Auto-similarité dans la combinatoire des polynômes orthogonaux.

Ivan Constantineau
Institut für Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung I
Martensstraße 3, D–8520 Erlangen

Résumé. Dans cet article nous construisons des structures combinatoires invariantes sous l'action d'une permutation donnée. Dans certains cas, le poids de ces dernières correspond à des polynômes orthogonaux dont on a ajusté convenablement les paramètres. On examine ici de ces structures associées aux polynômes d'Hermite, Laguerre, Krawtchouk, Meixner, Meixner-Pollaczek, et de Jacobi.

§ 0 Introduction

Dans cet article, nous calculons le poids de structures ("combinatoires") laissées fixes sous l'action d'une permutation β donnée en nous servant d'une méthode que nous appellons le *principe d'autosimilarité* (voir [2], [3], [4], [5]). Plus précisément, nous calculons, pour des espèces de structures pondérées $\mathbf{F}$ associées à certaines familles de polynômes orthogonaux, le poids, que nous dénotons $fix(\mathbf{F}[\beta])$, de toutes les $\mathbf{F}$—structures fixées par β.

Le § 1 est consacré à la description de ce principe de même qu'aux notations et définitions de base de la théorie des espèces pondérées qui nous seront utiles.

Dans le § 2, nous appliquons le principe à deux espèces particulières, dénotées $\mathbf{H1}$ et $\mathbf{H2}$, qui engendrent toutes deux la famille des polynômes d'Hermite (sans toutefois être isomorphes). Les espèces $\mathbf{H1}$ et $\mathbf{H2}$ sont dotées d'une propriété remarquable: on peut utiliser les polynômes d'Hermite, en ajustant convenablement leurs paramètres, pour exprimer $fix(\mathbf{H1}[\beta])$ et $fix(\mathbf{H2}[\beta])$.

Dans le § 3 nous introduisons une famille infinie d'espèces $\{\mathbf{L}^{[k]}\}_{k\geq 1}$, toutes associées aux polynômes de Laguerre. Lorsque $k = 1$ nous exprimons, de la même manière que pour les espèces $\mathbf{H1}$ et $\mathbf{H2}$, les termes $fix(\mathbf{L}^{[1]}(\beta))$ à l'aide des polynômes de Laguerre.

Les exemples donnés dans les § 2 et § 3 illustrent suffisamment bien la méthode pour se permettre de donner sans preuve des résultats analogues pour diverses espèces associées à des polynômes orthogonaux. On trouvera une description sommaire de quelques-unes de ces espèces à la table 1 et les fix correspondants à la table 2.

A l'exception des coefficients calculés pour l'espèce $\mathbf{H1}$ [ce dernier calcul est inédit], tous les résultats que nous présentons peuvent être retrouvés dans la thèse de doctorat de Décoste [8] qui les a obtenus d'une toute autre manière en s'appuyant sur des méthodes propres à la théorie des espèces de structure.

§ 1 Espèces pondérées et auto-similarité

Soit R un anneau commutatif unitaire de caractéristique nulle. Une *espèce de structures R—pondérée*, $\mathbf{F} = (F, w_{\mathbf{F}})$ (voir [8], [15], [19]), est une règle qui associe à tout ensemble fini U, un couple $(F[U], w_{\mathbf{F}})$ où $F[U]$ est un ensemble fini de *F-structures* sur U et où $w_{\mathbf{F}}$ est une *fonction de poids* qui assigne à chaque F-structure s un poids $w_{\mathbf{F}}(s) \in R$ (on utilise aussi la notation $|s|_{\mathbf{F}} = w_{\mathbf{F}}(s)$ pour désigner le poids de s). De plus, si U et V sont deux ensembles finis et si $f: U \to V$ est une bijection, alors $\mathbf{F}$ détermine, par définition, une bijection $F[f]: F[U] \to F[V]$ préservant les poids telle que

(i) pour tout ensemble fini U, $F[1_U] = 1_{F[U]}$, et

(ii) pour tout triplet (U, V, W) d'ensembles finis et toute paire de bijections $f: U \to V$, $g: V \to W$, on a $F[gf] = F[g]F[f]$. On appelle $F(f)$ le *transport (des F-structures) le long de f.*

Dans le texte qui suit, à moins d'avis contraire, le terme espèce signifiera toujours espèce R-pondérée. De même, on transportera toujours les F—structures s sur U le long de f en réétiquettant tout point $u \in s$ par $f(u) \in \mathbf{F}[f](s)$. Lorsque les F—structures sont des *endofonctions* ϕ cela signifie que l'on conjuge ϕ avec f, c'est-à-dire que $\mathbf{F[f]}(\phi) = \mathbf{f}\phi\mathbf{f^{-1}}$.

Pour toute espèce $\mathbf{F} = (F, w_\mathbf{F})$ et tout ensemble fini U, on pose

$$|\mathbf{F}[U]| = \sum_{s \in F[U]} w_\mathbf{F}(s).$$

La *série génératrice exponentielle* $\mathbf{F}(x)$ d'une espèce $\mathbf{F}$ est définie par la formule suivante:

$$\mathbf{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbf{F}[n]| \frac{x^n}{n!},$$

où $[n] = \{1, \ldots, n\}$, si $n \geq 1$, et $[0] = \emptyset$. La série $\mathbf{F}(x)$ est appelée la *cardinalité* de F.

Pour toute espèce F, nous dirons que l'espèce F *engendre* la suite $\{f_n\}_{n \geq 0} = \{|\mathbf{F}[n]|\}_{n \geq 0}$ de ses coefficients et qu'elle est *associée* à la suite $\{f_n\}$[1]. Soulignons ici que deux espèces distinctes peuvent très bien engendrer la même suite de coefficients.

Dans notre article nous ne considérons que des espèces F qui engendrent des suites de polynômes orthogonaux particuliers, a savoir les polynômes d'Hermite, Laguerre, Meixner, Meixner-Pollaczek, Krawtchouk et Jacobi. L'anneau R entrant en jeu dans la définition d'espèce R-pondérée peut être fixé ici comme étant l'anneau de polynômes $R = \mathbf{C}[t, a, p, \alpha, \beta, \gamma, \phi, \kappa]$ où C est l'ensemble des nombres complexes et où $t, a, p, \alpha, \beta, \gamma, \phi, \kappa$ sont des indéterminées.

Pour toute espèce $\mathbf{F} = (F, w_\mathbf{F})$, le transport donné par F permet de traiter les F-structures à isomorphisme près. Si n est un entier naturel et si β est une permutation de $[n]$ alors $F[\beta]$ est une permutation de $F[n]$. On pose alors $Fix(F[\beta]) = \{s \in F[n]: F[\beta](s) = s\}$ et $fix(F[\beta]) = |Fix(F[\beta])|$. Pour tenir compte du poids des structures de $Fix(F[\beta])$ on définit maintenant

$$fix(\mathbf{F}(\beta)) = \sum_{s \in Fix(F[\beta])} w_\mathbf{F}(s). \tag{1}$$

Le but de notre article consiste à calculer, pour certaines espèces associées aux polynômes orthogonaux déjà mentionnés, les coefficients donnés par (1) en nous servant de ce que nous avons désigné par le principe d'auto-similarité.

