

# Énumération de tableaux de Young semi-standard

Seul Hee Choi et Dominique Gouyou-Beauchamps\*

LRI, Bat. 490, Université de Paris XI-Orsay

91405, Orsay Cedex, France

## Abstract

We consider Young tableaux strictly increasing in rows, weakly increasing in columns. We show that the number of such tableaux with entries between 1 and  $n$ , with  $p$  columns having an odd number of elements and having at most  $2k$  rows, is the product:

$$\frac{\binom{n}{p} \binom{2k+p-1}{p}}{\binom{n+2k+p}{p}} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{2k+i+j}{i+j}.$$

The proof is mainly bijective, using configurations of non-crossing paths.

## 1 Introduction

Nous considérons des tableaux de Young semi-standard, c'est-à-dire des tableaux de Young dont les entrées sont dans l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  et qui sont strictement croissants en lignes et non décroissants en colonnes. La figure 1 donne un exemple de cette classe de tableaux.

4				
2	3	5		
1	2	4		
1	2	3	4	5

Figure 1

Gordon [5] a prouvé que le nombre  $a_{n,q}$  de tels tableaux qui ont au plus  $q$  lignes est égal à:

$$a_{n,q} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{q+i+j-1}{i+j-1}. \quad (1)$$

Desainte-Catherine et Viennot [3] ont prouvé une formule similaire pour le nombre  $b_{n,2k}$  de tableaux de Young semi-standard de hauteur bornée par  $q = 2k$  ayant toutes leurs colonnes de hauteur paire:

---

\*Ce travail a été soutenu par le PRC Mathématique-Informatique (CNRS).

$$b_{n,2k} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{2k + i + j}{i + j}. \quad (2)$$

Nous présentons ici une troisième formule de même type pour le nombre  $c_{n,2k,p}$  de tableaux de Young semi-standard de hauteur bornée par  $2k$  ayant  $p$  colonnes de hauteur impaire:

$$c_{n,2k,p} = \frac{\binom{n}{p} \binom{2k+p-1}{p}}{\binom{n+2k+p}{p}} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{2k + i + j}{i + j}. \quad (3)$$

Ce papier, comme celui de Desainte-Catherine et Viennot [3], est motivé par une question de Stanley [9] sur l'existence d'une preuve "naturelle" de (1). En effet la formule (1) est obtenue en posant  $q = 1$  dans le produit donnant la fonction génératrice des partitions planes correspondantes, formule conjecturée par Bender et Knuth [1] et prouvée par Gordon [5].

Le but de notre travail est de montrer que la méthode utilisée par Desainte-Catherine et Viennot pour prouver (2) peut être raffinée pour tenir compte du nombre de colonnes de hauteur impaire, paramètre classique des tableaux de Young, lié aux points fixes des involutions. On retrouve ainsi  $a_{n,2k}$  en sommant les  $c_{n,2k,p}$  suivant les valeurs possibles de  $p$ :  $a_{n,2k} = \sum_{p=0}^n c_{n,2k,p}$ .

## 2 Bijection entre les configurations de chemins de Dyck et les tableaux de Young semi-standard

Soit  $M$  une matrice symétrique  $[n] \times [n]$  d'entiers non négatifs. Une suite décroissante extraite de  $M$  est une suite  $\sigma = (M_{i_1, j_1}, M_{i_2, j_2}, \dots, M_{i_q, j_q})$  de composantes de  $M$  telles que pour tout  $r$ ,  $1 \leq r \leq q - 1$ ,  $M_{i_{r+1}, j_{r+1}}$  est au Sud-Ouest de  $M_{i_r, j_r}$  (i.e.  $i_{r+1} \geq i_r$  et  $j_{r+1} \leq j_r$ ). La valeur d'une suite décroissante est la somme de ses éléments  $M_{i_1, j_1} + M_{i_2, j_2} + \dots + M_{i_q, j_q}$ . La *profondeur* de la matrice  $M$  est le maximum des valeurs de ses suites décroissantes.

A une matrice symétrique  $M$  de profondeur de  $2k$ , on peut associer une involution généralisée:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{pmatrix} \quad (4)$$

où il y a exactement  $M_{i,j}$  occurrences de la paire  $(i, j)$  et où  $u_k \leq u_{k+1}$  et lorsque  $u_k = u_{k+1}$  alors  $v_k \geq v_{k+1}$ .

On peut facilement remarquer que la longueur de la plus longue sous-suite non croissante de  $v_1, v_2, \dots, v_m$  est  $2k$ . Si on considère la valeur du premier élément de toutes les sous-suites non croissantes de longueur  $2k$  de  $v_1, v_2, \dots, v_m$ , on appellera *départ de l'involution* la plus petite de ces valeurs.

On note  $T_{n,h,p}$  l'ensemble des tableaux de Young semi-standard de hauteur  $h$  ayant  $p$  colonnes de hauteur impaire et ses entrées dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ .  $T_{n,h}$  notera l'ensemble des tableaux de  $T_{n,h,p}$  ayant toutes leurs colonnes de hauteur paire.

**Théorème 1 Knuth 1970 [6] et Burge 1974 [2]** *Il existe une bijection entre  $T_{n,2k,p}$  et l'ensemble des matrices symétriques  $[n] \times [n]$  d'entiers non négatifs ayant une profondeur  $2k$  et  $p$  composantes impaires sur la diagonale principale. De plus, si  $P \in T_{n,2k,p}$  correspond à une matrice symétrique  $M$  et si la  $2k^{\text{ème}}$  case de la première colonne de  $P$  contient la valeur  $x$ , alors l'involution associée à  $M$  a un départ égal à  $x$ .*

## 2.1 Un algorithme d'insertion et d'extraction

L'algorithme d'insertion de Knuth-Robinson-Schensted [6] [7] [8], le "bumping process", est habituellement appliqué aux lignes d'un tableau, c'est-à-dire qu'il fait monter dans la ligne supérieure l'élément qui est sorti de la ligne en court. Comme nous allons avoir besoin d'insérer un élément supplémentaire dans un tableau de hauteur  $2k$  sans augmenter la hauteur de celui-ci, nous allons considérer une variante de l'algorithme qui consiste à appliquer le "bumping process" sur les colonnes et non sur les lignes. Ce nouvel algorithme sera appelé INSERT-1.

Sous certaines conditions, cet algorithme permet de faire croître un tableau de Young semi-standard d'une case sans changer sa hauteur ( $2k$ ). Une colonne de hauteur paire inférieure à  $2k$  aura sa hauteur augmentée d'une unité.

Soit  $\delta T$  le tableau obtenu en supprimant la première colonne d'un tableau semi-standard  $T$ . Voici la description récursive de l'algorithme INSERT-1 qui consiste à ajouter au tableau  $T$  un élément  $a$ .

