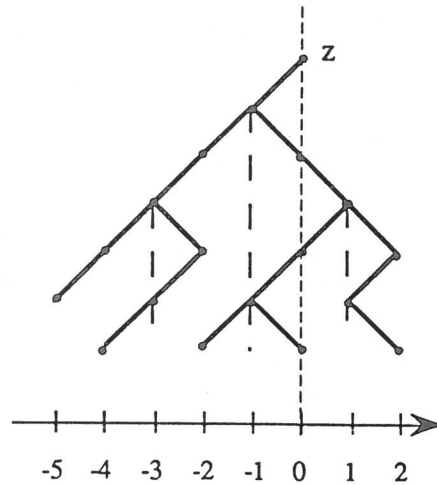


Figure 4. Arbre guingois.

On peut alors définir,

DEFINITION 3.2. Un *arbre guingois*<sup>1</sup> est un arbre binaire tel que pour tout point double, le sous-arbre gauche est une équerre.

Un exemple est donné par la figure 4.

Pour établir une propriété de décomposition des arbres guingois, nous allons définir une opération de concaténation dans la famille des arbres binaires consistant à remplacer la dernière feuille dans l'ordre préfixe du premier arbre par la racine du second. Plus précisément, on définit trois opérateurs selon que la racine du second est point simple ou point double.

DEFINITION 3.3. On appelle *concaténé gauche* (respectivement *droit*) de 2 arbres binaires  $T_1$  et  $T_2$  l'arbre binaire  $T$  obtenu en plaçant la racine de  $T_2$  comme fils gauche (resp. droit) de la dernière feuille de  $T_1$  dans l'ordre préfixe.

On notera cette opération par le symbole  $\otimes_g$  (resp.  $\otimes_d$ ).

DEFINITION 3.4. On appelle *bi-concaténation* du triplet d'arbres binaires  $(T_1, T_2, T_3)$  l'arbre  $T$  obtenu en plaçant les racines des arbres  $T_2$  et  $T_3$  respectivement comme fils gauches et droit de la dernière feuille de  $T_1$ .

On notera cette opération par le symbole  $\otimes_2$ :  $T = T_1 \otimes_2 (T_2, T_3)$ .

Le codage préfixe de ces arbres par le langage de Motzkin bicolore vérifie,  $\text{code}(T) = \text{code}(T_1).\text{code}(T_2)$  dans le cas de la simple concaténation gauche ou droite, et dans le cas de la bi-concaténation,  $\text{code}(T) = \text{code}(T_1).x.\text{code}(T_2).\bar{x}.\text{code}(T_3)$ .

Dans le cas des arbres binaires, cette opération est ambiguë mais cette ambiguë tombe dans le cas des arbres guingois grâce au paramètre déport qui introduit un contrôle supplémentaire, comme le montre la proposition 3.5 ci-dessous.

Etendons de façon naturelle la concaténation simple ou double aux couples ou triplets de familles d'arbres comme la réunion des simples ou bi-concaténations des arbres de ces familles. Un (bi-)concaténation d'ensembles d'arbres sera dite non ambiguë si elle ne contient pas d'arbre égal à l'un des (bi-)concaténations distinctes.

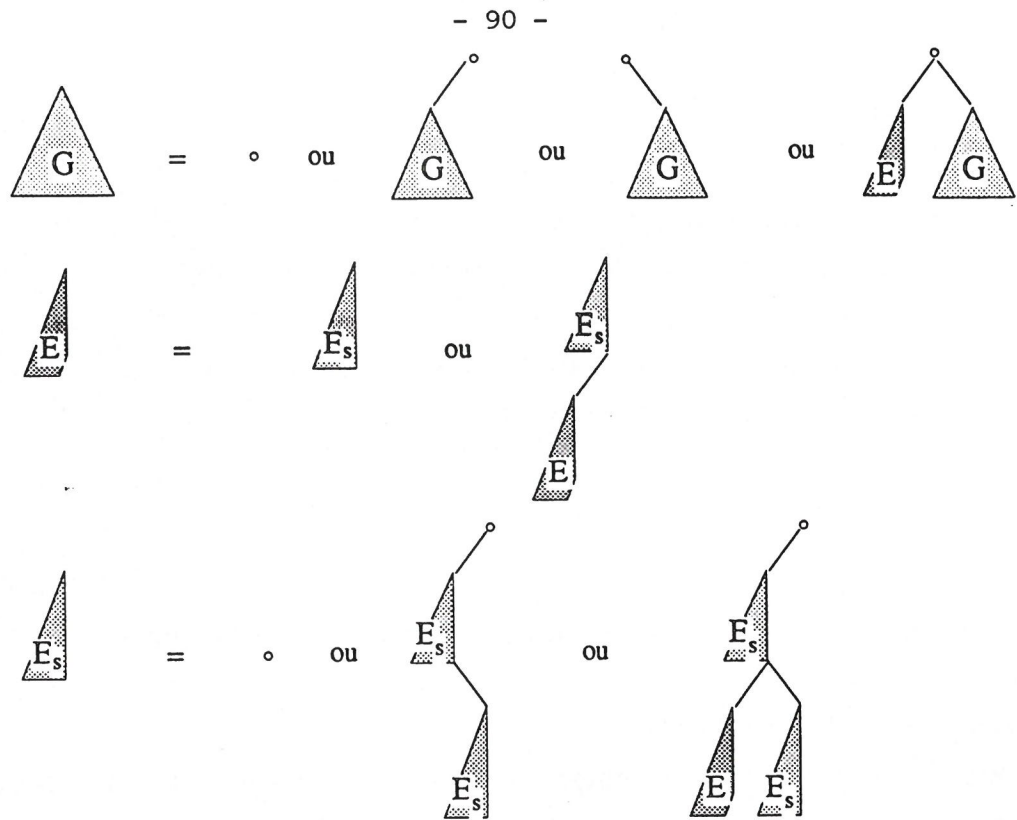


Figure 5. Génération des arbres guingois.

*Notations.* Appellons  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{E}$ , et  $\mathcal{E}_s$ , les familles des arbres guingois, équerres et équerres strictes, (à un isomorphisme près). Notons par le symbole  $\circ$  à la fois l'arbre réduit à un sommet, et l'ensemble constitué par cet arbre, et par le symbole  $+$  les unions. On a la proposition suivante, illustrée par la figure 5.

PROPOSITION 3.5. *Les familles  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{E}$ , et  $\mathcal{E}_s$  vérifient les égalités suivantes où les membres sont des unions disjointes et les concaténations non ambiguës.*

$$\begin{cases} \mathcal{G} = \circ + \circ \otimes_g \mathcal{G} + \circ \otimes_d \mathcal{G} + \circ \otimes_2 (\mathcal{E}, \mathcal{G}) \\ \mathcal{E} = \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_s \otimes_g \mathcal{E} \\ \mathcal{E}_s = \circ + \circ \otimes_g (\mathcal{E}_s \otimes_d \mathcal{E}_s) + \circ \otimes_g (\mathcal{E}_s \otimes_2 (\mathcal{E}, \mathcal{E}_s)) \end{cases}$$

Preuve.

La première égalité est une conséquence immédiate de la définition. La deuxième et la troisième se déduisent des propriétés du parcours préfixe.