Convenons, pour tout entier naturel n et toute permutation β de $[n]$ de dénoter par $\mathbf{C}(\beta)$ l'ensemble des cycles sous-jacents à la permutation β.

Le principe d'auto-similarité. Soit $\mathbf{F} = (F, w_\mathbf{F})$ une espèce pondérée. On dit que l'espèce F est *auto-similaire*, ou simplement *similaire*, si, pour tout entier n et toute permutation β de $[n]$, l'ensemble $Fix(F[\beta])$ des F-structures laissées fixes par β est isomorphe à un certain ensemble de couples (δ, Δ) où

$$\delta \in F[\mathbf{C}(\beta)],$$

[1] **Remarque.** On dit habituellement que l'espèce F est un *modèle combinatoire* pour la suite $\{|\mathbf{F}[n]|\}_{n\geq 0}$. Cependant, comme nous l'a fait remarquer V.Strehl [28], cette dernière définition n'est peut-être pas vraiment appropriée. Par exemple, soit $Q=\{Q_n\}_{n\geq 0}$ une suite arbitraire (indicée par l'ensemble des entiers ≥ 0) dans l'anneau R. Définissons l'espèce pondérée $\mathrm{Exp}_Q=(\mathrm{Exp},w_Q)$ où Exp est l'espèce uniforme ordinaire (i.e. pour tout ensemble fini U, $\mathrm{Exp}[U]=\{U\}$) en posant, pour tout ensemble fini U, $w_Q(\{U\})= Q_{|U|}$. L'espèce Exp_Q est, par définition, un modèle combinatoire pour la suite Q. Mais, outre le fait que $\mathbf{Exp}_Q(x)$ soit la série génératrice de Q, on ne voit guère en quoi l'espèce $\mathbf{Exp}_Q$ peut servir de "modèle combinatoire". Ce dernier terme devrait être réservé aux espèces pour lesquelles les mots "modèles" et "combinatoires" ont un certain sens (qui reste à préciser).

voilà pourquoi nous disons "auto-similaire") et où Δ est une construction particulière qui dépend de δ.

Ce principe, tel qu'énoncé, n'a évidemment rien de définitif et quelques remarques s'imposent son sujet.

1) Une des idées centrales qui justifient son application systématique dans les calculs du nombre e structures fixées par une permutation vient de ce que pour toute permutation β (de $[n]$) et toute ous-espèce F (ordinaire) de l'espèce des relations binaires, si $x \in C \in \mathrm{C}(\beta)$, $y \in D \in \mathrm{C}(\beta)$ et si $x, y) \in R \in fix(F[n])$ alors pour tout entier k, on a $(\beta^k(x), \beta^k(y)) \in R$. En effet, toute relation R ans $F[\beta]$ induit une relation $R^\sharp$ sur les cycles de β en posant

$$(C, D) \in R^\sharp \Leftrightarrow \exists x \in C, \exists y \in D \; tels \; que \; (x, y) \in R.$$

Aais si, de plus, on a $R \in Fix(F[\beta])$, la construction de $R^\sharp$ se "régularise" et il suffit alors d'examiner ? en *un seul* point fixé de C (par exemple le minimum de C) pour déterminer $R^\sharp$ sur tous les points e C (il suffit de tourner la manivelle!). La relation $R^\sharp$ hérite dans ce cas de certaines propriétés e R qui font en sorte qu'elle est ***à peu près*** de même espèce sur $\mathrm{C}(\beta)$ que ne l'est la relation R ur $[n]$ dont elle est induite.

2) Nous avons défini l'auto-similarité sans y faire intervenir le poids des structures concernées. Cependant, comme le suggèrent les résultats obtenus dans le présent article, il y a tout probablement eu de continuer à explorer ce (vaste) terrain et de formuler une version plus forte qui tient compte e la pondération. En effet, pour la plupart des espèces $\mathbf{F}$ que nous traitons ici, on a non seulement ue l'ensemble des $\mathbf{F}$—structures fixées par β est isomorphe à un ensemble de couples (δ, Δ) où $\in F[\mathrm{C}(\beta)]$, mais on a aussi que l'on peut ajuster les paramètres des polynômes (les poids) dont 'espèce $\mathbf{F}$ est génératrice pour exprimer explicitement $fix(\mathbf{F}[\beta])$.

§ 2 Espèces associées aux polynômes d'Hermite

On peut définir les polynômes d'Hermite, $H_n(t)$, en posant

$$\sum_{n \geq 0} H_n(t) \frac{x^n}{n!} = \exp\left(2tx - x^2\right).$$

)éfinition 1.(Voir [9]) On définit l'espèce $\mathbf{H1} = (H1, w_{\mathbf{H1}})$ en posant, pour tout ensemble fini U,

$$H1[U] = \left\{\rho \in \Sigma(U) | \rho^2 = \rho\right\},$$

ù $\Sigma(U)$ est le groupe symétrique sur U et où, pour toute involution ρ dans $H1[U]$,

$$w_{\mathbf{H1}}(\rho) = (2t)^{pf(\rho)}(-2)^{co(\rho)},$$

ù $pf(\rho)$ et $co(\rho)$ signifient respectivement le nombre de points fixes et de couples ρ.

'roposition 2. Pour tout entier $n \geq 0$ on a

$$H_n(t) = |\mathbf{H1}[n]|.$$

'reuve. Voir [1,8,9]. □

Soit $\tau \in Fix(H1[\beta])$, $x \in C \in \mathrm{C}(\beta)$ et $\tau(x) = y \in D \in \mathrm{C}(\beta)$. Alors $\tau\beta = \beta\tau$ et, pour)ut entier k, on a $\tau(\beta^k(x)) = \beta^k(y)$. Ainsi, $\tau(C)$ est complètement déterminé par $\tau(x)$ (où x est arbitrairement fixé dans C). On peut donc fabriquer une endofonction δ ($= \delta_\tau$) bien définie sur $\mathbb{C}(\beta)$ en posant, pour tous cycles C, D dans $\mathbb{C}(\beta)$,

$$\delta(C) = D \Leftrightarrow \exists x \in C, \exists y \in D, \ \tau(x) = y. \tag{2}$$

La fonction δ est une *involution* de $\mathbb{C}(\beta)$. En effet, si $x \in C$ et $\tau(x) = y \in D$ alors $\tau(y) = x$ et ainsi on a bien $\delta(C) = D$ ssi $\delta(D) = C$. De plus, puisque τ est une endofonction injective de $[n]$, si $\delta(C) = D$ alors on a $|C| = |D|$.