INSERT-1( $T, a$ )

- Si  $a$  est supérieur ou égal à tous les éléments de la première colonne alors on ajoute  $a$  en haut de la première colonne et on termine.
- sinon  $x$  étant le premier élément de la première colonne tel que  $x > a$  lorsqu'on parcourt cette colonne de bas en haut, on met  $a$  à la place de  $x$  et on calcule INSERT-1( $\delta T, x$ ).

On rappelle que, pour les tableaux de Young, nous numérotions les lignes de bas en haut et les colonnes de gauche à droite.

**Théorème 2** *Supposons que l'on insère successivement  $x$  et  $x'$ . Supposons aussi que, par rapport à  $T$ , la case supplémentaire de INSERT-1( $T, x$ ) soit en position  $(l, m)$  et que par rapport à INSERT-1( $T, x$ ), la case supplémentaire de INSERT-1(INSERT-1( $T, x$ ),  $x'$ ) soit en position  $(l', m')$ . Alors  $x > x'$  si et seulement si  $l \geq l'$  et  $m < m'$ .*

**Preuve:** La preuve est totalement symétrique de celle du théorème équivalent donnée par Knuth [6] pour l'algorithme classique.■

On appelle "EXTRACT-1" l'algorithme, inverse de INSERT-1, qui supprime du tableau  $T$  la case en position  $(l, m)$  ( $l$  étant la hauteur de la colonne  $m$ ). Le résultat sera le tableau  $T'$  résultant et la valeur  $a$  qui a été supprimée.

EXTRACT-1( $T, (l, m)$ )

- $a \leftarrow$  la valeur contenue dans la case  $(l, m)$
- on supprime de  $T$  la case en position  $(l, m)$
- Pour  $i$  variant de  $m - 1$  à  $1$  par pas de  $-1$
- Début
- Soit  $(l', i)$  la position de la plus haute case de la  $i^{\text{ème}}$  colonne qui contient une valeur
- $x$  telle que  $x < a$ ,
- on met la valeur  $a$  en position  $(l', i)$
- $a \leftarrow x$
- Fin
- $T'$  est le tableau obtenu et  $a$  contient la valeur supprimée

## 2.2 Bijection entre les tableaux de Young et les empilements semi-standard

Un *chemin de Dyck* de longueur  $2n$  est une suite de points  $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$  de  $N \times N$  telle que  $s_0 = (0, 0)$ ,  $s_{2n} = (2n, 0)$  et telle que, pour  $0 \leq i \leq 2n - 1$ , si  $s_i = (x, y)$  alors  $s_{i+1} = (x + 1, y + 1)$  (pas Nord-Est) ou  $s_{i+1} = (x + 1, y - 1)$  (pas Sud-Est). On peut noter qu'un chemin de Dyck ne passe jamais au dessous de l'axe des  $x$ . Lorsque le point d'arrivée de ce type de chemin n'est pas sur l'axe des  $x$  mais en un point de coordonnées  $(a, b)$ , on parle alors de *facteur gauche* d'un chemin de Dyck de longueur  $a$  arrivant à la hauteur  $b$ .

Pour un facteur gauche de chemin de Dyck de longueur  $2n + 1$  ayant comme point d'arrivée  $(2n + 1, 2p + 1)$ , on définit le *point terminal* comme le premier sommet qui est sur la droite d'équation  $y = -x + 2n + 2$ , lorsqu'on parcourt le chemin selon les abscisses croissantes. Si les coordonnées de ce point terminal sont  $(2n + 2 - h, h)$ , il est bien évident que l'on a la relation  $p < h$ .

Un *empilement* de  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck de longueur  $l$  est un  $k$ -uplets  $(C_1, C_2, \dots, C_k)$  de facteurs gauches de chemins de Dyck vérifiant les deux conditions suivantes:

1. chaque chemin part de  $(0, 0)$ ,
2. pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq k - 1$ ,  $C_j$  est en-dessous de  $C_{j+1}$ , c'est-à-dire que pour toute abscisse  $i$ ,  $0 \leq i \leq l$ , l'ordonnée du  $i^{\text{ème}}$  sommet de  $C_j$  est inférieure ou égale à l'ordonnée du  $i^{\text{ème}}$  sommet de  $C_{j+1}$ .



Un empilement *semi-standard* de  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck de longueur  $2n + 1$  et d'arrivée  $p$  est empilement de  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck de longueur  $2n + 1$  où les  $k - 1$  premiers chemins arrivent au point  $(2n + 1, 1)$  et où le  $k^{\text{ème}}$  chemin arrive au point  $(2n + 1, 2p + 1)$  (cf. figure 2).

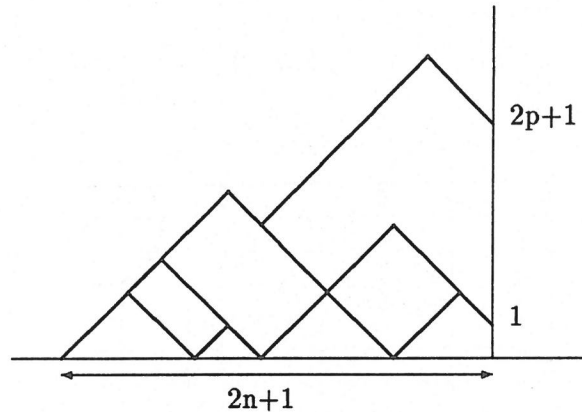


Figure 2. Empilement semi-standard de  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck de longueur  $2n+1$  et d'arrivée  $p$

**Lemme 1** Pour  $0 \leq p < h \leq n + 1$ , à un unique empilement semi-standard de  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck de longueur  $2n + 1$  et d'arrivée  $p$ , le  $k^{\text{ème}}$  chemin ayant un point terminal de coordonnées  $(2n + 2 - h, h)$ , on peut faire correspondre un unique couple  $(E, R)$  où:

- $E$  est un empilement semi-standard de  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck de longueur  $2n + 1$  et d'arrivée 0 dont le  $k^{\text{ème}}$  chemin se termine par un pas Nord-Est suivi de  $h - 1$  pas Sud-Est,
- $R$  est une partie à  $p$  éléments de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, h - 1\}$ .

**Preuve:** Le  $k^{\text{ème}}$  chemin de l'empilement semi-standard des  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck de longueur  $2n + 1$  et d'arrivée  $p$  peut être divisé en deux parties : une partie est le chemin allant de  $(0,0)$  à  $(2n + 2 - h, h)$  et l'autre est le chemin allant de  $(2n + 2 - h, h)$  à  $(2n + 1, 2p + 1)$ .

