q-ENUMERATION DE POLYOMINOS CONVEXES

Mireille Bousquet-Mélou
LaBRI, Université Bordeaux 1
33405 Talence Cedex, France

INTRODUCTION

Un *polyomino* est une union de *cellules élémentaires* du plan, d'intérieur connexe, et définie à translation près. Il est dit *convexe* lorsque toutes ses intersections avec les lignes $\mathbb{R}\times[j, j+1]$ et les colonnes $[i, i+1]\times\mathbb{R}$ du plan sont aussi convexes (Fig.1).

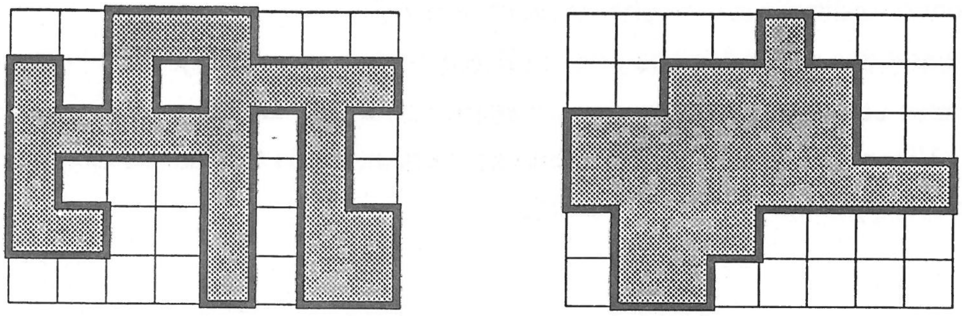

Fig.1. Un polyomino et un polyomino convexe

Nous définissons certaines sous-classes de polyominos convexes: polyominos *parallélogrammes*, polyominos *tas*, polyominos *convexes dirigés*. Cette dernière classe comprend notamment les deux précédentes (Fig.2).

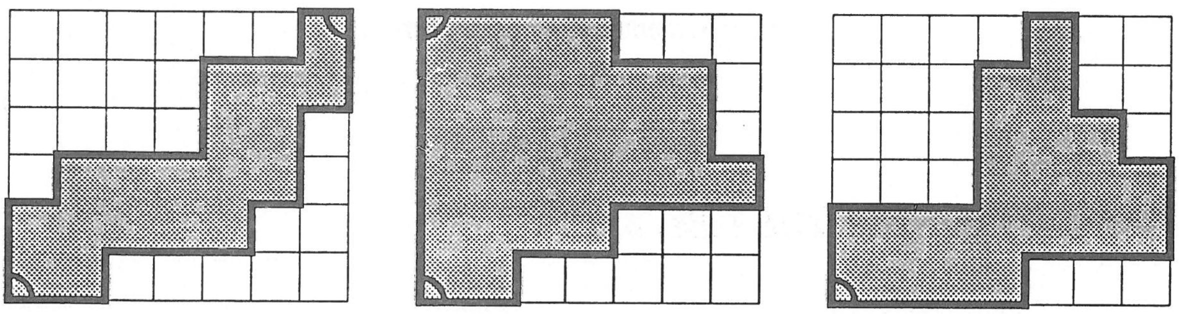

Fig.2.

Polyomino parallélogramme Polyomino tas Polyomino convexe dirigé

L'énumération de ces différentes classes suivant le périmètre, ou suivant la *hauteur* et la *largeur* (c'est à dire le nombre de lignes et de colonnes), est connue et fournit des séries génératrices algébriques. On les obtient notamment comme solutions d'équations algébriques, en employant la *méthodologie de Schützenberger*, qui consiste à coder les objets que l'on cherche à énumérer par les mots d'un *langage algébrique*. Par exemple, le nombre de polyominos convexes de périmètre 2n+8 est (Delest et Viennot [8]):

$$(2n+11)4^n - 4(2n+1)\binom{2n}{n}.$$

Nous nous intéressons ici à l'énumération des polyominos convexes suivant un paramètre supplémentaire, à savoir l'aire du polyomino. On ne disposait jusque là que d'estimations asymptotiques pour le nombre de polyominos convexes d'aire donnée (Bender [1], Klarner et Rivest [10]). Nous abordons ce problème par deux méthodes.