L'involution τ induit aussi une fonction $\Delta(= \Delta_\tau)$: $\mathbb{C}(\beta) \to [n]$ que l'on définit, pour tout C dans $\mathbb{C}(\beta)$ par la formule suivante:

$$\Delta(C) = \tau(\min(C)).$$

Soit $x \in C \in \mathbb{C}(\beta)$. Alors $\tau(x) \in \delta(C)$. Si $\tau(x) = x$ alors $\Delta(C) = \min(C)$. Sinon, soit que $\tau(x) \in C$ et alors $|C|$ est pair et $\Delta(C) = \beta^{|C|/2}(\min(C))$ soit que $\tau(x) \in D \neq C$ et alors on a que $\Delta(C)$ peut être arbitrairement choisi dans D. Dans ce dernier cas, si $\Delta(C) = y$ et si k est un entier tel que $\tau^k(y) = \min(D)$ alors, évidemment, $\Delta(D) = \tau^k(\min(C))$. C'est-à-dire que $\Delta(C)$ détermine entièrement $\Delta(D)$.

Nous venons de montrer que toute involution τ de $[n]$ invariante sous conjugaison avec β détermine un unique couple (δ, Δ) satisfaisant certaines propriétés. L'intérêt de cette construction vient de ce qu'elle est bijective. En effet $Fix(H1[\beta])$ est isomorphe à l'ensemble de tous les couples (δ, Δ) où $\delta \in H1[\mathbb{C}(\beta)]$ est telle que $\forall C, D \in \mathbb{C}(\beta)$, $\delta(C) = D \Rightarrow |C| = |D|$ et oùΔ: $\mathbb{C}(\beta) \to [n]$ satisfait les propriétés suivantes:

a. $\forall C, D \in \mathbb{C}(\beta)$, $\Delta(C) \in \delta(C)$.

b. $\forall C \in \mathbb{C}(\beta)$, *si* $\delta(C) = C$ *et*

- (i) $|C|$ *est impair, alors* $\Delta(C) = \min(C)$,
- (ii) $|C|$ *est pair, alors* $\Delta(C) = \min(C)$ *ou* $\Delta(C) = \beta^{|C|/2}(\min(C))$.

c. $\forall C, D \in \mathbb{C}(\beta)$, *si* $\delta(C) = D \neq C, \Delta(C) = y \in D$, *et si* $k \in \mathbb{N}$ *est tel que* $\beta^k(y) = \min(D)$, *alors* $\Delta(D) = \beta^k(\min(C))$.

Nous dénotons ce dernier ensemble par $Sim(H1, \beta)$. On a alors une bijection Γ_{H1},

$$\Gamma_{H1}: Fix(H1[\beta]) \to Sim(H1, \beta),$$

$$\tau \mapsto (\delta_\tau, \Delta_\tau),$$

dont l'inverse ${\Gamma_{H1}}^{-1}$ peut être décrite de la manière suivante: pour tout $(\delta, \Delta) \in Sim(H1, \beta)$, ${\Gamma_{H1}}^{-1}(\delta, \Delta) = \tau$ si, et seulement si, pour tout $C \in \mathbb{C}(\beta)$ et tout $x \in C$,

$$\beta^k(\min(C)) = x \Rightarrow \tau(x) = \beta^k(\Delta(\min(C))).$$

Pour trouver $fix(H1[\beta])$, il suffit donc de construire $Sim(H1, \beta)$.

On peut pondérer trivialement les couples de $Sim(H1, \beta)$ de manière à ce que Γ_{H1} préserve les poids des $\mathbf{H1}$—structures. Il suffit de poser, pour tout $(\delta, \Delta) \in Sim(H1, \beta)$, $w_{\mathbf{H1}}(\delta, \Delta) = w_{\mathbf{H1}}({\Gamma_{H1}}^{-1}(\delta, \Delta))$. De plus, pour toute involution $\delta \in H1[\mathbb{C}(\beta)]$ on définit

$$w_{\mathbf{H1}}(\delta) = \sum_{\Delta} w_{\mathbf{H1}}(\delta, \Delta),$$

où la dernière somme parcourt l'ensemble de tous les $(\delta, \Delta) \in Sim(H1, \beta)$ où δ est fixée. Evidemment, on obtient alors l'identité suivante:

$$fix(\mathbf{H1}(\beta)) = \sum_{\delta \in H1[\mathbb{C}(\beta)]} w_{\mathbf{H1}}(\delta).$$

Si (C, D) est un couple de l'involution δ alors $|C| = |D|$. On a donc, pour tout r, $1 \leq r \leq n$, que la restriction de δ à l'ensemble des cycles de longueur r de β, que nous dénoterons $\mathrm{C_r}(\beta)$, est elle-même une involution de $\mathrm{C_r}(\beta)$. Ainsi tout couple $(\delta, \Delta) \in Sim(H1, \beta)$ détermine un unique n-uplet de couples $((\delta_1, \Delta_1), (\delta_2, \Delta_2), \ldots, (\delta_n, \Delta_n))$ où, pour tout r, $1 \leq r \leq n$, $(\delta_r, \Delta_r) \in Sim(H1, \beta_{(r)})$, $\beta_{(r)}$ étant la permutation constituée de tous les cycles de β de longueur r. On peut alors écrire $Sim(H1, \beta) = \Pi_{1 \leq r \leq n} Sim(H1, \beta_{(r)})$.

Théorème 3. Le poids total des H1—structures fixées par β est donné par l'expression suivante:

$$fix(\mathbf{H1}(\beta)) = \prod_{r=1}^{n} \left((-2)^{r-1} r\right)^{\beta_r/2} H_{\beta_r}(t_r),$$

$$\textit{où, pour tout } r,\ t_r = \begin{cases} \frac{2^{r-1}t^r}{((-2^{r-1})r)^{1/2}} & , \textit{si r est impair} \\ \frac{2^{r-1}t^r - (-2)^{r/2-1}}{((-2^{r-1})r)^{1/2}} & , \textit{si r est pair.} \end{cases}$$

Preuve. Soit $(\delta, \Delta) = \prod_{r=1}^{n} (\delta_r, \Delta_r)$, $o\grave{u}, \forall r$, $(\delta_r, \Delta_r) \in Sim(H1, \beta_{(r)})$. Fixons r, $1 \leq r \leq n$. Si $C \in \mathrm{C_r}(\beta)$ est un point fixe de δ_r et si r est impair, alors, puisque $\delta(\min(C)) = \min(C)$, on a $w_{\mathbf{H1}}(\delta_{|C}) = (2t)^r$ [on dira alors que le cycle C *a le poids* $(2t)^r$]. Par contre, si r est pair, C peut soit avoir le poids $(2t)^r$, soit le poids $(-2)^{r/2}$, les deux cas s'excluant mutuellement selon que, respectivement, $\Delta(\min(C)) = \min(C)$ ou $\Delta(\min(C)) = \beta^{r/2}(\min(C))$. On obtient alors que $w_{\mathbf{H1}}(\delta_{|C}) = (2t)^r + (-2)^{r/2}$.