En ajoutant les  $h - 1$  pas Sud-Est à la première partie, on obtient  $E$ .

Par ailleurs, comme la seconde partie est un chemin qui possède  $p$  pas Nord-Est et  $h - p - 1$  pas Sud-Est, elle peut être représentée par  $R$ , qui est une partie à  $p$  éléments de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, h - 1\}$ , de la façon suivante:

On numérote les pas du chemin de la seconde partie en ordre croissant de 1 à  $h - 1$ , et ensuite, on prend les numéros des pas Nord-Est.

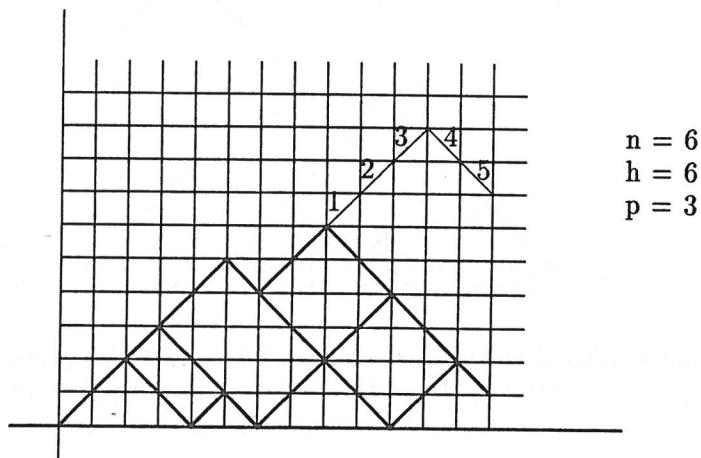
Inversement, pour un couple  $(E, R)$ , on supprime les  $h - 1$  derniers pas du  $k^{\text{ème}}$  chemin de  $E$ , obtenant ainsi un chemin qui se termine au point  $(2n + 2 - h, h)$ . On peut alors décrire le chemin allant de  $(2n + 2 - h, h)$  à  $(2n + 1, 2p + 1)$  en utilisant  $R$  de la façon suivante:

Pour  $1 \leq i \leq h - 1$ ,

Si  $i$  appartient à  $R$ , le  $i^{\text{ème}}$  pas est un pas Nord-Est,

Sinon le  $i^{\text{ème}}$  pas est un pas Sud-Est.

On obtient donc un empilement semi-standard de  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck de longueur  $2n + 1$  et d'arrivée  $p$ , le  $k^{\text{ème}}$  chemin ayant  $(2n + 2 - h, h)$  comme point terminal (cf. figure 3). ■



longueur des chemins de Dyck:  $2n+1=13$   
 le point terminal:  $(2n+2-h, h)=(8,6)$   
 $R = \{1,2,3\}$

Figure 3. Décomposition du chemin de Dyck et le couple  $\{E,R\}$

Pour un facteur gauche de chemin de Dyck, on appelle *creux* un point qui est à la fois arrivée d'un pas Sud-Est et origine d'un pas Nord-Est. Un empilement semi-standard de  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck de longueur  $2n + 1$  sera dit *exact* si le  $k^{\text{ème}}$  chemin possède au moins un creux, c'est-à-dire s'il n'est pas le chemin constitué de  $n + 1$  pas Nord-Est suivis de  $n$  pas Sud-Est.

**Lemme 2** *A un empilement semi-standard exact de  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck de longueur  $2n+1$  et d'arrivée 0 dont le  $k^{\text{ème}}$  chemin se termine par un pas Nord-Est suivi de  $h-1$  pas Sud-Est, on peut faire correspondre de façon unique une matrice symétrique  $[n] \times [n]$  de profondeur  $2k$ . De plus l'involution associée à cette matrice aura un départ égal à  $h$ .*

**Preuve:** On peut construire la matrice en utilisant l'algorithme suivant:

- Début
- Initialiser la matrice  $M$  à zéro
- Pour  $p$  variant de 1 à  $k$
- Début

- Pour chaque point creux  $c$  du  $p^{\text{ème}}$  chemin
- Début
- soit  $(x, y)$  la position de  $c$
- $i \leftarrow n + 1 - \frac{(x-y)}{2}$
- $j \leftarrow n + 1 - \frac{(x+y)}{2}$
- $M_{i,j} \leftarrow M_{i,j} + 1$
- $M_{j,i} \leftarrow M_{j,i} + 1$
- Fin
- Fin
- Fin

Il est facile de constater qu'une suite décroissante extraite de la matrice correspond à un chemin n'empruntant que des pas Nord-Est et Nord-Ouest sur la grille où est tracé l'empilement. La valeur de la suite décroissante est égal à deux fois le nombre de points creux rencontrés par le chemin.

Si on considère deux facteurs gauches de chemins de Dyck de longueur  $2n + 1$  qui ne se coupent pas, pour tout creux  $c$  du chemin supérieur, il existe un creux  $c'$  du chemin inférieur tel que  $c'$  puisse être joint à  $c$  par un chemin n'empruntant que des pas Nord-Est et Nord-Ouest. En utilisant cette remarque de façon itérative, on vérifie facilement que la profondeur de la matrice est  $2k$  et que l'involution associée a un départ égal à  $h$ . ■

**Théorème 3** *Il existe une bijection entre  $T_{n,2k,p}$  et l'ensemble des empilements semi-standard exacts de  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck de longueur  $2n + 1$  et d'arrivée  $p$ .*

**Preuve:** Soit  $E$  un empilement semi-standard exact de  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck de longueur  $2n + 1$  et d'arrivée  $p$ . Le lemme 1 permet de lui faire correspondre un couple  $(E, R)$  où:

- $E$  est un empilement semi-standard exact de  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck de longueur  $2n + 1$  et d'arrivée 0 dont le  $k^{\text{ème}}$  chemin se termine par un pas Nord-Est suivi de  $h - 1$  pas Sud-Est,
- $R$  est une partie à  $p$  éléments de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, h - 1\}$ .

A  $E$ , le lemme 2 permet de faire correspondre une matrice  $M$  symétrique  $[n] \times [n]$  de profondeur  $2k$ . De plus l'involution associée à cette matrice aura un départ égal à  $h$ .

A  $M$ , le théorème 1 fait correspondre un tableau de Young  $T$  semi-standard de hauteur  $2k$  ayant toutes ses colonnes de hauteur paire. De plus  $T$  aura  $h$  comme valeur dans la  $2k^{\text{ème}}$  case de sa première colonne.

Enfin si on insère dans  $T$  les  $p$  éléments de  $R$  (qui sont tous strictement inférieur à  $h$ ) par ordre décroissant en utilisant l'algorithme INSERT-1, le théorème 2 affirme que l'on obtiendra un tableau de Young semi-standard de hauteur  $2k$  ayant  $p$  colonnes de hauteur impaire.