De cette décomposition des arbres guingois, on déduit les équations du langage qui les code, énoncées dans le théorème de codage suivant.

THEOREME 3.6. *Les arbres guingois (respectivement équerres, équerres strictes) ayant n sommets sont codés par les mots à n+1 lettres du langage de  $\{a, b, x, \bar{x}\}^*$  qui constitue la première (respectivement deuxième, troisième) composante de la solution du système  $\Sigma$  suivant:*



$$(\Sigma) \begin{cases} G = \varepsilon + aG + bG + xE\bar{x}G \\ E = E_s + E_s a E \\ E_s = \varepsilon + aE_s bE_s + aE_s xE\bar{x}E_s \end{cases} \quad (6)$$

Preuve. Ce système est propre, donc possède une solution unique. La preuve de la bijection entre les mots des langages solutions et les arbres se fait par induction sur la longueur des mots et le nombre de sommets des arbres. Il suffit de vérifier que chaque équation définit une décomposition non ambiguë de l'ensemble de mots que constitue le membre gauche.

Remarquons d'abord que les langages  $E_s$ ,  $E$  et  $G$  sont des sous-ensembles du langage  $M_2$  et donc bien parenthésés en  $x$  et  $\bar{x}$  et en conséquence, la décomposition des mots de  $G$  selon la première équation est unique, sous réserve que celle de  $E$  le soit. La non ambiguïté des décompositions de  $E$  et  $E_s$  repose sur un lemme technique de décomposition des mots de Dyck (cf [CC]).

**Remarque.** L'algorithme de codage d'un arbre guingois qui lui associe un mot de  $G$  est le même que celui d'un arbre binaire quelconque.

Par le morphisme  $\tau$  tel que  $\tau(a) = \tau(b) = \tau(x) = \tau(\bar{x}) = t$ , on obtient le système d'équations  $\mathcal{A} = \tau(\Sigma)$  dans  $\mathbb{Z}[[t]]$ .

$$(\mathcal{A}) \begin{cases} g = 1 + 2tg + t^2 eg \\ e = e_s(1 + te) \\ e_s = 1 + t^2 e_s^2 + t^3 e e_s^2 \end{cases} \quad (7)$$

En résolvant la seconde équation par rapport à  $e$  et en portant cette expression dans la troisième, on obtient,

$$(\mathcal{G}) \begin{cases} g = 1 + 2tg + t^2 eg \\ e = 1 + te + t^2 e^2 \\ e_s = 1 - te_s + t(1+t)e_s^2 \end{cases} \quad (8)$$

La dernière équation a pour solution analytique à l'origine,

$$e_s = \frac{1}{2t} \left( 1 - \sqrt{\frac{1-3t}{1+t}} \right),$$

d'où en développant par Taylor, le coefficient de  $t^n$  s'exprime en fonction des nombres de Catalan,

$$(e_s, t^n) = \sum_{p=0}^n (-1)^p C_p \binom{n}{n-p}. \quad (9)$$

Le seconde est l'équation classique de la série énumératrice des mots de *Motzkin*, (cf [Vi4]) c'est-à-dire des mots du langage  $M$  sur  $\{x, \bar{x}, a\}$  vérifiant l'équation,

$$M = \varepsilon + aM + xM\bar{x}M,$$

d'où l'expression du coefficient de  $t^n$  dans  $e$ , égal au  $n^{\text{ième}}$  nombre de Motzkin  $m_n$ ,

$$(e, t^n) = m_n = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{p+1} \binom{n}{2p} \binom{2p}{p}. \quad (10)$$

Enfin en multipliant les 2 membres de l'équation de  $g$  par  $e$  et en retranchant  $e$  on obtient  $g = e + etg$ , où l'on reconnaît l'équation classique [GB] de la série énumératrice des facteurs gauches de  $M$ , langage noté GAUCHE( $M$ ), selon leur longueur, donc,

$$g_n = (g, t^n) = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \binom{p}{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}. \quad (11)$$

Ces résultats numériques peuvent s'établir sans calcul. En effet, soit  $M$  le langage de Motzkin sur l'alphabet  $B = \{z, \bar{z}, c\}$ , et le langage  $M' = \text{GAUCHE}(M)$  et le langage  $M_s$  défini par

$$M_s = z M \bar{z} = \{f \in M \setminus ((M-\varepsilon)^2 \cup \{c\})\}.$$

On a alors la propriété suivante,

PROPRIÉTÉ 3.7. *Il existe une bijection entre  $M'$  et  $G$  (respectivement entre  $M$  et  $E$ , resp entre  $M_s$  et  $E_s$ ) avec conservation des longueurs.*

Preuve. En distinguant dans  $M$  la 1<sup>ère</sup> occurrence de la lettre  $c$  au niveau zéro, et dans  $M_s$  la 1<sup>ère</sup> occurrence de cette lettre au niveau 1, on obtient le système d'équations non ambiguës suivant,

$$(M) \begin{cases} M' = \varepsilon + c M' + z M' + z M \bar{z} M' \\ M = M_s + M_s c M \\ M_s = \varepsilon + z M_s \bar{z} M_s + z M_s c M \bar{z} M_s \end{cases} \quad (12)$$

En comparant ce système au système (6), on peut définir une bijection de  $M' \subset \{z, \bar{z}, c\}^*$  dans  $G \subset \{x, \bar{x}, a, b\}^*$  (resp. de  $M$  dans  $E$ , resp. de  $M_s$  dans  $E_s$ ), en transportant récursivement les règles de formation des mots d'un langage par un simple réétiquetage des arbres de dérivation.

Remarque. Il est alors possible de donner une interprétation bijective de la formule (9) à l'aide des mots de Motzkin tri-colorés de  $\{x, \bar{x}, a, b, c\}^*$  (cf [Pe<sub>2</sub>]).

#### 4. Animaux dirigés et arbres guingois

Ce paragraphe contient la bijection centrale de l'article. Considérons le plan combinatoire  $\Pi = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Le terme *animal* désigne une configuration de points de  $\Pi$ , le qualificatif dirigé indiquant qu'il se développe dans une direction privilégiée, en l'occurrence la première bissectrice.

Plus précisément, en appelant *chemin* une suite finie de points de  $\Pi$  dont les coordonnées diffèrent au plus d'une unité et *pas* un couple  $(p_i, p_{i+1})$  de deux points consécutifs, on a la définition,

DEFINITION 4.1. Un *animal dirigé*  $\mathcal{A}$  à une source est un ensemble de points de  $\Pi$  tel que,

- ι) l'origine  $O = (0,0)$  est un point de l'animal  $\mathcal{A}$ ; on l'appelle la *source*.
- ιι) tout point  $(x,y)$  de  $\mathcal{A}$  est l'extrémité d'un chemin d'origine  $O$  dont les pas sont définis,
  - soit par le couple de points  $((i, j) (i, j+1))$  qui constitue un pas Nord,
  - soit par le couple de points  $((i, j) (i+1, j))$  qui constitue un pas Est.



Dans cet article nous représentons la première directrice de  $\Pi$  dirigée vers le bas, (Sud), comme le montre la figure 8, où  $\Pi$  est rapporté aux axes  $Ox$  et  $Oy$ . Les pas autorisés seront alors dits *Sud-Est* et *Sud-Ouest* . .