La première est un raffinement de la méthodologie de Schützenberger, introduit par Delest et Fedou [7], et s'inspirant de la notion d'*attribut sémantique*. Cette méthode donne bien, là encore, un système d'équations, mais ce sont des *q-équations*, que l'on ne sait pas systématiquement résoudre. Elles fournissent toutefois certains développements intéressants pour les séries génératrices des polyominos convexes dirigés et des polyominos convexes [2].

La seconde des méthodes que nous utilisons repose sur une bijection entre les polyominos parallélogrammes et certains *empilements de segments* [2] [4]. La notion d'*empilements de pièces*, formalisée par Viennot [11], est une illustration géométrique de la théorie des *monoïdes partiellement commutatifs* développée par Cartier et Foata [5].

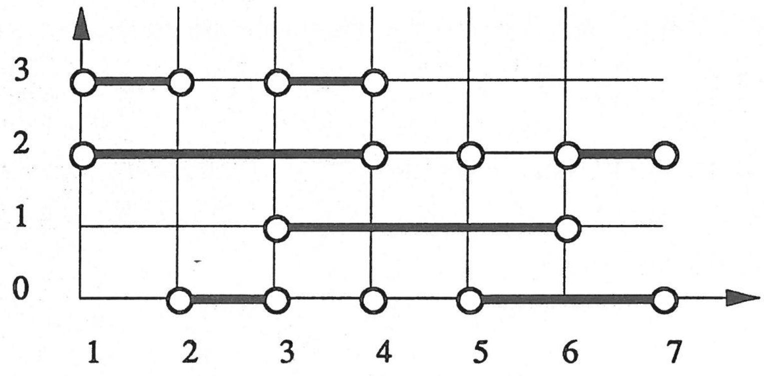

Fig.3. Un empilement de segments

I. METHODOLOGIE DE SCHÜTZENBERGER

Dans sa version la plus simple, elle consiste à construire une bijection (ou *codage*) g entre les objets que l'on veut énumérer et les mots d'un *langage algébrique* $\mathfrak{L}$, de telle sorte que la taille d'un objet donné soit la longueur de son image par g. Si le langage $\mathfrak{L}$ est engendré par une *grammaire algébrique non ambiguë*, la série génératrice formelle $\mathfrak{L}$ des mots de $\mathfrak{L}$, définie par

$$\mathfrak{L} = \sum_{w \in \mathfrak{L}} w$$

satisfait un système d'équations en variables non commutatives. Ceci permet d'écrire ensuite un système d'équations algébriques, dont l'une des composantes de la solution est la série génératrice L des objets étudiés.

C'est un *q-analogue* de cette méthode que nous utilisons pour le dénombrement des polyominos convexes. Ce raffinement a été introduit par Delest et Fedou [7], et utilisé avec succès dans le cadre de l'énumération des polyominos parallélogrammes suivant l'aire et la largeur . Nous prolongeons ce travail en utilisant un codage plus général, défini par Delest [6] pour les polyominos *verticalement convexes*, dont nous déduisons un système de *q-équations aux différences finies*, liant les séries génératrices des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés et convexes, comptés suivant la largeur, la hauteur et l'aire [2] [3].

Proposition 1. *Considérons le système suivant, dans lequel, pour toute série formelle* S *en* x, y *et* q, *on note* S *pour* S(x,y,q) *et simplement* S(xq) *pour* S(xq,y,q):

$$X(x) = \frac{xyq}{1-xq} + \frac{y+X}{1-xq} X(xq),$$

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y_1 \end{pmatrix}(x) = \frac{xyq}{1-xq}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{y+X}{1-xq}\begin{pmatrix} 1 & xq \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ Y_1 \end{pmatrix}(xq),$$

$$\begin{pmatrix} Z \\ Z_1 \\ Z_3 \end{pmatrix}(x) = \frac{xyq}{1-xq}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{y+X}\begin{pmatrix} V^2 \\ VW \\ W^2 \end{pmatrix} + \frac{y}{(1-xq)^2}\begin{pmatrix} 1 & 2xq & x^2q^2 \\ 1 & 1+xq & xq \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ Z_1 \\ Z_3 \end{pmatrix}(xq),$$

où $V = Y - \frac{xyq}{1-xq}$ *et* $W = Y_1 - \frac{xyq}{1-xq}$.