Toutes les étapes de cette preuve étant bijectives, on obtient alors la bijection annoncée. ■

### 3 Enumération

Dans cette partie, nous allons énumérer les tableaux de Young semi-standard de hauteur bornée par  $2k$  dont les entrées sont dans  $\{1,2,\dots,n\}$  ayant  $p$  colonnes de hauteur impaire. Le paragraphe précédent n'étudiait que les tableaux de hauteur exactement  $2k$  et les empilements exacts. Nous devons donc nous intéresser ici aux empilements exacts ou non, puisque l'absence de creux sur le chemin supérieur indique que le tableau correspondant sera de hauteur paire strictement inférieure à  $2k$ .

#### 3.1 Déterminants de la matrice des nombres de Delannoy

On considère la matrice infinie  $A$  construite à partir des nombres de Delannoy (ou "ballot numbers"):

$$A = (a_{i,j})_{i \geq 0, j \geq 0}$$

où si  $i$  et  $j$  sont même parité et si  $i \geq j$ , alors  $a_{i,j} = (j+1) \frac{i!}{(\frac{i+j}{2}+1)!(\frac{i-j}{2})!}$ , et  $a_{i,j} = 0$  sinon.

On note  $A \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_k \end{pmatrix}$  le déterminant formé par le mineur extrait de  $A$ , où  $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$  et  $0 \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k$  sont respectivement les indices des lignes et des colonnes du mineur.

Le terme  $(i,j)$  de la matrice  $A$  est le nombre de facteurs gauches de chemins de Dyck allant du point de coordonnées  $(\alpha_k - \alpha_i, 0)$  au point de coordonnées  $(\alpha_k, \beta_j)$  ou également le nombre de facteurs gauches de chemins de Dyck allant de  $(0,0)$  à  $(\alpha_i, \beta_j)$ .

Une configuration de  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck ne se coupant pas est un  $k$ -uplet  $(C_1, C_2, \dots, C_k)$  de facteurs gauches de chemins de Dyck vérifiant les deux conditions suivantes:

1. pour toute paire de chemins  $(C_i, C_j)$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ ,  $C_i$  et  $C_j$  n'ont aucun point en commun,
2. pour  $1 \leq i \leq k$ ,  $C_i$  relie le point  $(a_i, 0)$  au point  $(a, b_i)$  avec  $0 \leq a_k < a_{k-1} < \dots < a_1 \leq a$  et  $0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k$ .

En utilisant la méthodologie de Gessel et Viennot [4], le déterminant  $A \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_k \end{pmatrix}$  peut être interprété comme le nombre de configurations de  $k$  facteurs gauches de chemins de Dyck ne se coupant pas, le chemin  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , reliant le point  $(\alpha_k - \alpha_i, 0)$  au point  $(\alpha_i, \beta_i)$ .

Notons  $D_{n,k}$  le déterminant  $A \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n+3 & \dots & 2n+2k-1 \\ 1 & 3 & \dots & 2k-1 \end{pmatrix}$

$D_{n,k}$  compte les configurations de  $k$  chemins de Dyck ne se coupant pas où le  $i^{\text{ème}}$  chemin,  $1 \leq i \leq k$ , relie le point  $(2k - 2i, 0)$  au point  $(2n + 2k - 1, 2i - 1)$  (cf. figure 4). Pour une configuration de cet ensemble, si on translate le  $i^{\text{ème}}$  chemin,  $1 \leq i \leq k$ , de  $2k - 2$  pas vers l'Ouest et de  $2i - 2$  pas vers le Sud après lui avoir supprimé  $2i - 2$  pas Nord-Est au début, on obtient un empilement semi-standard de  $k$  facteurs gauches de longueur  $2n+1$  et d'arrivée 0.

Donc  $D_{n,k}$  compte aussi les empilements semi-standard de  $k$  facteurs gauches de chemin de Dyck de longueur  $2n+1$  et d'arrivée 0.

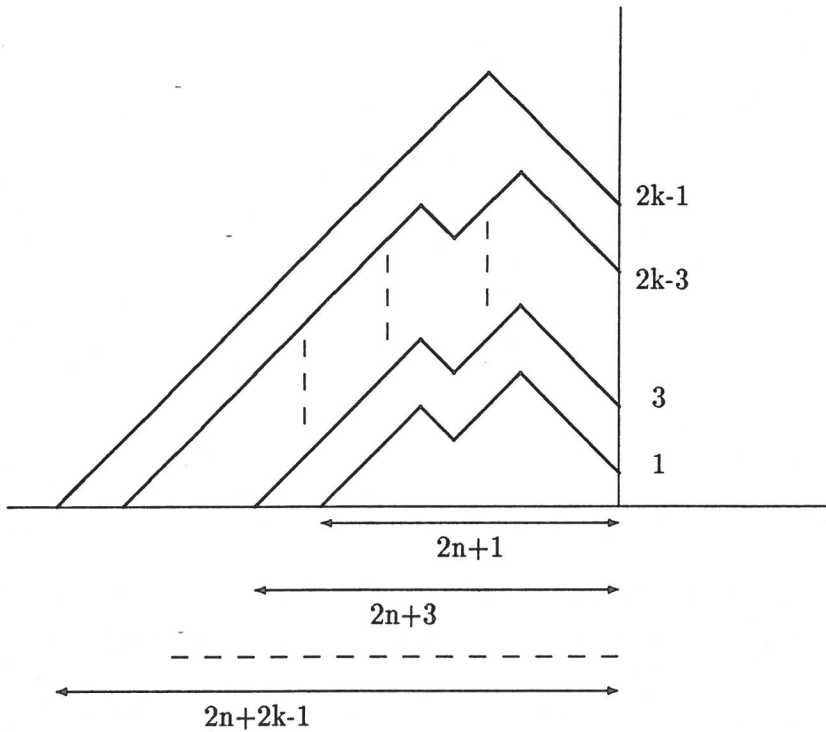


Figure 4

De même, on note  $D_{n,k,p}$  le déterminant  $A \begin{pmatrix} 2n+1 & \dots & 2n+2k-3 & 2n+2k-1 \\ 1 & \dots & 2k-3 & 2k+2p-1 \end{pmatrix}$ .

$D_{n,k,p}$  compte donc les configurations de  $k$  chemins de Dyck ne se coupant pas où le  $i^{\text{ème}}$  chemin,  $1 \leq i \leq k - 1$ , relie le point  $(2k - 2i, 0)$  au point  $(2n + 2k - 1, 2i - 1)$  et où le  $k^{\text{ème}}$  chemin relie le point  $(0, 0)$  au point  $(2n + 2k - 1, 2k + 2p - 1)$  (cf. figure 5). Pour les mêmes raisons que ci-dessus,  $D_{n,k,p}$  compte aussi les empilements semi-standard de  $k$  facteurs gauches de chemin de Dyck de longueur  $2n+1$  et d'arrivée  $p$ .