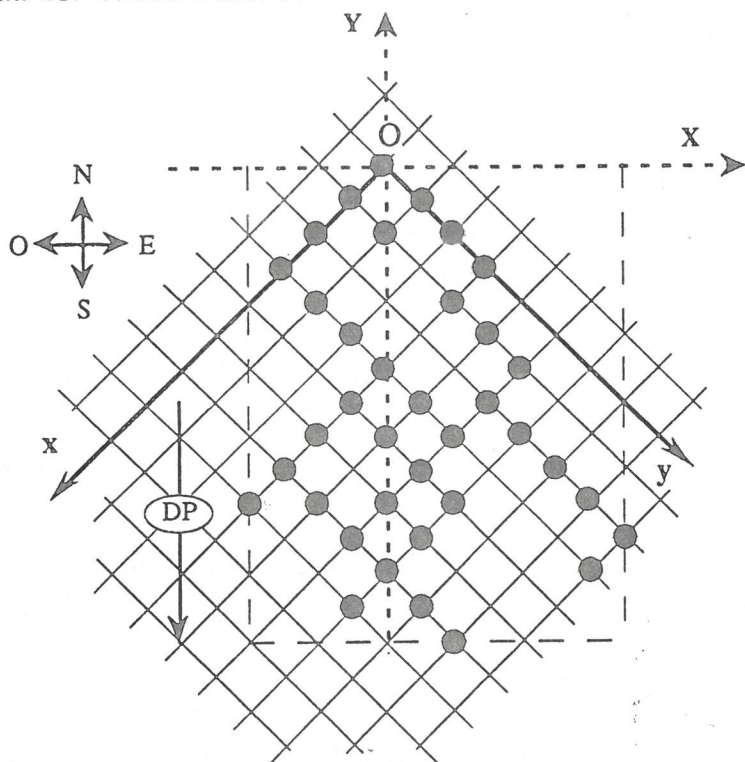


Figure 8. Un animal dirigé.

La direction Sud est dite la *direction privilégiée* et elle est représentée par une flèche marquée DP, indiquant la direction de croissance de l'animal. La *longueur* et la *largeur* de  $\mathcal{Q}$  sont les dimensions du plus petit rectangle aux côtés Nord-Sud et Est-Ouest qui le contienne, la longueur étant mesurée sur le côté parallèle à la direction privilégiée, l'unité de mesure étant le demi pas diagonal. La verticale de l'origine partage ce rectangle en deux parties, définissant ainsi la *demi-largeur gauche* et *droite*.

Il existe deux extensions classiques de cette définition, les *animaux à source compacte*, c'est-à-dire ayant plusieurs sources situées sur la même perpendiculaire à la direction privilégiée, et à des positions consécutives et les *animaux sur réseau triangulaire*, en autorisant le pas diagonal (Sud).

### changement de repère.

Il est plus agréable de prendre un nouveau repère XOY ayant l'axe des abscisses horizontal et l'axe des ordonnées vertical dirigé à l'opposé de la direction privilégiée, avec comme unité le demi-pas diagonal afin que sur ce nouveau repère les points de l'animal aient encore des coordonnées entières. (Il est représenté en pointillé sur la figure 8). On notera  $abs(x)$  l'abscisse du point  $x$  dans ce nouveau repère, et  $h(x)$  son ordonnée ou hauteur. Le déport d'un sommet par rapport à la racine est exactement son abscisse dans le nouveau repère.

On peut associer à tout animal  $\mathcal{Q}$  deux graphes ayant pour sommets les points de  $\mathcal{Q}$ . Ces graphes sont *binaires*, c'est-à-dire ce sont des graphes orientés tels que tout sommet a au plus deux successeurs et où l'on distingue le successeur droit du successeur gauche. Les autres notations utilisées pour les graphes sont celles de Berge [Be].

DEFINITION 4.2. Le graphe  $G_{\mathcal{Q}}$  est ainsi défini:

- les sommets de  $G_{\mathcal{Q}}$  sont les points de l'animal,
- $(x,y)$  est un arc de  $G_{\mathcal{Q}}$  si  $(x,y)$  est un pas Sud-Ouest ou Sud-Est de  $\mathcal{Q}$ .

DEFINITION 4.3. Le graphe  $T_{\mathcal{Q}}$  est ainsi défini:

- les sommets de  $T_{\mathcal{Q}}$  sont les points de l'animal,
  - $y$  est fils gauche de  $x$  dans  $T_{\mathcal{Q}}$  si  $\text{abs}(y) = \text{abs}(x) - 1$  et qu'il n'existe pas dans  $\mathcal{Q}$  de point  $z$  tels que  $\text{abs}(z) = \text{abs}(y)$  ou  $\text{abs}(z) = \text{abs}(x)$  et  $h(y) < h(z) < h(x)$ .
  - $y$  est fils droit de  $x$  si  $\text{abs}(y) = \text{abs}(x) + 1$ ,  $h(y) = h(x) - 1$  et si  $y$  n'est fils gauche d'aucun point.
- Ainsi les arcs droits de  $T_{\mathcal{Q}}$  sont des arcs de  $G_{\mathcal{Q}}$ , mais pas nécessairement les arcs gauches. Le graphe  $G_{\mathcal{Q}}$  est un codage trivial de l'animal mais les propriétés du graphe  $T_{\mathcal{Q}}$  sont plus intéressantes.

Remarquons d'abord que tout point de  $\mathcal{Q}$  possède un prédécesseur dans  $T_{\mathcal{Q}}$ , et que ce prédécesseur est unique. De plus on a les propriétés,

LEMME 4.4. *Si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $\mathcal{Q}$  tels que  $\text{abs}(x) = \text{abs}(y) + 1$ , et  $h(y) < h(x)$ , alors il existe un point  $u$  de  $\mathcal{Q}$  tel que  $\text{abs}(u) = \text{abs}(x)$ ,  $h(y) < h(u) \leq h(x)$  et  $y$  est un descendant de  $u$  dans l'arbre  $T_{\mathcal{Q}}$ .*

Preuve. Elle se fait par récurrence sur l'entier  $k$  égal à la différence de hauteur entre  $x$  et  $y$ , c'est-à-dire  $k = h(x) - h(y)$ .

Pour  $k = 1$ , d'après la définition de  $T_{\mathcal{Q}}$ , le sommet  $y$  est fils gauche de  $x$  donc il suffit de prendre  $u = x$ .

Supposons la propriété vraie pour tout couple de points  $x'$  et  $y'$  de  $\mathcal{Q}$  vérifiant les hypothèses de la propriété et tels que  $h(x') - h(y') \leq k$ , et soient  $x$  et  $y$  tels que  $h(x) - h(y) = k + 1$ . Soit  $V$  l'ensemble des points de  $\mathcal{Q}$  défini par,

$$V = \{ v \in \mathcal{Q} / h(y) < h(v) \leq h(x), \text{abs}(v) = \text{abs}(y) \text{ ou } \text{abs}(v) = \text{abs}(x) \}.$$

Le point de  $V$  de hauteur minimale est unique car les hauteurs des points d'abscisses qui diffèrent de un n'ont pas même parité. Soit  $v_1$  ce point. Il y a alors trois cas possibles illustrés par la figure 9.