D'autre part, pour tout couple (C, D) dans $Co(\delta_r)$, une fois $\Delta_r(C)$ déterminé (ce qui peut se faire de r manières), le poids total des couples correspondants obtenus dans ${\Gamma_{H1}}^{-1}(\delta, \Delta)$ sera de $(-2)^r$. Ainsi, lorsque (C, D) est donné dans $Co(\delta_r)$ on a que $w_{\mathbf{H1}}(\delta_{|(C,D)}) = r(-2)^r$.

En somme, on a

$$w_{\mathbf{H1}}(\delta_r) = \begin{cases} \left((2t)^r\right)^{pf(\delta_r)} \left(r(-2)^r\right)^{co(\delta_r)} & , \textit{lorsque r est impair} \\ \left((2t)^r + (-2)^{r/2}\right)^{pf(\delta_r)} \left(r(-2)^r\right)^{co(\delta_r)} & , \textit{lorsque r est pair.} \end{cases}$$

Considérons maintenant le polynôme $H_n(t)$ auquel on substitue t_r à t, t_r étant la variable décrite dans l'énoncé du théorème et où on pose aussi n = β_r. On obtient alors le polynôme $H_{\beta_r}(t_r)$. Nous savons, par la proposition 2 que

$$H_{\beta_r}(t_r) = \sum_{\delta_r \in H[\mathrm{C_r}(\beta)]} (2t_r)^{pf(\delta_r)} (-2)^{co(\delta_r)}.$$

Si on pose

$$A = \begin{cases} 2^{r-1}t^r & , \textit{si r est impair} \\ 2^{r-1}t^r - 2^{r/2-1} & , \textit{si r est pair} \end{cases}$$

et si on multiplie $H_{\beta_r}(t_r)$ par $((-2)^{r-1}r)^{\beta_r/2}$ on obtient alors

$$\begin{aligned} H_{\beta_r}(t_r) \cdot ((-2)^{r-1}r)^{\beta_r/2} &= \sum_{\delta_r \in H[\mathrm{C_r}(\beta)]} \left(\frac{2A}{((-2)^{r-1}r)^{1/2}}\right)^{pf(\delta_r)} \cdot (-2)^{co(\delta_r)} \cdot ((-2)^{r-1}r)^{\beta_r/2} \\ &= \sum_{\delta_r \in H[\mathrm{C_r}(\beta)]} (2A)^{pf(\delta_r)} \cdot ((-2)^{r-1}r)^{(\beta_r - pf(\delta_r))/2} \cdot (-2)^{co(\delta_r)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\delta_r \in H[\mathbf{C_r}(\beta)]} (2A)^{pf(\delta_r)} \cdot ((-2)^r r)^{co(\delta_r)}$$

$$= \sum_{\delta_r \in H[\mathbf{C_r}(\beta)]} \omega_{\mathbf{H1}}(\delta_r)$$

$$= fix(\mathbf{H1}(\beta_{(r)})).$$

□

Pour pouvoir définir la seconde espèce associée aux polynômes d'Hermite, commençons par dire que pour tout ensemble fini U, une *assemblée de flèches* sur U est une partition de U en classes de cardinalité deux où chaque classe est munie d'un ordre total [avec lequel on peut convenir de nommer le plus petit élément la *source* et le plus grand le *but*, pour en faire une *flèche*]. Evidemment, il n'y a d'assemblée de flèches que sur un ensemble de cardinalité paire.

Définition 4. ([8]) On définit l'espèce $\mathbf{H2} = (H2, w_{\mathbf{H2}})$ de la manière suivante: pour tout ensemble fini U, $H2[U] = \{(A, B, f, g) | A \uplus B = U,$ *f est une assemblée de flèches sur* A *et* g *est une assemblée de points sur* $B\}$, et où, pour toute $H2$—structure (A, B, f, g), on pose

$$w_{\mathbf{H2}}(A, B, f, g) = (-1)^{|A|/2}(2t)^{|B|} = (-1)^{\#flèches(f)}(2t)^{\#pts(g)}.$$

Proposition 5. Pour tout entier $n \geq 0$ on a

$$H_n(t) = \mathbf{H2}[n].$$

Preuve. Voir [8]. □

Théorème 6. ([8]) On a

$$fix(\mathbf{H2}[\beta]) = i^{n - \Sigma_{r=1}^n \beta_r} \prod_{r=1}^{n} r^{\beta_r/2} H_{\beta_r}(t_r),$$

où $i = \sqrt{-1}$ *, et* $t_r = \left(\frac{2}{i}\right)^{r-1}\left(\frac{t^r}{\sqrt{r}}\right)$.

Preuve. Posons $Sim(H2,\ \beta_{(r)}) = \{(\delta, \Delta) | \delta \in H2[\mathbf{C_r}(\beta)]$ *et* $\Delta\colon \mathbf{C_r}(\beta) \to [n_r]$ est telle que si C est dans l'assemblée de points de δ ou si C est le but d'une des flèches de δ alors $\Delta(C) = \min(C)$ et si C est la source d'une flèche (C, D) de $\delta\}$ alors $\Delta(C)$ est choisi arbitrairement dans D .

On a une bijection

$$\Gamma_{H2} :\ Fix(H2[\beta]) \ \to \prod_{r=1}^{n} Sim(H2, \beta_{(r)})$$

définie sensiblement de la même manière que dans le cas de l'espèce **H1**. De plus, si, pour tout r et tout (δ, Δ) dans $Sim(H2, \beta_{(r)})$ on pose

$$w_{\mathbf{H2}}(\delta, \Delta) = \left((2t)^r\right)^{\#pts(\delta)} \left(r(-1)^r\right)^{\#flèches(\delta)},$$

alors on obtient

$$fix(\mathbf{H2}(\beta)) = \prod_{r=1}^{n} \sum_{(\delta,\Delta) \in Sim(\mathbf{H2}, \beta_{(r)})} w_{\mathbf{H2}}(\delta, \Delta).$$

D'autre part, en substituant à t_r la valeur donnée dans l'énoncé du théorème, on obtient la relation suivante:

$$i^{n-\sum_{r=1}^{n}\beta_r}\prod_{r=1}^{n} r^{\beta_r/2}H_{\beta_r}(t_r)=\prod_{r=1}^{n}\sum_{\delta_r\in H[\mathrm{C}_r(\beta)]}\left((2t)^r\right)^{\#pts(\delta_k)}\left((-1)^r r\right)^{\#fl(\delta_k)}.$$

□

§ 3 Espèces associées aux polynômes de Laguerre

Le cas des espèces associées aux polynômes de Laguerre se traite essentiellement de la même manière que celui des espèces associées aux polynômes d'Hermite.