Pour calculer la valeur de  $D_{n,k,p}$ , nous allons utiliser des déterminants de Hankel de nombres de Catalan et l'interprétation combinatoire du qd-algorithme donnée par Viennot [10].

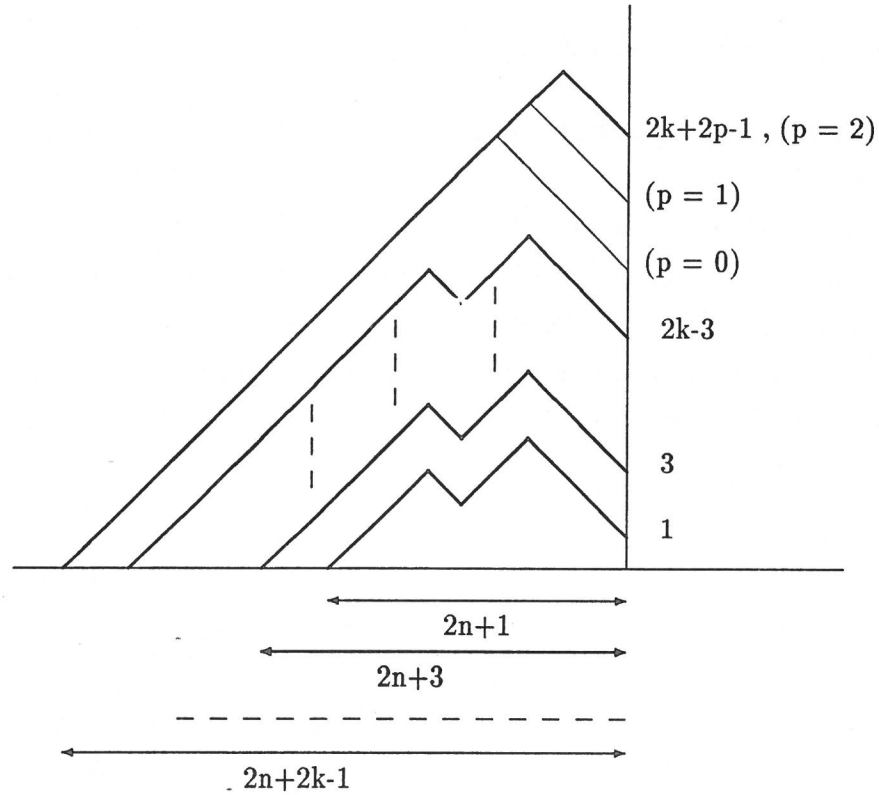


Figure 5

### 3.2 Déterminants de Hankel et nombres de Catalan

Soit  $\mu = \{\mu_n\}_{n \geq 0}$  une suite des nombres réels. On considère la matrice infinie  $H(\mu) = (\mu_{i+j})_{0 \leq i,j}$ . Un déterminant de Hankel est un mineur de  $H(\mu)$ . Un tel déterminant sera noté

$H \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \end{pmatrix}$  en désignant par  $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$  et  $0 \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k$  les indices respectifs des lignes et colonnes du mineur extrait.

Nous allons prendre comme suite  $\mu$  la suite des nombres de Catalan  $C = \{C_n\}_{n \geq 0}$ , où  $C_m$  est le  $m^{\text{ème}}$  nombre de Catalan  $\frac{(2m)!}{m!(m+1)!}$ .

On note  $H_{n,k,p}(C)$  le déterminant de Hankel tiré de  $H(C)$ :

$$H \begin{pmatrix} n+1 & n+2 & \dots & n+k-1 & n+k \\ n+1 & n+2 & \dots & n+k-1 & n+k+p \end{pmatrix}.$$

Comme dans la section précédente, on peut interpréter  $H_{n,k,p}(C)$  comme un nombre de configurations de chemins de Dyck en utilisant le théorème de Gessel et Viennot [4]. Plus précisément,  $H_{n,k,p}(C)$  est égal au nombre de  $k$ -uplets  $(w_1, w_2, \dots, w_k)$  de facteurs gauches de chemins de Dyck deux à deux disjoints tels que pour  $i, 1 \leq i \leq k-1$ ,  $w_i$  relie  $(-n-2i+1, 0)$  à  $(n+2i-1, 0)$  et  $w_k$

relie  $(-n - 2k + 2, 0)$  à  $(n + 2k + 2p - 2, 0)$ . Pour  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $w_i$  a une longueur de  $2n + 4i - 2$  et  $w_k$  a une longueur de  $2n + 4k + 2p - 2$  (cf. figure 6).

On le notera  $H_{n,k}(C)$  le déterminant  $H_{n,k,0}(C)$ . On peut vérifier facilement que  $H_{n,k}(C) = D_{n,k}$  en se reportant aux configurations qu'ils énumèrent.

Pour calculer  $H_{n,k,p}(C)$ , nous allons nous ramener à des configurations plus simples à énumérer en contractant les configurations de départ suivant la technique du qd-algorithme présentée par Viennot [10].

### 3.3 qd-algorithme et calcul de déterminant

Nous allons rappeler les grandes lignes de l'interprétation combinatoire de la qd-transformation que l'on trouvera décrite en détail dans Viennot [10].

Soit  $r = \{r_k\}_{k \geq 1}$  une suite de réels. Cette suite permet de valuer les pas élémentaires d'un chemin de Dyck  $w = (s_0, s_1, \dots, s_{2n})$  de la façon suivante:

- un pas Sud-Est allant du niveau  $k$  au niveau  $k - 1$ ,  $1 \leq k \leq n$ , est valué  $r_k$ ,
- un pas Nord-Est est valué 1.

La valuation  $V(w)$  du chemin est alors le produit des valuations de ses pas élémentaires  $\prod_{0 \leq i \leq 2n-1} V(s_i, s_{i+1})$ . On peut ainsi définir la fonction génératrice  $s(t; r) = \sum_{n \geq 0} b_n t^n$  où  $b_n$  est égal à  $\sum_{|w|=2n} V(w)$ .

La suite  $r' = \{r'_k\}_{k \geq 1}$  est la qd-transformée de la suite  $r$  (pour simplifier,  $r' = \text{qd}(r)$ ) si  $s(t; r) = 1 + r_1 t s(t; r')$ .