- cas a)  $v_1 = x$ . Alors par définition de  $T_{\mathcal{Q}}$ , le sommet  $y$  est fils gauche de  $x$ , et la preuve est terminée avec  $u = x$ .
- cas b)  $v_1 \neq x$ . On distingue deux sous-cas selon que  $\text{abs}(v_1) = \text{abs}(x)$  ou  $\text{abs}(v_1) = \text{abs}(y)$ .
  - cas b<sub>1</sub>) Par définition de  $T_{\mathcal{Q}}$  le sommet  $y$  est fils gauche de  $v_1$ , et la preuve est finie avec  $u = v_1$ .
  - cas b<sub>2</sub>) Le sommet  $y$  est alors nécessairement fils droit et soit  $y_1$  son père dans  $T_{\mathcal{Q}}$ .

Le couple formé par  $\{v_1, y_1\}$  vérifie les mêmes hypothèses que le couple  $\{x, y\}$  et  $h(v_1) - h(y_1) < h(x) - h(y)$ . Donc il existe, selon l'hypothèse de récurrence, un sommet  $u$  d'abscisse égale à celle de  $v_1$ , de hauteur vérifiant  $h(y_1) < h(u) \leq h(v_1)$ , et dont  $y_1$  soit le descendant dans  $T_{\mathcal{Q}}$ .

Ce ne peut être que  $v_1$  en raison de la minimalité de la hauteur de ce dernier.

De même le couple formé par  $x_1$  et  $v_1$  vérifie l'hypothèse de récurrence, et donc il existe un sommet  $v_2$  tel que  $\text{abs}(v_2) = \text{abs}(x)$  et  $h(v_1) < h(v_2) \leq h(x)$  et dont  $v_1$  soit le descendant (et donc aussi  $y_1$  et  $y$ ) dans  $T_{\mathcal{Q}}$ , ce qui termine la preuve avec  $u = v_2$ . ■

PROPOSITION 4.5. *Pour tout animal  $\mathcal{Q}$ , le graphe  $T_{\mathcal{Q}}$  est un arbre guingois ayant pour racine la source de  $\mathcal{Q}$ .*

Preuve. a)  $T_{\mathcal{Q}}$  est un arbre. En effet, tout sommet sauf la source de  $\mathcal{Q}$  est l'extrémité d'au plus un arc de  $T_{\mathcal{Q}}$  par construction. Il suffit donc de vérifier que tout sommet est accessible depuis  $s$  par un chemin composé d'arcs de  $T_{\mathcal{Q}}$ . Supposons a contrario qu'il existe des sommets qui ne soient pas accessibles et soit alors un tel sommet à distance minimale de  $s$  dans  $G_{\mathcal{Q}}$ . Soit  $y$  son prédécesseur dans un chemin qui le joint depuis  $s$  dans  $G_{\mathcal{Q}}$ .



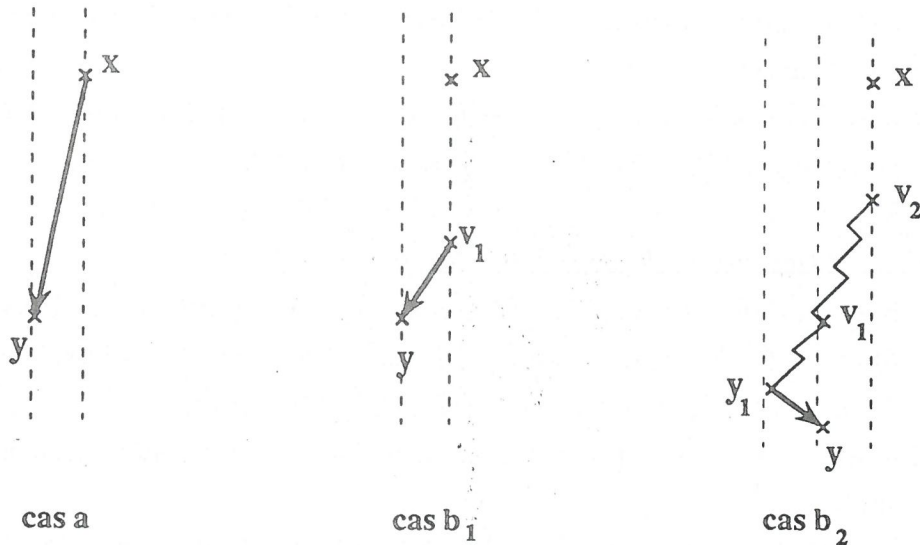


Figure 9.

y est accessible depuis s dans  $T_Q$  car il est à plus proche distance de s que x. Si  $yx$  est un pas Sud-Ouest, alors  $(y,x)$  est un arc de  $T_Q$  et x est accessible dans  $T_Q$ . Sinon  $yx$  est un pas Sud-Est. Si l'arc  $(y,x)$  est dans  $T_Q$  alors x est accessible, sinon il existe un sommet z d'ordonnée supérieure donc plus proche de s dont x est fils gauche dans  $T_Q$ . Donc l'existence de sommet inaccessible dans  $T_Q$  est absurde.

b)  $T_Q$  est un arbre guingois. Supposons le contraire. Il existe alors un point double x ayant y comme fils gauche et z comme fils droit, et tel que le sous-arbre gauche de x ne soit pas une équerre. Ce sous-arbre contient donc un sommet v de départ non négatif par rapport à x, et soit  $v_1$  le premier sommet de départ nul dans le chemin unique joignant y à v dans  $T_Q$ . (voir figure 10)

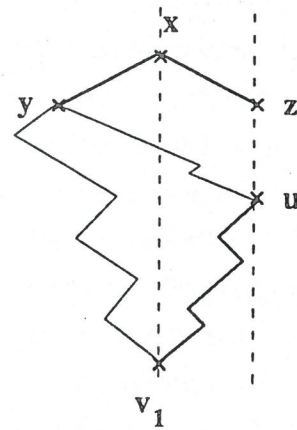


Figure 10.

D'après la propriété 4.4 ci-dessus,  $v_1$  est donc aussi descendant dans  $T_Q$  d'un sommet u tel que  $abs(u) = abs(z)$  et que  $h(v_1) < h(u) \leq h(z)$ .

Comme  $T_Q$  est un arbre, soit y est descendant de u, soit u est descendant de y. La première partie de cette alternative est impossible car  $h(u) \leq h(z) = h(y)$ , et la seconde également car il n'existe pas par hypothèse de sommet de départ nul par rapport à x entre y et  $v_1$ . ■

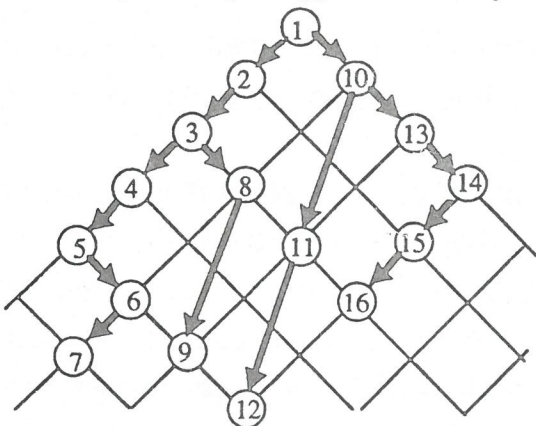


Figure 11. Un arbre guingois associé à un animal dirigé.