Il existe une unique solution de ce système dont toutes les composantes sont des séries formelles en x, y *et* q. *Si on note* (X, Y, Y_1, Z, Z_1, Z_3) *cette solution, alors* X *(resp.* Y, Z*) est la série génératrice des polyominos parallélogrammes (resp. convexes dirigés, convexes), comptés suivant la largeur, la hauteur et l'aire, par* x, y *et* q *respectivement.*

II. POLYOMINOS PARALLELOGRAMMES ET EMPILEMENTS DE SEGMENTS

Nous décrivons tout d'abord une bijection entre les polyominos parallélogrammes et certains empilements de segments, appelés *demi-pyramides*.

L'intérêt d'une telle bijection provient de l'existence d'un certain nombre de *théorèmes d'inversion*, qui permettent d'énumérer des familles particulières d'empilements. Nous en utilisons ici deux: le premier est une généralisation de l'inversion de Möbius pour les monoïdes partiellement commutatifs [5], et est dû à Viennot [11]. Il permet d'énumérer les empilements dont les pièces *maximales* sont dans un ensemble $\mathcal{M}$ donné. Le second est nouveau et étend le précédent [2]. Il fournit la série génératrice des empilements dont les pièces *maximales* (resp. *minimales*) sont dans un ensemble $\mathcal{M}_1$ (resp. $\mathcal{M}_2$) donné.

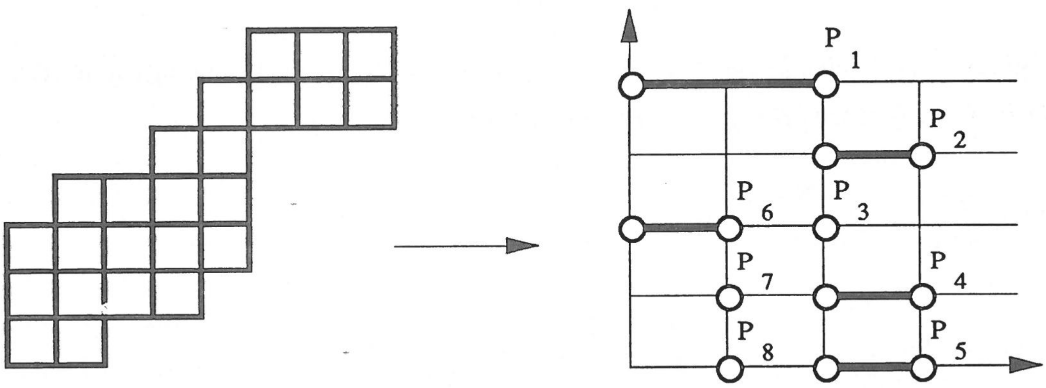

Fig.4. Bijection entre polyominos parallélogrammes et demi-pyramides de segments

Nous retrouvons d'abord ainsi, en le précisant, le résultat de Delest et Fedou [7] [9] relatif à l'énumération des polyominos parallélogrammes.

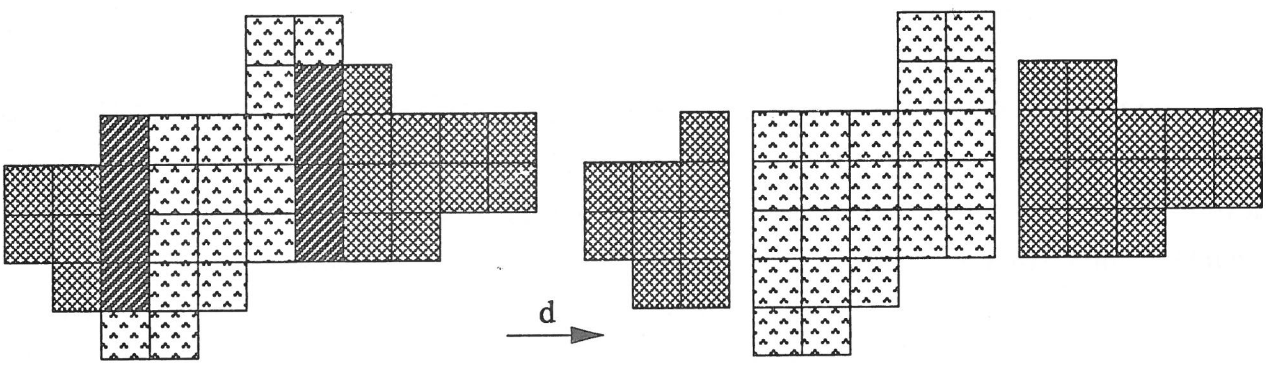

Fig.5. Décomposition d'un polyomino convexe

En faisant ensuite des découpages adéquats des polyominos convexes dirigés et convexes (Fig.5), nous démontrons qu'il suffit, pour les énumérer, de connaître:

- d'une part la série génératrice des polyominos tas de hauteur donnée,
- d'autre part celle des polyominos parallélogrammes dont la hauteur de la première et/ou de la dernière colonne est fixée.