On peut calculer  $r'$  à partir de  $r$ , en utilisant la règle du losange ("Rhombus rules"):

$$\begin{aligned} r_{2k+1} + r_{2k+2} &= r'_{2k} + r'_{2k+1}, \\ r_{2k} r_{2k+1} &= r'_{2k-1} r'_{2k}. \end{aligned}$$

On peut donc calculer le coefficient de  $t^n$  dans la série  $s(t; r)$  en calculant les valuations de tous les chemins de Dyck de longueur  $2n - 2$  (en utilisant  $r'$ ) ou en calculant les valuations de tous les chemins de Dyck de longueur  $2n$  (en utilisant  $r$ ). L'utilisation de  $r'$  permet donc de contracter de deux pas les chemins à calculer.

Le qd-algorithme est obtenu en appliquant une suite de qd-transformations à une suite de départ  $r = \{r_k^{(0)}\}_{k \geq 1}$ . Pour  $n \geq 0$ ,  $r^{(n+1)}$  est obtenu à partir de  $r^{(n)}$  par  $r^{(n+1)} = \text{qd}(r^{(n)})$  en notant  $r^{(n)}$  la suite  $\{r_k^{(n)}\}_{k \geq 1}$ .

On constate alors que  $s(t; r) = 1 + \sum_{n \geq 1} (\prod_{0 \leq j \leq n-1} r_1^{(j)}) t^n$

et donc que  $b_n = \prod_{0 \leq j \leq n-1} r_1^{(j)}$ . On peut aussi vérifier que  $s(t; r^{(n)}) = \sum_{k \geq 0} \frac{b_{k+n}}{b_n} t^k$ .

Dans notre cas, nous allons utiliser comme suite  $\{r\}$  la suite  $\{1\}$  dont tous les éléments sont égaux à 1. On peut alors établir que  $r_{2k}^{(n)} = \frac{2k(2k+1)}{(n+2k)(n+2k+1)}$  et  $r_{2k+1}^{(n)} = \frac{(2n+2k-1)(2n+2k)}{(n+2k-1)(n+2k)}$ .

Notons  $C^{(n)}$  la suite  $\{C_i^{(n)}\}_{i \geq 0}$  et  $C_i^{(n)}$  le nombre  $C_{i+n}$ .

Dans ce cas, toujours selon [10], si on applique  $n + 1$  qd-transformations aux configurations de chemins associées à  $H_{n,k,p}(C)$ , on obtient les relations:

$$H_{n,k,p}(C) = H_{-1,k,p}(C^{(n+1)}) \tag{5}$$

$$H_{n+1,k,p}(C) = H_{0,k,p}(C^{(n+1)}), \tag{6}$$

et si on note  $\bar{C}^{(n)}$  la suite  $\{\bar{C}_i^{(n)}\}_{i \geq 0}$  où  $\bar{C}_i^{(n)} = C_{i+n}/C_n$ , on obtient aussi:

$$H_{n,k,p}(C) = (C_{n+1})^k H_{-1,k,p}(\bar{C}^{(n+1)}) \tag{7}$$

$$H_{n+1,k,p}(C) = (C_{n+1})^k H_{0,k,p}(\bar{C}^{(n+1)}). \tag{8}$$

$H_{-1,k,p}(\bar{C}^{(n+1)})$  peut être interprété comme le nombre de configurations de  $k$ -uplets  $(w_1, w_2, \dots, w_k)$  de chemins de Dyck deux à deux disjoints tel que, pour  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $w_i$  relie  $(2 - 2i, 0)$  à  $(-2 + 2i, 0)$  et  $w_k$  relie  $(2 - 2k, 0)$  à  $(-2 + 2k + 2p, 0)$ . On peut les considérer comme des configurations contractées de  $2n + 2$  pas, mais ayant des poids différents sur les pas unitaires (donnés par  $r^{(n+1)}$ ) (cf. figures 7 et 8).