La figure 11 ci-contre montre un animal dirigé de 16 sommets et l'arbre guingois associé. Les points de l'animal sont numéroté dans l'ordre préfixe de l'arbre. Remarquons que seuls les arcs gauches sont étirés. Cet arbre a pour code le mot  $x a x a b a \bar{x} a \bar{x} a b a a$ .

La réciproque est vraie, c'est-à-dire qu'à tout arbre guingois T on peut associer un animal Q

tel que  $T=T_{\mathcal{Q}}$ . Considérons la construction suivante qui associe à tout arbre guingois un ensemble de points du plan à une translation près.

LEMME 4.6. Soit  $T$  un arbre guingois dont les sommets  $\{x_i, 1 \leq i \leq n\}$  sont indicés dans l'ordre préfixe, et les ensembles  $\mathcal{Q}_i, 1 \leq i \leq n$ , de points du plan ainsi définis,

$$\mathcal{Q}_1 = \{p_1\} = \{(0,0)\},$$

$$\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{i-1} \cup \{p_i\}, 1 < i \leq n, \text{ où } p_i \text{ est ainsi déterminé:}$$

— si  $x_i$  est fils gauche dans  $T$ ,  $p_i$  est le point du plan tel que  $\text{abs}(p_i) = \text{abs}(p_{i-1}) - 1$ ; s'il y a des sommets  $p_k, 1 \leq k < i - 1$  d'abscisse égale à  $\text{abs}(p_{i-1}) - 1$ , soit  $h_0$  la hauteur minimale de tels sommets, alors on pose  $h(p_i) = \min(h_0, h(p_{i-1})) - 1$ , sinon on pose  $h(p_i) = h(p_{i-1}) - 1$ ,

— si  $x_i$  est fils droit dans  $T$ , soit  $p_j, 1 \leq j < i$ , son père,  $p_i$  est le point du plan tel que  $\text{abs}(p_i) = \text{abs}(p_j) + 1$  et  $h(p_i) = h(p_j) - 1$ ,

alors les ensembles  $\mathcal{Q}_i, 1 \leq i \leq n$ , sont des animaux dirigés à une source et  $i$  points, et tels que  $T_{\mathcal{Q}_i}$  soit exactement le sous arbre de  $T$  déterminé par les  $i$  premiers sommets.

Preuve. Il est clair que les ensembles construits sont des animaux dirigés à une source car tout nouveau point est voisin Sud-Ouest ou Sud-Est d'un point déjà placé. Il faut cependant vérifier que cette construction ne place pas deux points sur le même emplacement, afin que  $\mathcal{Q}_i$  soit bien un animal de  $i$  points, et que  $T_{\mathcal{Q}_i}$  soit bien un sous arbre de  $T$ . C'est une conséquence du lemme suivant. ■

LEMME 4.7. Pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$ , le sommet  $p_i$  ainsi déterminé est de hauteur strictement inférieure à tout sommet  $p_k, 1 \leq k < i$ , d'abscisse égale à l'une des trois suivantes,  $\text{abs}(p_i)$ ,  $\text{abs}(p_i) - 1$  et  $\text{abs}(p_i) + 1$ .

Preuve. Vérifié par vacuité pour  $i=1$ , cet énoncé s'étend par induction de façon immédiate si  $x_i$  est fils gauche, et si  $x_i$  est fils droit de  $x_j, 1 \leq j < i$ , c'est une conséquence de l'ordre préfixe et de la propriété que  $T$  est guingois.

D'où le théorème 4.8.

THEOREME 4.8 Les animaux dirigés à une source et  $n$  points sont en bijection avec les arbres guingois à  $n$  sommets par l'application défini en 4.3.

COROLLAIRE 4.9 Les animaux dirigés à une source et  $n$  points sont codés avec les mots de longueur  $n-1$  du langage  $G$  défini par le système d'équations (6), soit encore avec les facteurs gauches de longueur  $n-1$  du langage de Motzkin.

En conséquence on obtient une nouvelle preuve du dénombrement des animaux à une source ( $[GBV]$ ,  $[Pe]$ ) et des animaux à une source de demi-largeur droite nulle. Ce sont les nombres  $m_n$  et  $g_n$  donnés par les formules (10) et (11).

Une autre conséquence de la construction du lemme 4.6 est de conduire à un algorithme linéaire de construction d'un animal dirigé à partir d'un arbre guingois, ou d'un mot du langage  $G$  qui le code.

*Remarque.* Lorsque on autorise dans un animal un pas diagonal, c'est-à-dire un pas Sud, on obtient ce que l'on appelle animal sur réseau triangulaire. Cette famille d'animaux est en bijection avec une extension des arbres guingois, dans laquelle un sommet point simple peut avoir soit un fils gauche soit un fils droit, soit un fils médian. Par la même démarche que ci-dessus, on montre que les animaux à une source et  $n$  points sur réseau triangulaire sont alors codés par des mots de longueur  $n-1$  d'un langage  $H$  dérivé du langage de Motzkin tricoloré  $M_3$ , sur l'alphabet  $\{x, \bar{x}, a, b, c\}$  et vérifiant,

$$(\mathcal{H}) \begin{cases} H = \varepsilon + a H + b H + c H + x K \bar{x} H \\ K = K_s + K_s a K \\ K_s = \varepsilon + c K_s + a K_s b K_s + a K_s x K \bar{x} K_s \end{cases}$$

et avec les mêmes techniques que celles utilisées dans la paragraphe 3 on montre que les mots de H de longueur n sont en bijection avec les facteurs gauches de Motzkin de longueur n, soit encore les facteurs gauches de Dyck de longueur 2n+1.

## 5. Animaux dirigés et empilements

On a vu au paragraphe précédent une bijection entre les animaux dirigés à une source sur réseau carré et les arbres guingois. Toutefois si l'arbre guingois T se décompose en  $T = \odot \otimes_2 (T_1, T_2)$ , les sous-arbres  $T_1$  et  $T_2$  ne correspondent généralement pas à des parties d'animal qui soient elles-mêmes des animaux. En fait on va montrer qu'elles correspondent à d'autres objets, les *empilements de dominos*, eux-mêmes en bijection avec les animaux.

Les empilements de dominos sont un cas particulier des empilements de pièces introduits par X.G. Viennot (cf [Vi<sub>1</sub>] et [Vi<sub>3</sub>]) et utilisés par l'auteur dans un autre article sur les animaux ([Pe<sub>1</sub>]). En voici un bref aperçu, utilisant les notations introduites dans ce précédent article [Pe].

Considérons dans le plan  $\Pi$  les couples formés de deux points (i,j) et (i+1,j), que l'on appellera *dominos*. Soit  $\delta$  un tel domino que l'on note  $\delta = \langle i, j \rangle$ ; l'entier i est son *abscisse*, l'entier j sa *hauteur* ou *niveau* noté  $h(\delta)$  et le couple (i,i+1) sera appelé sa projection sur  $\mathbb{Z}$  et noté  $\pi(\delta)$ . Soit  $\Sigma$  (respectivement  $\Sigma_n$ ) la famille des ensembles de (resp. n) dominos deux à deux disjoints appelés *systèmes de dominos*. La figure 12 montre trois tels systèmes de dominos. Ces derniers sont représentés par des couples de points dans des petits rectangles pour souligner leur non intersection.