Nous présentons d'abord un lemme important dont le corollaire donne une formule explicite pour le poids de certaines permutations dont nous aurons besoin dans le calcul du fix des espèces génératrices des Laguerre.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et β une permutation fixée de $[n]$. Toute permutation τ de $[n]$ invariante par conjugaison avec β induit une permutation δ_τ de $\mathrm{C}(\beta)$ bien définie par (2). Il se peut que δ_τ soit circulaire. Les lemme et corollaire suivants concernent précisément toutes les permutations τ invariantes par conjugaison avec β qui, de plus, induisent une permutation circulaire δ (fixée) de $\mathrm{C}(\beta)$. Une preuve détaillée de ce lemme peut être trouvée dans [6].

Lemme 7. Soit $n \geq 0$ et β une permutation de $[n]$ constituée de n/r cycles de longueur r. Soit δ une permutation circulaire fixée de $\mathrm{C}(\beta)(=\mathrm{C}_\mathbf{r}(\beta))$. Alors, pour tout entier d divisant r il y a $\varphi(d)\cdot r^{(n/r)-1}$ permutations de $[n]$ ayant r/d cycles de longueur nd/r qui sont laissées fixes par conjugaison avec β et dont la permutation induite sur $\mathrm{C}(\beta)$ est égale à δ.

Corollaire 8. Soit β une permutation de $[n]$ constituée de n/r cycles de longueur r et soit δ une permutation circulaire de $\mathrm{C}(\beta)$. Soit p un poids dans un anneau commutatif unitaire de caractéristique nulle. Si le poids $w(f)$ d'une permutation f de $[n]$ est donné par $w(f)=p^{cyc(f)}$ où $cyc(f)$ est le nombre de cycles dans f, alors le poids total de ***toutes*** les permutations laissées fixes par conjugaison avec β qui induisent δ comme permutation de $\mathrm{C}(\beta)$ est égal à

$$r^{(n/r)-1}\cdot\omega_r(p)$$

où $\omega_r(p)$ est donné par l'expression suivante:

$$\omega_r(p)=\sum_{d|r}\varphi(d)\,p^{r/d}.$$

et φ est la fonction (indicatrice) d'Euler.

Remarque. Il est important de noter ici que $\omega_r(p)$ ne dépend, avec les notations du lemme précédent, que de la longueur r des cycles de β et non pas de la longueur du cycle δ donné sur $\mathrm{C}(\beta)$.

Revenons maintenant aux polynômes de Laguerre. On définit ces polynômes, $L_n^{(\alpha)}(t)$ en posant

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(\alpha)}(t)\,x^n=\frac{1}{(1-x)^{(1+\alpha)}}\,\exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right).$$

Pour introduire la famille $\{\mathbb{L}^{[\mathbf{k}]}\}_{\mathbf{k}\geq 1}$ d'espèces associées aux polynômes de Laguerre, nous présentons d'abord l'espèce des assemblées de pieuvres, dénotée $\mathbf{Api}$, à partir de laquelle on définit les espèces $\mathbb{L}^{[\mathbf{k}]}$.

Soit U un ensemble fini. Une *pieuvre* (voir [1], [8], [24]) p sur U est une endofonction *connexe* de U telle que tout point dans le cycle de p a 1 ou 2 comme degré intérieur et tel que tout point de Uqui n'est pas dans le cycle de p a un degré intérieur de 0 ou 1. On peut aussi voir une pieuvre f sur U comme une permutation circulaire d'ordres linéaires *non-vides*. Ces ordres linéaires sont aussi appelés les *tentacules* de p. La *longueur* d'une tentacule est alors le nombre d'éléments dans l'ordre linéaire qui la constitue. Une *assemblée de pieuvres* f sur U est la donnée d'une partition π de U où chacune des classes de π est muni d'une structure de pieuvre. On dénote par Pie et (resp.) Api les espèces (ordinaires) des pieuvres et (resp.) assemblées de pieuvres.

Définition 9. Soit A un anneau commutatif unitaire de caractéristique nulle. Soient $\{c_i\}_{i\geq 1}$ et $\{t_i\}_{i\geq 1}$ deux suites d'éléments de A. On définit l'espèce $\mathbf{Pie}_{(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\ldots;\,\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\ldots)} = \left(Pie, w_{\mathbf{Pie}_{(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\ldots;\,\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\ldots)}}\right)$ de la manière suivante: pour tout ensemble fini U, $Pie[U]$ est l'ensemble des pieuvres p sur U et où le poids de p est donné par la formule suivante:

$$w_{\mathbf{Pie}_{(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\ldots;\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\ldots)}}(p) = c_{gcy(p)} \prod_j t_j^{nbt_j(p)}.$$

où $gcy(p)$ étant la grosseur du cycle (le nombre de points le constituant) de la pieuvre p et $nbt_j(p)$ le nombre de tentacules de longueur j que contient p. Finalement, on définit l'espèce $\mathbf{Api}_{(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\ldots;\,\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\ldots)} = \left(Api, w_{\mathbf{Api}_{(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\ldots;\,\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\ldots)}}\right)$ en posant, pour tout ensemble fini U, que $Api[U]$ est l'ensemble des assemblées f de pieuvres sur U dont le poids est donné par la formule suivante:

$$w_{\mathbf{Api}}(f) = \prod_{p \subset f} w_{\mathbf{Pie}}(p)$$

où le dernier produit s'étend sur toutes les pieuvres p constituant l'assemblée f.

Théorème 10. Si on fixe $c = c_1 = c_2 = \ldots$ dans l'espèce $\mathbf{Api}_{(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\ldots;\,\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\ldots)}$ alors on a

$$fix(\mathbf{Api}_{(\mathbf{c},\mathbf{c},\ldots;\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\ldots)}(\beta)) = \prod_{r=1}^{n} r^{\beta_r} \left|\mathbf{Api}_{(\mathbf{c}^{(r)},\mathbf{c}^{(r)},\ldots;\mathbf{t}_1^r,\mathbf{t}_2^r,\ldots)}(C_r(\beta))\right|$$

où $c^{(r)} = \frac{\omega_r(c)}{r}$.