Or, au travers de notre bijection, imposer les hauteurs des colonnes extrémales d'un polyomino parallélogramme équivaut à fixer certaines conditions sur les pièces *maximales* et *minimales* de l'empilement de segments qui lui est associé. Les théorèmes d'inversion dont nous disposons permettent alors de résoudre ce premier problème.

En ce qui concerne l'énumération des polyominos tas, nous démontrons le résultat suivant, dans lequel on utilise les notations classiques de l'étude des séries hypergéométriques basiques.

Pour $n \geq 1$:

$$(a)_n = (1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{n-1}).$$

On convient par ailleurs que $(a)_n = 1$ pour $n \leq 0$.

Lemme 2. *La série génératrice des polyominos tas, comptés suivant la largeur (par* x*), la hauteur (par* y*), et l'aire (par* q*) est:*

$$T = \sum_{n\geq 1} \frac{x y^n q^n T_n}{(xq)_n} \quad ,$$

où T_n *est un polynôme en* x *et* q *à coefficients entiers positifs, défini par la récurrence:*

$$T_0 = 1,$$

$$T_1 = 1, \textit{ et, pour } n \geq 2,$$

$$T_n = 2T_{n-1} + (xq^{n-1} - 1)T_{n-2}.$$

Nous parvenons finalement au résultat ci-dessous.

Proposition 3. *Les valeurs des séries* X(x,y,q), Y(x,y,q) *et* Z(x,y,q) *énumérant respectivement les polyominos parallélogrammes, convexes dirigés et convexes, comptés suivant la largeur (par* x*), la hauteur (par* y*), et l'aire (par* q*) sont:*

$$X = -y\frac{\hat{N}}{N},$$

$$Y = y\frac{R-\hat{N}}{N},$$

$$Z = 2y\,\frac{\left(R-\hat{N}\right)V}{N} - 2yM - B,$$

avec $$N = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_n}, \qquad \hat{N} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1} (yq)_n},$$

$$R = y \sum_{n\geq 2} \left[\frac{x^n q^n}{(yq)_n} \left(\sum_{m=0}^{n-2} \frac{(-1)^m q^{\binom{m+2}{2}}}{(q)_m (yq^{m+1})_{n-m-1}} \right) \right] ,$$

$$V = \sum_{m\geq 0} xq^{m+1} \frac{T_m N_{m+1}}{(xq)_m} , \qquad M = \sum_{0\leq n\leq m} N_{m+1}^{n+1} \frac{T_m T_n}{(xq)_m (xq)_n} ,$$

et enfin

$$B = \sum_{n\geq 1} \frac{xy^n q^n (T_n)^2}{(xq)_{n-1}(xq)_n} .$$

Les polynômes T_n *sont définis dans le lemme ci-dessus.*
Les N_m *sont des polynômes en* x, y *et* q *définis par la récurrence:*

$$N_0 = 0 ,$$

$$N_1 = 1 , \textit{ et, pour } n \geq 2,$$

$$N_n = (1 + y - xq^{n-1})N_{n-1} - yN_{n-2} .$$

Les N_m^n *sont aussi des polynômes en* x, y *et* q. *Ils se déduisent des* N_m *de la façon suivante:*

$$N_m^n = 0 \quad \textit{si} \quad m < n ,$$

$$N_n^n = -xy^{n-1}q^n ,$$

$$N_m^n = x^2 y^{n-1} q^{n+m} N_{m-n}(xq^n) \quad \textit{si} \quad m > n .$$

Remarque. Lorsque y vaut un, la valeur de la série X énumérant les polyominos parallélogrammes est bien celle donnée par Delest, Fedou [7] [9]. Elle fait apparaître de nouveaux q-analogues de fonctions de Bessel.