Appellons *déformation élémentaire* toute transformation de  $\Sigma$  dans  $\Sigma$  qui laisse invariants tous les dominos d'un système  $\mathcal{A}$  à l'exception d'un *seul* qui subit une translation verticale telle qu'au cours du mouvement il ne rencontre aucun domino de  $\mathcal{A}$ . Deux systèmes de dominos  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  seront dits équivalents, si l'on passe de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{A}'$  par une suite de déformations élémentaires.

On montre aisément ([Pe]) que dans chaque classe il y a deux éléments distingués uniques, à une translation près,

- l'*empilement* ou système qui minimise la somme, pour tous les dominos qu'il contient, des différences de leur niveau avec le niveau du (ou des) domino(s) de niveau minimal,
- l'*anti-empilement* ou système qui minimise la somme, pour tous les dominos qu'il contient, des différences du niveau du (ou des) domino(s) de niveau maximal avec leur niveau.

Plus visuellement, comme le montre la figure 12, l'empilement consiste à faire tomber les dominos verticalement sur un plancher, et l'anti-empilement à les "gonfler à l'hélium" afin qu'ils aillent se "coller" au plafond, ou à inverser la gravité.



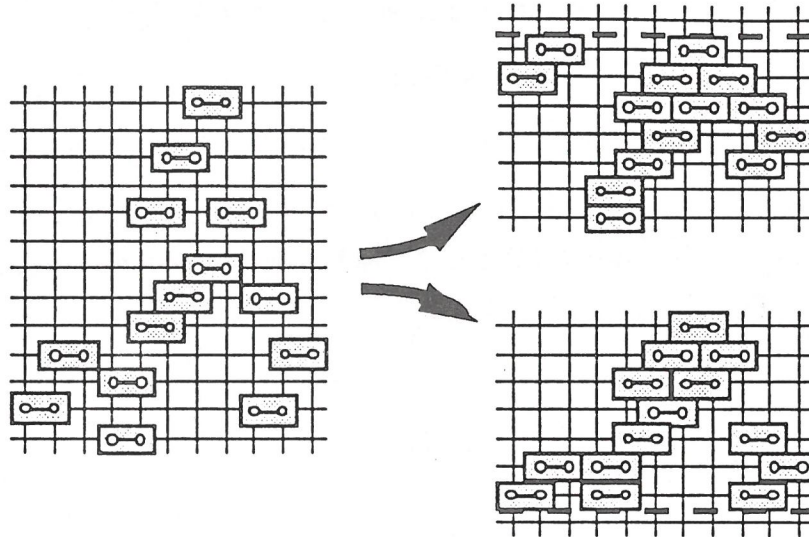


Figure 12. Un système de dominos, l'empilement et l'anti-empilement associé.

Viennot [Vi<sub>3</sub>] a alors défini deux ordres sur les dominos d'un système, qui s'étendent immédiatement, par passage au quotient, aux dominos d'un empilement,

— l'ordre de *dominance* : on dit que le domino  $\delta$  domine directement  $\delta'$  si  $\pi(\delta) \cap \pi(\delta') \neq \emptyset$ ,  $h(\delta) > h(\delta')$  et si  $\delta_1$  est tel que  $\pi(\delta) \cap \pi(\delta_1) \neq \emptyset$ , et que  $\pi(\delta_1) \cap \pi(\delta') \neq \emptyset$  avec  $h(\delta_1) > h(\delta')$  alors  $h(\delta_1) > h(\delta)$ . L'ordre de dominance est la fermeture réflexive et transitive de cette relation notée  $>_d$ . Le système sera dit strict si pour tout couple de dominos distincts  $\delta$  et  $\delta'$  tels que  $\delta >_d \delta'$  et  $\pi(\delta) = \pi(\delta')$ , il existe un domino  $\delta_1$  tel que  $\delta >_d \delta_1 >_d \delta'$  et  $\pi(\delta_1) \neq \pi(\delta)$ .

— l'ordre *canonique*; c'est un ordre total défini par l'algorithme suivant. Soit  $\mathcal{A}$  un système de dominos, et  $\delta$  le domino maximal le plus à gauche (c'est-à-dire d'abscisse minimale). On le numérote 1. En réitérant ce procédé pour le système  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \setminus \{\delta\}$ , on obtient une numérotation canonique, qui vérifie la propriété 5.1 suivante notée  $\text{num}(\delta)$  et telle que  $\text{num}(\delta) \leq \text{num}(\delta')$  si et seulement si  $\delta$  domine  $\delta'$ , sinon  $\delta$  et  $\delta'$  sont incomparables par  $>_d$ , et  $\text{abscisse}(\delta) < \text{abscisse}(\delta')$ .

Un domino  $\delta$  de  $\mathcal{A}$  sera dit *maximal* (respectivement *minimal*) si  $\mathcal{A}$  ne contient aucun domino qui domine (resp. n'est dominé par)  $\delta$ . L'ensemble des dominos dominés par  $\delta$  sera noté  $\text{dom}(\delta)$ . Un système ou empilement n'ayant qu'un domino maximal sera appelé *pyramide*. Enfin on appelle *demi-largeur gauche* d'un système ou d'un empilement la différence entre l'abscisse d'un élément maximal d'abscisse minimale (c'est-à-dire le plus à gauche des éléments maximaux) et celle du domino le plus à gauche. On définit symétriquement la *demi-largeur droite*.

La figure 13 montre un système de 24 dominos et leur numérotation canonique. Les dominos maximaux, en noir, sont les dominos de numéros 1, 3, 7, 12 et 22, et les dominos minimaux sont ceux de numéros 11, 21, 23, 24. Le domino 8 est l'élément d'une sous-pyramide constituée des dominos 8, 9, 10, 11, 17, 20 et 21 colorés en gris. Le système des 24 dominos est de demi-largeur gauche nulle et de demi-largeur droite 1.

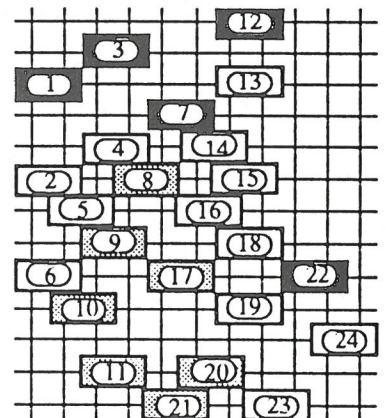


Figure 13

Les empilements de dominos sont en relation avec les animaux par le théorème suivant, illustré par la figure 15,

THEOREME 5.1 (Viennot [Vi3]). *Les animaux à k sources compactes à n points sont en bijection avec les empilements stricts ayant n dominos et dont les dominos maximaux en nombre k sont à projections consécutives .*

L'empilement obtenu est exactement l'élément distingué appelé anti-empilement défini plus haut.

Cette bijection a deux conséquences importantes,

- a) on peut définir la numérotation canonique des points d'un animal comme étant la numérotation canonique des dominos associés dans l'empilement correspondant.
- b) certains sous-ensembles de points d'un animal ne forment pas un animal en raison par exemple de la non connexité, ils peuvent définir cependant un empilement qui est en bijection avec un animal.