Preuve. Soit $Sim(Api, \beta_{(r)}) = \{(\delta,\Delta) | \delta \in Api[\mathrm{C_r}(\beta)], \boldsymbol{\Delta}\colon \mathrm{C_r}(\beta) \to [\mathrm{n}]$, **telles que** $\forall \mathrm{C} \in \mathrm{C_r}(\beta), \boldsymbol{\Delta}(\mathrm{C}) \in \delta(\mathrm{C})\}$. Alors on a une bijection:

$$\Gamma_{Api} \;:\; Fix(Api[\beta]) \to \prod_{r=1}^{n} Sim(Api, \beta_{(r)}).$$

Chaque tentacule T de longueur $j \geq 1$ dans $\delta \in Api[\mathrm{C_r}]$ induit, pour toute Δ dans (δ,Δ), r tentacules de longueur j dans ${\Gamma_{Api}}^{-1}(\delta,\Delta)$. Ainsi $w_{Api}(T) = r^j(t_j)^r$. De plus, tout cycle C de longueur i dans $\mathrm{C_r}(\beta)$ prend le poids $w_{Api}(C) = r^{i-1}\omega_r(c)$. □

Définition 11. Soit $k \in \mathrm{N}^*$. On définit l'espèce $\mathbf{L}^{[\mathbf{k}]} = (L^{[k]}, w_{\mathbf{L}^{[\mathbf{k}]}})$ en posant, pour tout ensemble fini U, que $L^{[k]}(U)$ est l'ensemble des quadruplets (A,B,f,g) tels que $A \uplus B = U, f$ est une assemblée de pieuvres à tentacules de longueur plus petite ou égale à k et g est une assemblée d'ordres linéaires non-vides sur B. De plus, pour toute $(A,B,f,g) \in L^{[k]}(U)$ on pose:

$$w_{\mathbf{L}^{[\mathbf{k}]}}(A,B,f,g) = \left(\frac{1+\alpha}{k}\right)^{cyc(f)} (-t)^{lin(g)} \prod_{i=1}^{k} \left((-1)^{i+1}\binom{k}{i}\right)^{nbt_i(f)},$$

où $cyc(f)$ est le nombre de cycles dans f, $lin(g)$ est le nombre d'ordres linéaires dans g et $nbl_i(f)$ a été décrit plus haut.

Proposition 12. Pour tous entiers k et m on a

$$\mathbb{L}^{[k]}[m] = m!\, L_m^{(\alpha)}(t).$$

Preuve. Pour tout entier k on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}^{[k]}(x) &= \left(\frac{1}{1-\left(\binom{k}{1}x-\binom{k}{2}x^2+\binom{k}{3}x^3-\cdots\right)}\right)^{\left(\frac{1+\alpha}{k}\right)} \exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right)\\
&= \left(\frac{1}{(1-x)^k}\right)^{\left(\frac{1+\alpha}{k}\right)} \exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right).
\end{aligned}$$

□

Définition 13. (Voir [8], [13], [24]) L'espèce $\mathbb{L} = (L, w_{\mathbb{L}})$ est définie comme suit: pour tout ensemble fini $U, L[U]$ consiste en l'ensemble des triplets (f, A, B), que l'on appelle des *configurations de Laguerre*, tels que (i) $A \uplus B = U$, et (ii) $f\colon A \hookrightarrow U$ est une fonction injective. De plus, pour tout triplet $(f, A, B) \in L[U]$ on pose $w_{\mathbb{L}}(f, A, B) = (1+\alpha)^{cyc(f)}\,(-t)^{|B|}$.

Proposition 14. Les espèces $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}^{[1]}$ sont isomorphes.

Preuve. Soit U un ensemble fini et $(f, A, B) \in L[U]$. La fonction f peut être scindée de manière naturelle en une permutation σ_f dont le support est inclus dans A et en une assemblée d'ordres linéaires qui doivent tous aboutir dans B (pour que la fonction f soit injective). Les points de B peuvent être considérés comme des ordres linéaires de longueur 1. On obtient ainsi une $L^{[1]}$—structure sur U. Le poids de (f, A, B) est le même que celui de la $\mathbb{L}$—structure correspondante. La construction réciproque est évidente.

□

Théorème 15. ([8]) On a

$$fix(\mathbb{L}[\beta]) = \prod_{r=1}^{n} r^{\beta_r}\ \beta_r!\ L_{\beta_r}^{(\alpha_r)}(t_r) \quad ,$$

où $1+\alpha_r = \frac{w_r(1+\alpha)}{r}$ *et où* $t_r = \frac{(-1)^{r-1}t^r}{r}$.

Preuve. Soit r un entier $1 \le r \le n$. Soit $Sim(L, \beta_{(r)}) = \{(\delta, \Delta) | \delta \in L[\mathrm{C_r}(\beta)], \Delta\colon \mathrm{C_r}(\beta) \to [n]$ telle que, pour tout $\delta = (\nu, V, W) \in L[\mathrm{C_r}(\beta)]$ et tout cycle C dans V, $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)$ et telle que $\Delta(C) = \min(C)$ si $C \in W\}$. Comme pour les espèces H1 et H2 on a une bijection

$$\Gamma_L : Fix(L(\beta)) \to \prod_{r=1}^{n} Sim(L, \beta_{(r)}).$$

Soit $\delta = (\nu, V, W) \in L[\mathrm{C_r}(\beta)]$. Les cycles de V peuvent être regroupés en deux classes distinctes P et Q selon qu'ils font respectivement partie ou non des ordres totaux aboutissant dans W.

Pour tous les cycles C dans P, $\Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)$ et on a alors r manières de déterminer $\Delta(C)$. On a aussi que chaque ordre total T dans $\delta \in L[\mathrm{C_r}(\beta)]$ induit, quelque soit Δ, r

ordres totaux dans $\Gamma_L{}^{-1}(\delta, \Delta)$. De plus, pour tout C dans W il n'y a que le seul choix $\Delta(C) = \min(C)$ de déterminer $\Delta(C)$. Ainsi, on a $w_L(\delta_{|T}) = (-t)^r r^{|T|-1}$.

Quant aux éléments de Q, ils constituent, par définition de $\delta \in L[\mathrm{C_r}(\beta)]$, le support d'une permutation τ de Q. On a encore, pour tout C dans Q, que le choix de $\Delta(C)$ est arbitraire dans $\delta(C)$. Soit K un cycle de τ. Par le corollaire 8, puisque chaque cycle de $\Gamma_L{}^{-1}(\delta, \Delta)$ a un poids de $(1 + \alpha)$ on obtient la formule suivante:

$$w_{\mathbf{L}}(K) = r^{|K|}\left(\frac{1}{r}\sum_{d|r}(1+\alpha)^{r/d}\right).$$

Ainsi, pour tout r, on obtient

$$\begin{aligned}
r^{\beta_r}\beta_r!L_{\beta_r}{}^{(\alpha_r)}(t_r) &= r^{\beta_r} \cdot \sum_{(f,A,B)\in L[\mathrm{C_r}(\beta)]} (\omega_r(1+\alpha))^{cyc(f)} \cdot \left(\frac{(-1)^{r-1}t^r}{r}\right)^{|B|} \cdot (-1)^{|B|} \\
&= \sum_{(f,A,B)\in L[\mathrm{C_r}(\beta)]} r^{\beta_r-|B|-cyc(f)} \cdot (\omega_r(1+\alpha))^{cyc(f)} \cdot (-t)^{r|B|} \\
&= fix(\mathbb{L}[\beta_{(\mathrm{r})}]).
\end{aligned}$$