Toujours lorsque y vaut un, le numérateur de la série Y énumérant les polyominos convexes dirigés est un q-analogue de la partie impaire d'une fonction de Bessel.

III. POLYOMINOS CONVEXES DE LARGEUR DONNEE

Nous nous intéressons ici à la série génératrice des polyominos parallélogrammes, convexes dirigés ou convexes de largeur donnée. Toutes ces séries sont des *fractions rationnelles* en y et q. En utilisant une transformation des demi-pyramides de segments en *arbres binaires*, nous montrons la proposition suivante, dans laquelle $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{n}{i}$.

<u>Proposition 4</u>.

(i) La série génératrice des polyominos parallélogrammes, comptés suivant la largeur, la hauteur et l'aire, par x, y *et* q *respectivement s'écrit:*

$$X(x,y,q)=\sum_{n\geq 1} x^n\, y q^n \frac{\overline{X}_n(y,q)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-yq^k\right)^{\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor}} ,$$

où $\overline{X}_n$ *est un polynôme de* $\mathbb{Z}[y,q]$.

De plus: $\overline{X}_1(y,1)=1,$

et, pour $n\geq 2$, $\overline{X}_n(y,1)=(1-y)^{\sum_{k=2}^{n}\left(\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor-1\right)}\sum_{k=0}^{n-2} y^k \frac{1}{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n-1}{k+1}.$

(ii) La série génératrice des polyominos convexes dirigés, comptés suivant la largeur, la hauteur et l'aire, par x, y *et* q *respectivement s'écrit:*

$$Y(x,y,q)=\sum_{n\geq 1} x^n\, y q^n \frac{\overline{Y}_n(y,q)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-yq^k\right)^{\left\lfloor \frac{n-1}{k}\right\rfloor+1}} ,$$

où $\overline{Y}_n$ *est un polynôme de* $\mathbb{Z}[y,q]$.

De plus: $\overline{Y}_n(y,1)=(1-y)^{\sum_{k=2}^{n-1}\left\lfloor \frac{n-1}{k}\right\rfloor}\sum_{k=0}^{n-1} y^k \binom{n-1}{k}^2 .$

(iii) La série génératrice des polyominos convexes, comptés suivant la largeur, la hauteur et l'aire, par x, y *et* q *respectivement s'écrit:*

$$Z(x,y,q)=\sum_{n\geq 1} x^n\, y q^n \frac{\overline{Z}_n(y,q)}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-yq^k\right)^{\left\lfloor \frac{n-2}{k}\right\rfloor+2}\left(1-yq^n\right)} ,$$

où $\overline{Z}_n$ *est un polynôme de* $\mathbb{Z}[y,q]$.

De plus: $\overline{Z}_n(y,1)=(1-y)^{\sum_{k=1}^{n-2}\left\lfloor \frac{n-2}{k}\right\rfloor}\sum_{k=0}^{n} y^k\left[\frac{n(1+k)-2k}{n}\binom{2n}{2k}-2n\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k}\right] .$

Lorsqu'on se contente d'une énumération des polyominos suivant l'aire, c'est à dire lorsque y vaut un, on obtient, en exploitant directement les formules de la proposition 3, une description beaucoup plus simple du dénominateur de la série génératrice des polyominos (parallélogrammes, convexes dirigés ou convexes) de largeur donnée.

<u>Notations</u>. On désigne par [n]! le q-analogue usuel de n!, soit $(q)_n/(1-q)^n$.
Lorsque $n\leq 0$, on convient que [n]! = 1.

Proposition 5.

(i) La série génératrice des polyominos parallélogrammes, comptés suivant la largeur (par x*) et l'aire (par* q*) s'écrit:*

$$X(x,1,q)=\sum_{n\geq 1} x^n q^n \frac{\hat{X}_n}{(q)_{n-1}(q)_n} ,$$

où $\hat{X}_n$ *est élément de* $\mathbb{Z}[q]$.

(ii) La série génératrice des polyominos convexes dirigés, comptés suivant la largeur (par x*) et l'aire (par* q*) s'écrit:*

$$Y(x,1,q)=\sum_{n\geq 1} x^n q^n \frac{\hat{Y}_n}{(q)_{n-1}(q)_n} ,$$

où $\hat{Y}_n$ *est élément de* $\mathbb{Z}[q]$.