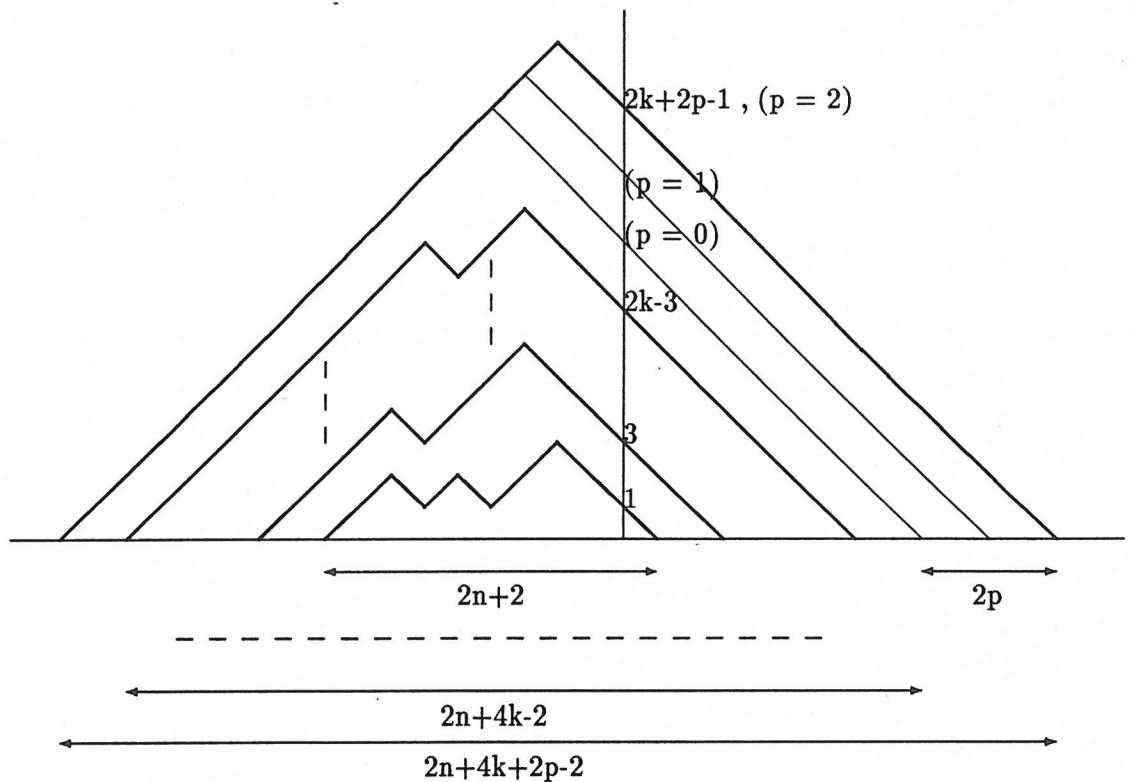


Figure 6

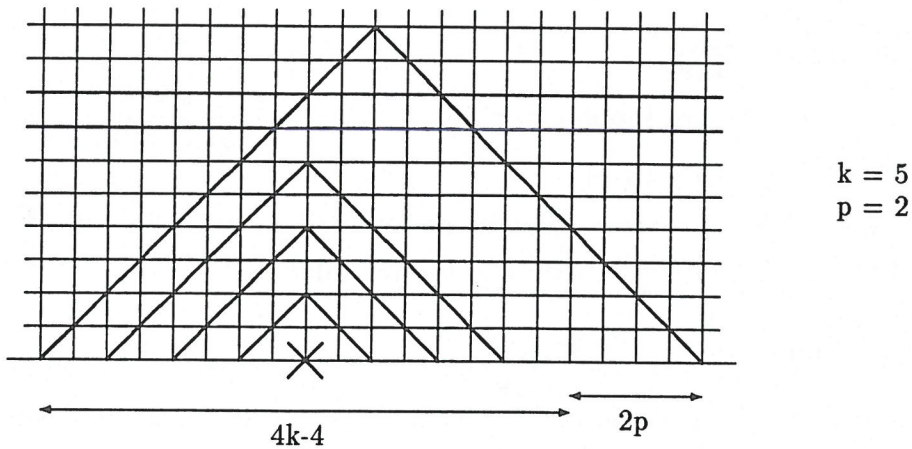


Figure 7

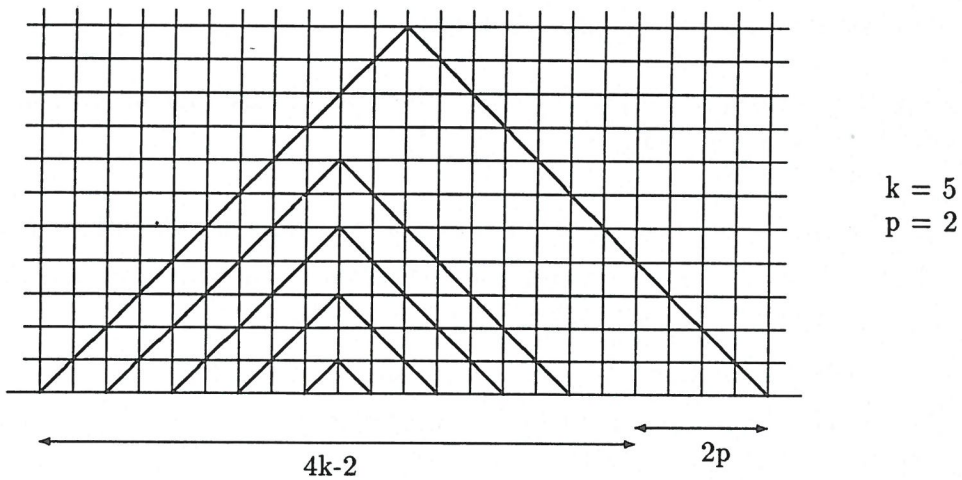


Figure 8

Dans le cas où  $p$  est égal à zéro, il n'y a qu'une configuration de chemin possible pour  $H_{-1,k}(\overline{C}^{(n+1)})$ . La valuation de cette configuration a été calculée par Desainte-Catherine et Viennot [3]:

$$\begin{aligned}
 D_{n,k} = H_{n,k}(C) &= (C_{n+1})^k H_{-1,k}(\overline{C}^{(n+1)}) = (C_{n+1})^k (r_1^{(n+1)} r_2^{(n+1)})^{k-1} \dots (r_{2k-3}^{(n+1)} r_{2k-2}^{(n+1)}) \\
 &= \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{2k+i+j}{i+j}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Mais, dans le cas général où  $p \neq 0$ , il y a plusieurs configurations pour  $H_{-1,k,p}(\overline{C}^{(n+1)})$ .

**Théorème 4**  $H_{n,k,p}(C)$  est égal à  $D_{n,k} \prod_{i=0}^{p-1} \frac{(2k+2i)(2n+2k+2i+1)}{(i+1)(n+2k+i+1)}$ .



**Preuve:**

Notons  $\alpha_{n,k,p}$  le rapport  $\frac{H_{n,k,p}(C)}{H_{n,k}(C)}$ .

Nous avons vu ci-dessus que ce rapport se réduit à  $\alpha_{n,k,p} = \frac{H_{-1,k,p}(\overline{C}^{(n+1)})}{H_{-1,k}(\overline{C}^{(n+1)})}$ .

Alors  $\alpha_{n,k,p}(\prod_{i=1}^{2k-2} r_i^{(n+1)}) = \sum_w V(w)$ ,

où la sommation est prise sur tous les chemins de Dyck allant de  $(0, 2k - 2)$  à  $(2k - 2 + 2p, 0)$ , un pas Sud-Est allant du niveau  $k$  au niveau  $k - 1$  étant valué  $r_k^{(n+1)}$ .

Pour la même raison,

$\alpha_{n+1,k,p}(\prod_{i=1}^{2k-1} r_i^{(n+1)}) = \sum_w V(w) = \frac{H_{-1,k,p}(\overline{C}^{(n+2)})}{H_{-1,k}(\overline{C}^{(n+2)})} = \frac{H_{0,k,p}(\overline{C}^{(n+1)})}{H_{0,k}(\overline{C}^{(n+1)})}$ , où la sommation est prise sur tous les chemins de Dyck allant de  $(0, 2k - 1)$  à  $(2k - 1 + 2p, 0)$ , un pas Sud-Est allant du niveau  $k$  au niveau  $k - 1$  étant valué  $r_k^{(n+1)}$ .

Pour calculer la valuation d'un chemin de Dyck de longueur  $2k + 2p - 2$  allant de  $(0, 2k - 2)$  à  $(2k - 2 + 2p, 0)$ , nous allons considérer le premier pas de ce chemin:

1. soit le chemin commence par un pas Nord-Est valué 1, suivi par un chemin de longueur  $2k + 2p - 3$  allant de  $(1, 2k - 1)$  à  $(2k - 2 + 2p, 0)$ ,
2. soit le chemin commence par un pas Sud-Est valué  $r_{2k-2}^{(n+1)}$ , suivi par un chemin de longueur  $2k + 2p - 3$  allant de  $(1, 2k - 3)$  à  $(2k - 2 + 2p, 0)$ .

On suppose, par hypothèse de récurrence sur  $l$ , que la la somme des valuations des chemins de Dyck allant de  $(0, 2h + 1)$  à  $(2l + 1, 0)$ , un pas Sud-Est allant du niveau  $k$  au niveau  $k - 1$  étant valué  $r_k^{(n+1)}$  est égale à:  $\prod_{i=0}^{l-h-1} \frac{(2h+2i+2)(2n+2h+2i+5)}{(i+1)(n+2h+i+4)} \prod_{j=1}^{2h+1} r_j^{(n+1)}$ .