□

Table 1: Descrition d'espèces associées à certaines familles de polynômes orthogonaux

CHARLIER $C_n^{(a)}(t)$:
$$\sum_{n\geq 0} C_n^{(a)}(t)\frac{x^n}{n!} = \left(1-\frac{x}{a}\right)^t \exp(x).$$

$C1[U] = \{(A,\sigma) | A \subset U, \sigma \in \Sigma(A)\}$;
$$|(A,\sigma)|_{\mathbf{C1}} = (1/a)^{|A|}(-t)^{cyc(\sigma)}.$$

KRAWTCHOUK $K_n(t;p,N)$:
$$\sum_{n\geq 0}(-N)_n\, p^n K_n(t;p,N)\,\frac{x^n}{n!} = \frac{(1+x(1-p))^t}{(1-px)^{t-N}}.$$

$K1[U] = \{(A,B,\sigma,\tau) | A \uplus B = U, \sigma \in \Sigma(A), \tau \in \Sigma(B)\}$;
$$|(A,B,\sigma,\tau)|_{\mathbf{K1}} = (1-1/p)^{|A|}(-t)^{cyc(\sigma)}(t-N)^{cyc(\tau)}.$$

$K2[U] = \{(A,B,f,\tau) | A \uplus B = U, f : A \rightarrowtail U, \tau \in \Sigma(B)\}$;
$$|(A,B,f,\tau)|_{\mathbf{K2}} = (-1/p)^{|B|}(-N)^{cyc(f)}(-t)^{cyc(\tau)}.$$

MEIXNER $m_n(t;\kappa,c)$:
$$\sum_{n\geq 0} m_n(t;\kappa,c)\frac{x^n}{n!} = (1-x)^{-(t+k)}\left(1-\frac{x}{c}\right)^t.$$

$M1[U] = \left\{(A,B,f) | A \uplus B = U, f \in End[U], f_{|A} : A \rightarrowtail U, f_{|B} \in \Sigma(B)\right\}$;
$$|(A,B,f)|_{\mathbf{M1}} = \kappa^{cyc(f_{|A})}(-t)^{cyc(f_{|B})}\left(\frac{1}{c}-1\right)^{|B|}.$$

$M2[U] = K1[U]$;
$$|(A,B,\sigma,\tau)|_{\mathbf{M2}} = (1/c)^{|A|}(-t)^{cyc(\sigma)}(t+k)^{cyc(\tau)}.$$

POLLACZEK $P_n^a(t,\varphi)$:
$$\sum_{n\geq 0} P_n^a(t,\varphi) = \frac{(1-x\exp(i\varphi))^{-a+it}}{(1-x\exp(-i\varphi))^{a+it}}.$$

$P1[U] = K1[U]$;
$$|(A,B,\sigma,\tau)|_{\mathbf{P1}} = (\exp(-i\varphi))^{|A|}(\exp(i\varphi))^{|B|}(a+it)^{cyc(\sigma)}(a-it)^{cyc(\tau)}$$

$P2[U] = K2[U]$;
$$|(A,B,f,\tau)|_{\mathbf{P2}} = (\exp(-2i\varphi)-1)^{|B|}(2a)^{cyc(f)}(a+it)^{cyc(\tau)}.$$

JACOBI $\wp_n^{(\alpha,\gamma)}(s,t)$:
$$\wp_n^{(\alpha,\gamma)}(s,t) = n!\mathrm{P}_n^{(\alpha,\gamma)}\left(\frac{s+t}{s-t}\right)(s-t)^n;$$

$R = R(t,x) = (1-2tx+x^2)^{1/2}$;
$$\sum_{n\geq 0}\mathrm{P}_n^{(\alpha,\gamma)}(t)\,x^n = \frac{2^{\alpha+\gamma}}{R(1-x+R)^\alpha(1+x+R)^\gamma}.$$

$J[U] = \left\{(A,B,f) | A \uplus B = U, f \in End[U], f_{|A} : A \rightarrowtail U, f_{|B} : B \rightarrowtail U\right\}$;
$$|(A,B,f)|_{\mathbf{J}} = (1+\alpha)^{cyc(f_{|A})}(1+\gamma)^{cyc(f_{|B})}S^{|A|}T^{|B|}.$$

**Table 2: Le fix des espèces associées
et les paramètres correspondants.**

$fix(\mathbf{H1}[\beta]) = \prod_{r=1}^{n} \left((-2)^{r-1}r\right)^{\beta_r/2} H_{\beta_r}(t_r).$	$t_r = \begin{cases} \frac{2^{r-1}t^r}{\left((-2)^{r-1}r\right)^{1/2}} & , r \textit{ impair} \\ \frac{2^{r-1}t^r-(-2)^{r/2-1}}{\left((-2)^{r-1}r\right)^{1/2}} & , r \textit{ pair.} \end{cases}$
$fix(\mathbf{H2}[\beta]) = i^{n-\sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu} \prod_{r=1}^{n} r^{\beta_r/2} H_{\beta_r}(t_r)\,.$	$i = \sqrt{-1}\,;\ t_r = \left(\frac{2}{i}\right)^{r-1} \frac{t^r}{\sqrt{r}}$
$fix(\mathbf{L}[\beta]) = \prod_{r=1}^{n} r^{\beta_r} \beta_r!\, L_{\beta_r}^{(\alpha_r)}(t_r)\,.$	$1+\alpha_r = \frac{1}{r}\sum_{d\mid r} \varphi(d)(1+\alpha)^{r/d};$ $t_r = \frac{(-1)^{r-1}t^r}{r}.$
$fix(\mathbf{C1}[\beta]) = \prod_{r=1}^{n} C_{\beta_r}^{(a_r)}(t_r)\,.$	$a_r = \frac{a^r}{r};\ t_r = -\frac{\omega_r(-t)}{r}.$
$fix(\mathbf{K1}[\beta]) = \prod_{r=1}^{n} r^{\beta_r} (-N_r)_{\beta_r} K_{\beta_r}(t_r; p_r, N_r).$	$t_r = -\frac{\omega_r(-t)}{r};\ p_r = \frac{p^r}{p^r-(p-1)^r}\,;$ $N_r = -\frac{(\omega_r(t-N)+\omega_r(-t))}{r}\,.$
$fix(\mathbf{K2}[\beta]) = \prod_{r=1}^{n} r^{\beta_r} (-N_r)_{\beta_r} K_{\beta_r}(t_r; p_r, N_r).$	$t_r = -\frac{\omega_r(-t)}{r};\ N_r = -\frac{\omega_r(-N)}{r};$ $p_r = -(-p)^r.$
$fix(\mathbf{M1}[\beta]) = \prod_{r=1}^{n} r^{\beta_r} M_{\beta_r}(t_r, \kappa_r, c_r).$	$t_r = \frac{\omega_r(-t)}{r}; \kappa_r = \frac{\omega_r(\kappa)}{r}; c_r = \frac{c^r}{c^r+(1-c)^r}.$
$fix(\mathbf{M2}[\beta]) = \prod_{r=1}^{n} r^{\beta_r} M_{\beta_r}(t_r, \kappa_r, c^r).$	$t_r = -\frac{\omega_r(-t)}{r}; \kappa_r = \frac{\omega_r(\kappa+t)+\omega_r(-t)}{r}.$
$fix(\mathbf{MP1}[\beta]) = \prod_{r=1}^{n} r^{\beta_r} \beta_r! P_{\beta_r}^{a_r}(t_r; r\varphi).$	$a_r = \frac{\omega_r(a+it)+\omega_r(a-it)}{2r};$ $t_r = \frac{\omega_r(a+it)-\omega_r(a-it)}{2ri}.$
$fix(\mathbf{MP2}[\beta]) = \prod_{r=1}^{n} r^{\beta_r} \beta_r! P_{\beta_r}^{a_r}(t_r; \varphi_r)$ $\times\left((\exp(-2i\varphi)-1)^r-1\right)^{\beta_k/2}$	$a_r = \frac{\omega_r(2a)}{2r}\,;$ $t_r = \frac{-i}{r}\left(\omega_r(a+it) - \frac{1}{2}\omega_r(2a)\right);$ $\exp(-2i\varphi_r) = (\exp(-2i\varphi)-1)^r - 1.$
$fix(\mathbf{J}[\beta]) = \prod_{r=1}^{n} r^{\beta_r} \wp_{\beta_r}^{(\alpha_r,\gamma_r)}(S^r, T^r).$	$\alpha_r = \frac{\omega_r(1+\alpha)}{r} - 1\,;\ \gamma_r = \frac{\omega_r(1+\gamma)}{r} - 1\,.$