(iii) La série génératrice des polyominos convexes, comptés suivant la largeur (par x*) et l'aire (par* q*) s'écrit:*

$$Z(x,1,q)=\sum_{n\geq 1} x^n q^n \frac{\hat{Z}_n}{[n-2]!\,(q)_{n-1}(q)_n} ,$$

où $\hat{Z}_n$ *est élément de* $\mathbb{Z}[q]$.

Nous ne disposons pas d'une formule explicite pour les numérateurs $\hat{X}_n$, $\hat{Y}_n$ et $\hat{Z}_n$, mais nous avons pu, grâce au logiciel de calcul formel MAPLE, évaluer les premiers d'entre eux. Les résultats obtenus sont remarquables: nous conjecturons, au vu de ces premières valeurs, que ces polynômes sont unimodaux et à coefficients entiers positifs, et que les polynômes $\hat{X}_n$ sont symétriques.

Exemples. Les premières valeurs des polynômes $\hat{X}_n$ sont:

$\hat{X}_1 = 1$,

$\hat{X}_2 = 1$,

$\hat{X}_3 = 1+q+q^2+q^3$,

$\hat{X}_4 = 1+2q+4q^2+6q^3+7q^4+6q^5+4q^6+2q^7+q^8$,

$$\hat{X}_5 = 1+3q+8q^2+17q^3+30q^4+45q^5+58q^6+66q^7+66q^8+58q^9+45q^{10}+30q^{11} \\ +17q^{12}+8q^{13}+3q^{14}+q^{15}.$$

Les premières valeurs des polynômes $\hat{Y}_n$ sont:

$\hat{Y}_1 = 1$,

$\hat{Y}_2 = 1+q$,

$\hat{Y}_3 = 1+3q+3q^2+2q^3+q^4$,

$\hat{Y}_4 = 1+5q+9q^2+14q^3+18q^4+17q^5+13q^6+7q^7+3q^8+q^9$,

$$\hat{Y}_5 = 1+7q+17q^2+37q^3+70q^4+109q^5+147q^6+173q^7+180q^8+165q^9+133q^{10}+ \\ 94q^{11}+57q^{12}+29q^{13}+12q^{14}+4q^{15}+q^{16}.$$

Les premières valeurs des polynômes $\hat{Z}_n$ sont:

$\hat{Z}_1 = 1$,

$\hat{Z}_2 = 1 + 2q + q^2$,

$\hat{Z}_3 = 1 + 6q + 12q^2 + 12q^3 + 7q^4 + 2q^5$,

$\hat{Z}_4 = 1 + 11q + 43q^2 + 95q^3 + 150q^4 + 186q^5 + 181q^6 + 137q^7 + 79q^8 + 33q^9 + 10q^{10} + 2q^{11}$.

REFERENCES

[1] E. BENDER, Convex n-ominoes, Discr. Math. 8 (1974) 219-226.

[2] M. BOUSQUET-MELOU, q-Enumération de polyominos convexes, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, Mai 1991.

[3] M. BOUSQUET-MELOU, Codage des polyominos convexes et équations pour l'énumération suivant l'aire, soumis à publication.

[4] M. BOUSQUET-MELOU, X.G. VIENNOT, Empilements de segments et q-énumération de polyominos convexes dirigés, à paraître dans J. Comb. Th. A.

[5] P. CARTIER, D. FOATA, Problèmes combinatoires de commutations et réarrangements, Lect. Notes in Math. 85, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[6] M.P. DELEST, Generating functions for column-convex polyominoes, J. Comb. Theor. A 48 (1988) 12-31.

[7] M.P. DELEST, J.M. FEDOU, Enumeration of skew Ferrers diagramms, à paraître dans Discr. Math.

[8] M.P. DELEST, X.G. VIENNOT, Algebraic languages and polyominoes enumeration, Theor. Comp. Sci. 34 (1984) 169-206.

[9] J.M. FEDOU, Grammaires et q-énumération de polyominos, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, 1989.

[10] D.A. KLARNER, R.L. RIVEST, Asymptotic bounds for the number of convex n-ominoes, Discr. Math. 8 (1974) 31-40.

[11] X.G. VIENNOT, Heaps of pieces I: Basic definitions and combinatorial lemmas, in *Combinatoire énumérative*, eds. G Labelle et P. Leroux, Lect. Notes in Math. 1234, Springer-Verlag, Berlin, 1986.