Pour la première classe de chemins, la somme des valuations est donc

$\prod_{i=0}^{p-2} \frac{(2k+2i)(2n+2k+2i+3)}{(i+1)(n+2k+i+2)} (\prod_{j=1}^{2k-1} r_j^{(n+1)})$  et pour la deuxième classe  $r_{2k-2}^{(n+1)} \prod_{i=0}^{p-1} \frac{(2k+2i-2)(2n+2k+2i+1)}{(i+1)(n+2k+i)} (\prod_{j=1}^{2k-3} r_j^{(n+1)})$ .

La valuation cherchée est donc la somme des deux valuations:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=0}^{p-2} \frac{(2k+2i)(2n+2k+2i+3)}{(i+1)(n+2k+i+2)} (\prod_{j=1}^{2k-1} r_j^{(n+1)}) + r_{2k-2}^{(n+1)} \prod_{i=0}^{p-1} \frac{(2k+2i-2)(2n+2k+2i+1)}{(i+1)(n+2k+i)} (\prod_{j=1}^{2k-3} r_j^{(n+1)}) \\ &= \prod_{j=1}^{2k-2} r_j^{(n+1)} \left( \frac{(2n+2k+1)(2n+2k+2)}{(n+2k)(n+2k+1)} \prod_{i=0}^{p-2} \frac{(2k+2i)(2n+2k+2i+3)}{(i+1)(n+2k+i+2)} + \prod_{i=0}^{p-1} \frac{(2k-2+2i)(2n+2k+2i+1)}{(i+1)(n+2k+i)} \right) \\ &= \prod_{j=1}^{2k-2} r_j^{(n+1)} \prod_{i=0}^{p-1} \frac{(2k+2i)(2n+2k+2i+1)}{(i+1)(n+2k+i+1)} \end{aligned}$$

Or cette valuation est aussi égale à  $\alpha_{n,p,k} \prod_{j=1}^{2k-2} r_j^{(n+1)}$ .

Pour les longueurs impaires, la démonstration est identique, l'hypothèse de récurrence étant que la somme des valuations des chemins allant de  $(0, 2h + 2)$  à  $(2l + 2, 0)$ , un pas Sud-Est allant du niveau  $k$  au niveau  $k - 1$  étant valué  $r_k^{(n+1)}$ , est égale à:  $\prod_{i=0}^{l-h-1} \frac{(2h+2i+4)(2n+2h+2i+5)}{(i+1)(n+2h+i+5)} \prod_{j=1}^{2h+2} r_j^{(n+1)}$ .

On obtient donc:

$$H_{n,k,p}(C) = H_{n,k}(C) \alpha_{n,p,k} = D_{n,k} \alpha_{n,p,k}. \blacksquare$$

**Théorème 5**  $D_{n,k,p}$  est égal à  $D_{n,k} \prod_{i=0}^{p-1} \frac{(2k+i)(n-i)}{(i+1)(n+2k+i+1)}$ .



**Preuve:**

Si on remarque qu'une configuration comptée par  $H_{n,k,p}(C)$  est un couple formé par une configuration comptée par  $D_{n,k,l}$ ,  $0 \leq l \leq p$ , et un facteur gauche de chemin de Dyck de longueur  $2k + 2p - 1$  reliant  $(0, 0)$  à  $(2k + 2p - 1, 2k + 2l - 1)$ , on obtient la relation:

$$H_{n,k,p}(C) = \sum_{l=0}^p a_{2k+2p-1, 2k+2l-1} D_{n,k,l}.$$

Connaissant  $H_{n,k,p}(C)$  et, par hypothèse de récurrence, les  $D_{n,k,l}$ , pour  $0 \leq l \leq p$ , on peut calculer  $D_{n,k,p}$  par la relation:

$$D_{n,k,p} = H_{n,k,p}(C) - \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(2k+2l)(2k+2p-1)!}{(2k+p+l)!(p-l)!} D_{n,k,l}$$

Si l'on suppose que  $D_{n,k,l} = D_{n,k} \prod_{i=0}^{l-1} \frac{(2k+i)(n-i)}{(i+1)(n+2k+i+1)}$ , il suffit de vérifier l'identité:

$$\prod_{i=0}^{p-1} \frac{(2k+i)(n-i)}{(i+1)(n+2k+i+1)} = \prod_{i=0}^{p-1} \frac{(2k+2i)(2n+2k+2i+1)}{(i+1)(n+2k+i+1)} - \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(2k+2l)(2k+2p-1)!}{(2k+p+l)!(p-l)!} \prod_{i=0}^{l-1} \frac{(2k+i)(n-i)}{(i+1)(n+2k+i+1)}, \quad (10)$$

La vérification de l'égalité (10) peut facilement être faite avec l'aide du système de calcul formel Maple. ■

Avec les cinq théorèmes précédents, on peut alors établir le résultat annoncé:

**Théorème 6**  $D_{n,k,p} = c_{n,2k,p} = \frac{\binom{n}{p} \binom{2k+p-1}{p}}{\binom{n+2k+p}{p}} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{2k+i+j}{i+j}.$

## 4 Références

- [1] E.A.BENDER et D.E.KNUTH, Enumeration of plane partitions, J. Combinatorial Th. (A), 13 (1972) 40-54.
- [2] W.H.BURGE, Four Correspondences Between Graphs and Generalized Young Tableaux, J. Combinatorial Th. (A) 17 (1974) 12-30.
- [3] M.DESAINTE-CATHERINE et G.VIENNOT, Enumeration of certain Young tableaux with bounded height, Lecture Notes in Mathematics, 1234 (1986) 58-67.
- [4] I.GESSEL and G.VIENNOT, Binomial determinants, paths, and hook length formulae, Advances in Math., 58 (1985) 300-321.
- [5] B.GORDON, Cité dans Stanley [6], p. 265.
- [6] D.E.KNUTH, Permutations, matrices and generalized Young tableaux, Pacific J. Math., 34 (1970) 709-727.
- [7] G.de B.ROBINSON, On the representations of the symmetric group, Amer. J. Math. 60 (1938) 745-760; 69 (1947) 286-298; 70 (1948) 277-294.
- [8] C.SCHENSTED, Longest increasing and decreasing subsequences, Canad. J. Math 13 (1961) 179-191.
- [9] R.STANLEY, Theory and application of plane partitions, Part 2, Studies in applied Math., 50 (1971) 259-279.
- [10] G.VIENNOT, A combinatorial interpretation of the quotient-difference algorithm, technical report N°8611, Université de Bordeaux I, 1986.