Bibliographie

[1] F. Bergeron. Modèles combinatoires de familles de polynômes orthogonaux: une approche unifiée. *European J. Comb.*, (11):393–401, 1990.

[2] I. Constantineau. Théorie des Espèces et Endofonctions. Mémoire de maîtrise, UQAM, 1987.

[3] I. Constantineau. Etude de Structures Combinatoires Invariantes sous l'Action d'une Permutation. Thèse de doctorat, UQAM, 1990; (publication du LACIM, no.5, 1991)

[4] I. Constantineau et J. Labelle. On the construction of permutations of a given type fixed by conjugation. *J. Comb. Th. Series A.* A paraître.

[5] I. Constantineau et J. Labelle. Calcul combinatoire du nombre d'endofonctions et d'arborescences laissées fixes par l'action d'une permutation. *Ann. Sc. Math. du Québec*, XIII(2), 1989.

[6] I. Constantineau et J. Labelle. On the combinatorial structures kept fixed by the action of a given permutation. *Studies in Applied Math.*, (84), 1991.

[7] R.L. Davis. The number of structures of finite relations. *Proc. Am. Math. Soc.*, 4:486–494, 1953.

[8] H. Décoste. Séries Indicatrices d'Espèces Pondérées et q-Analogues. Thèse de doctorat, UQAM-UdM, 1989; (publication du LACIM, no.2, 1990)

[9] D. Foata. A combinatorial proof of Mehler formula. *J.Comb.Th. Series A*, 24(3), 1978.

[10] D. Foata. Combinatoire des identités sur les polynômes orthogonaux. Dans *Intern. Congress of Math. August 16–24, 1983* pages 1541–1553, PWN–Polish Scientific Publications and North–Holland, Amsterdam, vol.2, 1984.

[11] D. Foata et J. Labelle. Modèles combinatoires pour les polynômes de Meixner. *Europ. J. Comb.*, 4:305–311, 1983.

[12] D. Foata et P. Leroux. Polynômes de Jacobi, interprétation combinatoire et fonction génératrice. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 87:47–53, 1983.

[13] D. Foata et V. Strehl. Combinatorics of the Laguerre polynomials. Dans *Enumeration and Designs, Proc. Waterloo Silver Jubilee 1982*, S.A. Vanstone et D.M. Jackson ed., pages 123–140, Academic Press, 1984.

[14] F. Harary et E.M. Palmer. *Graphical Enumeration*, Academic Press, 1973.

[15] A. Joyal. Une théorie combinatoire des séries formelles. *Adv. in Maths*, (42):1–82, 1981.

[16] G. Labelle. The computation of the cycle index series of some combinatorial species. M.I.T., 1984 Combinatorial Year.

[17] G. Labelle. The cyclic type of combinatorial species. Special Session on Enumerative Combinatorics, 819$^{\text{ième}}$ Rencontre de l'A.M.S., 1985.

[18] G. Labelle. Some new computational methods in the theory of species. *Combinatoire Enumérative, Montréal, Québec, 1985, Proceedings*, LNM 1234, G.Labelle et P.Leroux éd., pages 192–209, Springer-Verlag, 1986.

[19] J. Labelle. Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures. *Ann. Sc. Math. Québec*, 7(1):59–94, 1983.

[20] J. Labelle et Y.N. Yeh. A combinatorial model for Hahn Polynomials. *Actes du 16$^{\text{ième}}$ Séminaire Lotharingien*, Publications de l'I.R.M.A., no.341/S, pages 99–107, 1988.

[21] J. Labelle et Y.N. Yeh. Some combinatorics of the hypergeometric series. *Europ. J. Comb.*, 9:593–605, 1988.

[22] J. Labelle et Y.N.Yeh. Combinatorial proofs of some limits formulas involving orthogonal polynomials. *Discrete Math.*, (80):77–93, 1989.

[23] J. Labelle et Y.N. Yeh. Combinatorial proofs of symmetry formulas for the generalized hypergeometric series. *J. of Math. Anal. and Appl.*, 139(1), 1989.

[24] J. Labelle et Y.N. Yeh. The combinatorics of Laguerre, Charlier, and Hermite polynomials revisited. *Studies in Applied Math.*, 80:25–36, 1989.

[25] P. Leroux. Methoden der Anzahlbestimmung für einege Klassen von Graphen. *Bayreuther mathematische Schriften*, (26):1–36, 1988.

[26] P. Leroux et V. Strehl. Jacobi polynomials: combinatorics of the basic identities. *Discrete Math.*, 57: 167–186, 1985.

[27] V. Strehl. *Zykel-Enumeration bei lokal-strukturierten Funktionen.*, Habilitationsschrift, Institüt für Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung der Universität Erlangen-Nürnberg.

[28] V. Strehl. Communication personnelle.