Nous allons montrer directement que les empilements à une pièce maximale ou pyramides, sont en bijection avec les arbres guingois, ou avec les mots du langage  $M_2$ , en vérifiant qu'ils satisfont une récurrence de même structure. Pour cela, nous allons utiliser des opérations définies sur les empilements, les opérations  $\Downarrow_{-1}, \Downarrow_0, \Downarrow_{+1}, \Downarrow_{+2}$ , en termes desquelles toute pyramide peut se décomposer en pyramides plus petites, et ce de façon unique. Ce sont des cas particuliers de l'opération de *m-superposition* définie dans [Pe1] et [Pe2].

Intuitivement, l'opération de *m-superposition* de deux empilements  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  consiste à "empiler" au dessus d'un système  $\mathcal{R}_2$  représentant  $\mathcal{E}_2$ , un système  $\mathcal{R}_1$  représentant  $\mathcal{E}_1$ , l'entier  $m$  fixant les positions horizontales relatives des 2 systèmes. La figure 14 montre une 1-superposition.

Plus précisément, on appelle *m-superposition* de  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  l'empilement  $\mathcal{E}_3$  noté  $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_1 \Downarrow_m \mathcal{E}_2$  défini de la manière suivante:

soient deux systèmes  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  représentant  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ ,  $\mathcal{R}_1$  dont le domino maximal le plus à gauche est d'abscisse  $a_1$  et dont le niveau minimal est  $h_1$ , et  $\mathcal{R}_2$  dont le domino maximal le plus à gauche est d'abscisse  $a_2$  et dont le niveau maximal est  $h_2$ , et un entier relatif  $m$ , on définit l'ensemble de dominos

$$\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1 \cup \mathbb{T}_{a_1-a_2+m, h_1-h_2-1}(\mathcal{R}_2)$$

où  $\mathbb{T}_{p,q}$  représente la translation de  $\Pi$  de vecteur  $(p,q)$ . Il est clair que l'ensemble  $\mathcal{R}_3$  est formé de  $p$ -dominos 2 à 2 disjoints et que si  $\mathcal{R}_1$  est équivalent à  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  à  $\mathcal{T}_2$ , alors l'ensemble  $\mathcal{T}_3$  calculé par le même procédé est équivalent à  $\mathcal{R}_3$ . L'empilement  $\mathcal{E}_3$  est défini par la classe de  $\mathcal{R}_3$ .

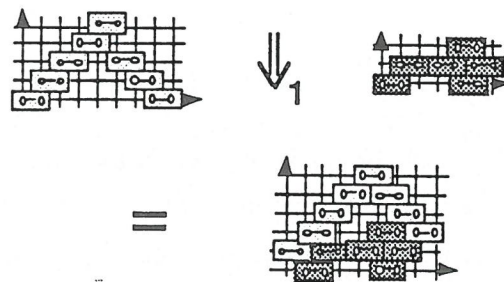


Figure 14. L'opération de *m-superposition*.

Généralement, cette opération est ambiguë, toutefois on a le lemme suivant ([Pe1]),

LEMME 5.2 (dit *lemme de simplification*) .

Si  $\mathcal{E}_1 \Downarrow_m \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2 \Downarrow_m \mathcal{E}_3$  ou  $\mathcal{E}_3 \Downarrow_m \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_3 \Downarrow_m \mathcal{E}_2$  alors  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$  .



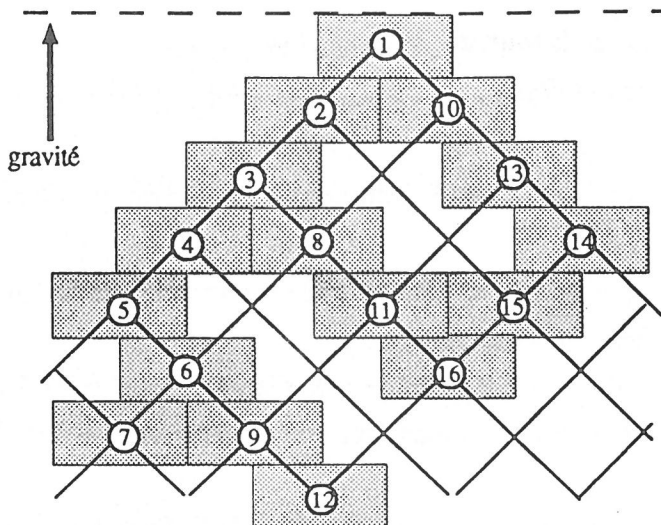


Figure 15. Un animal et l'empilement associé.

**Notations.**

On appelle *demi-pyramide* une pyramide de demi-largeur droite nulle, et *demi-pyramide stricte* une demi-pyramide dont le domino de plus grand numéro est d'abscisse égale à celle du domino maximal le plus à droite des dominos maximaux, et respectivement  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{T}$  les ensembles d'empilements, pyramides, demi-pyramides et demi-pyramides strictes non vides.

Les ensembles  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{T}$  sont en bijection avec respectivement les animaux dirigés à une source, les animaux à une source et de demi-largeur droite nulle, et enfin avec les animaux à une source, de demi-largeur droite nulle et dont le dernier point dans l'ordre canonique a même abscisse que la source.

On notera de plus par la lettre  $\Delta$  un empilement réduit à un domino, ou un animal réduit à point. Enfin on définit la *m*-superposition de deux ensembles d'empilements comme la réunion de toutes les *m*-superpositions d'un empilement du premier sur un empilement du second.

On a alors la proposition suivante, dont la preuve, conséquence de l'ordre canonique et du lemme de simplification, est laissée au lecteur (voir [Pe<sub>2</sub>]).

**PROPOSITION 5.3** *Les ensembles  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{T}$  vérifient le système d'égalités suivantes, où les réunions (notées +) sont disjointes et les produits de superposition non ambigus.*

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \mathbb{P} = \Delta + \Delta \Downarrow_{-1} \mathbb{P} + \Delta \Downarrow_1 \mathbb{P} + \Delta \Downarrow_{-1} (\mathbb{F} \Downarrow_2 \mathbb{P}) \\ \mathbb{F} = \mathbb{T} + \mathbb{T} \Downarrow_{-1} \mathbb{F} \\ \mathbb{T} = \Delta + \Delta \Downarrow_{-1} (\mathbb{T} \Downarrow_1 \mathbb{T}) + \Delta \Downarrow_{-1} (\mathbb{T} \Downarrow_0 (\mathbb{F} \Downarrow_2 \mathbb{T})) \end{cases}$$

A défaut de preuve, illustrons ces égalités par la pyramide de la figure 15 qui représente la pyramide  $\mathcal{P}$  de 16 dominos. Elle se décompose en  $\mathcal{P} = \Delta \Downarrow_{-1} (\mathcal{F}_1 \Downarrow_2 \mathcal{P}_1)$  avec le domino maximal  $\Delta$  égal à 1, la demi-pyramide  $\mathcal{F}_1$  composée des dominos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, et la pyramide  $\mathcal{P}_1$  composée des dominos de 10 à 16. De même  $\mathcal{F}_1$  se décompose en  $\mathcal{T}_2 \Downarrow_{-1} \mathcal{F}_2$ ,  $\mathcal{T}_2$  étant composée des dominos de 3 à 8 et  $\mathcal{F}_2$  du dominos 9.

En comparant cette propriété de décomposition à la proposition 3.4 on est conduit à construire une application  $\Phi$  de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathcal{G}$  qui est une bijection et l'on peut énoncer le théorème,

**THEOREME 5.5** *Les pyramides à n dominos sont en bijection avec les arbres guingois ayant n sommets.*

De plus, on vérifie aisément que dans cette bijection, le sommet de l'arbre de numéro p a un



fils gauche, si et seulement si le domino de la pyramide de numéro  $p$  dans l'ordre canonique domine directement à droite le domino dont l'abscisse est inférieure d'une unité, et ce sommet a un fils droit si le domino de même numéro domine directement le domino  $z$  d'abscisse supérieure d'une unité, et que  $z$  ne soit dominé à droite par aucun domino.

## 6. Conclusion

A l'aide des opérations sur les empilements, nous avons pu définir des grammaires ou systèmes algébriques d'empilements, c'est-à-dire des systèmes d'équations dans l'algèbre des séries formelles en variables munies de commutations. Ces systèmes commencent à être étudiés (cf [DK]). La question d'établir une classification de ces grammaires analogue à celle des grammaires de langage reste ouverte.

De plus, on peut définir dans l'espace 3 types de réseaux, le réseau *cubique*, *cubique centré* et *cubique alterné* (cf [Pe<sub>2</sub>]). A chacun de ces réseaux, l'auteur montre dans [Pe<sub>2</sub>] que l'on peut associer un arbre  $n$ -aire, ( $n=3, 4$  ou  $6$ ), généralisant les arbres guingois et apportant ainsi à l'étude des animaux dans l'espace toute la richesse de l'algorithmique des arbres. Toutefois la caractérisation des langages qui codent ces arbres reste un problème ouvert.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [Ba] R. J. BAXTER, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Acad.Press, New-York, 1982.
- [Be] C. BERGE, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris, 1968.
- [CF] P.CARTIER et D.FOATA, Problèmes combinatoires de commutations et réarrangements, Lectures notes in Maths. n° 85, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [CC] L.CHOTTIN, R. CORI, Une preuve combinatoire de la rationalité d'une série génératrice associée aux arbres, R.A.I.R.O. vol 16, n° 2, (1982), 113-128 .
- [CP] R.CONIL et J.G.PENAUD, Génération aléatoire et dessin d'animaux 2D et 3D, en préparation.
- [DD] M.P. DELEST, S. DULUCQ, Enumeration of directed column-convex animals with given perimeter and area, rapport n° 86-15, Université de Bordeaux I.
- [DN] B. DERRIDA, J.P. NADAL, On a model of directed compact animal, J. Physique Lett. 45 701, 1984.
- [Dh<sub>1</sub>] D. DHAR, Equivalence of the two-dimensional directed animal problem to Baxter hard-square lattice-gas model, Phys. Rev Lett. 49 (1982), 959-962.
- [Dh<sub>2</sub>] D. DHAR, Exact solution of a directed-site animals enumeration in 3 dimensions, Phys. Rev Lett. 59 (1983), 853-856.
- [DPB] D. DHAR, M.K. PHANI, M. BARMA, Enumeration of directed site animals on two-dimensional lattices, J.Phys.A : Math Gen.15, (1982), L 279 -L 284.
- [DK] G. DUCHAMP et D. KROB, L'algèbre de Lie partiellement commutative libre: des bases et des rangs, rapport LITP n° 89-92, Université de Paris VII, 1989.
- [Du] S. DULUCQ, *Etude combinatoire de problèmes d'énumération d'algorithmique sur les arbres et de codage par des mots*, Thèse d'Etat, Université de Bordeaux I, 1987.

- [GBV] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, X.G. VIENNOT, Equivalence of the two dimensional directed animal problem to a one-dimensional path problem, *Advances in Applied Mathematics* 9, 334-357 (1988).
- [Fr] J. FRANÇON, Sur le nombre de registres nécessaires à l'évaluation d'une expression arithmétique, *RAIRO Inf. Th*, vol 18 n°4, (1984), 355-364.
- [HN] V. HAKIM, J.P. NADAL, Exact result for 2D directed lattice animals on a strip of finite width, *J. Phys. A: Math. Gen.* 16 (1983), L 213-L 218.
- [HC] T.HICKEY and J. COHEN, Uniform random generation of strings in a context-free langage, *SIAM J. Comput.*, 12 (1983), 645-655.
- [KI] D.A. KLARNER, My life among polyominoes, in *The Mathematical Gardner*, 243-262, Wadsworth, Belmont CA, (1981).
- [Kn] D. E. KNUTH, *The art of computers programming*, vol. 3, Sorting and Searching, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1973.
- [Lo] M. LOTHAIRE, *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Gian-Carlo Rota ed., Addison-Wesley, Amsterdam.
- [LV] T.C. LUBENSKY et J.VANNIMENUS, Flory approximation for directed branched polymers and directed percolation, *J. Physique*, 43 (1982), L 377 - L 381.
- [NDV] J.P. NADAL, B.DERRIDA, J. VANNIMENUS, Directed lattices animals in 2 dimension: numerical and exact results, *J. Physique* 43 (1982), 1561.
- [Pe<sub>1</sub>] J.G. PENAUD, Une nouvelle bijection pour les animaux dirigés, Actes du 22<sup>ème</sup> Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Publi. Université de Strasbourg, 1989.
- [Pe<sub>2</sub>] J.G. PENAUD, *Arbres et animaux*, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Bordeaux Mai 1990.
- [PS] V. PRIVMAN et N.M. ŠVRAKIC, Directed Models of Polymers, Interfaces, and Clusters: Scaling and finite-size Properties, *Lecture Notes in Physics* 338, Springer Verlag.
- [Sc] M.P.SCHÜTZENBERGER, Certain elementary families of automata, *Proc. Symp. on Mathematical Theory of Automata* (Polytechnic Institute of Brooklyn, 1962), 139-153.
- [Sc] M.P.SCHÜTZENBERGER, Context-free langages and pushdown automata, *Information and Control* 6 (1963), 246-264.
- [Te] H.N.V. TEMPERLEY, *Graph Theory and Applications*, éd. E. Horwood, J. Wiley & Sons.
- [Vi<sub>1</sub>] X.G.VIENNOT, Problèmes combinatoires posés par la physique statistique, Séminaire Bourbaki n° 626, 36<sup>ème</sup> année, in *Astérisque* n°121-122 (1985) 225-246 Soc. Math. France.
- [Vi<sub>2</sub>] X.G. VIENNOT, Enumerative combinatorics and algebraic langages, *Proceedings FCT'85*, ed. L. Budach, *Lecture Notes in Computer Science* n°199, Springer-Verlag, New-York-Berlin, 1985, 450-464.
- [Vi<sub>3</sub>] X.G. VIENNOT, Heaps of pieces, I : Basic definitions and combinatorial lemmas, in *Combinatoire énumérative* eds G. Labelle et P. Leroux, *Lectures Notes in Maths* n° 1234, pp 210-245, , Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Vi<sub>4</sub>] X.G. VIENNOT, *Combinatoire énumérative*, cours ENS Ulm, Paris 1989.