SUR LA DISTRIBUTION DES ANTI-EXCEDANCES DANS LE GROUPE SYMETRIQUE ET DANS SES SOUS-GROUPES

Roberto MANTACI
L.I.T.P., Université Paris 7 et*
Università di Roma "La Sapienza", Dipartimento di Matematica G.Castelnuovo

RESUME - *Nous prouvons directement que la statistique des anti-excédances est une statistique eulérienne sur S_n et donnons une formule récursive pour la détermination de la distribution des anti-excédances parmi les permutations paires et impaires. Nous donnons aussi une caractérisation des groupes de permutations qui contiennent le cycle standard (1 2 ... n) en termes de leur distribution d'anti-excédances.*

ABSTRACT - *We directely prove that the anti-exceedance statistic is an eulerian statistic on S_n and we give a recursive formula to determinate the distribution of anti-exceedances among odd and even permutations. We also give a characterization of permutation groups containing the standard cycle (1 2 ... n) in terms of their anti-exceedance distribution.*

1. Introduction.

Nous avons commencé à étudier dans [Ma] les *anti-excédances* d'une permutation, c'est-à-dire le nombre de fois qu'une permutation transforme un entier i en un autre plus petit ou égal à i,en essayant de généraliser un résultat de D. Perrin (Lemme 2 de [Pe]). Nous ne savions pas alors qu'une littérature abondante existait déjà dans ce domaine ; nous nous sommes donc maintenant conformés à la terminologie déjà existante et c'est pourquoi nous avons appelé de façon quelque peu barbare ces objets, après avoir découvert qu'ils constituent l'inverse des *excédances* qui sont étudiées depuis longtemps (cf.[Fo], [Fo-Sch], [Fo-Ze],[Lo]).

Cette nouvelle statistique sur le groupe symétrique est une statistique eulérienne comme les statistiques des excédances ou des montées ou des descentes . Pour prouver l'eulérienneté des autres statistiques, c'est-à-dire pour prouver directement qu'elles satisfont les équations définissant les nombres eulériens, il faut procéder de manière combinatoire en faisant des introductions adéquates de chiffres dans les mots représentants les permutations ou en comptant les 'runs' du mot (cf. par exemple [Kn]) ou les 'readings' d'une permutation conjuguée (cf. par exemple [Ri]). Ici, par contre, la preuve

---

* *Laboratoire d'Informatique Théorique et de Programmation, Université Paris 7, 2, Place Jussieu 75251 Cedex 05, Paris, France*

qui donne notre formule récursive est faite algébriquement en utilisant le produit naturel des permutations.

Cela explique probablement pourquoi l'on s'est seulement intéressé jusqu'à présent à la distribution des statistiques eulériennes dans tout le groupe symétrique car les statistiques étudiées jusqu'ici étaient mal compatibles avec la structure de groupe. Le processus de détermination du nombre d'anti-excédances pour les permutations d'un certain degré obtenu à l'aide de formules récurrentes, a rendu possible le calcul de la distribution des anti-excédances pour les permutations paires et impaires en donnant ainsi la distribution des anti-excédances dans les groupes alternés. Nous avons aussi pu etudier ainsi les distributions dans certains sous-groupes de S_n.

Pour tout ce qui regarde les groupes de permutations nous avons suivi en générale la terminologie et les notations de [Wi].

2. L'eulérienneté de la statistique des anti-excédances sur le groupe symétrique.

Les nombres eulériens sont définis par la relation de récurrence:

$$A_{1,1} = 1 \qquad A_{1,k} = 0 \quad \text{pour } k \neq 1$$
$$A_{n,k} = kA_{n-1,k} + (n-k+1)A_{n-1,k-1} \quad \text{pour } n \geq 2 \text{ et } 1 \leq k \leq n.$$

On a en plus $A_{0,k} = 0$ pour $k \neq 1$, mais on pose par convention (cf. par exemple [Kn]) $A_{0,1} = 1$.

Nous reportons dans la table suivante les premières valeurs de ces nombres:

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	4	1				
4	1	11	11	1			
5	1	26	66	26	1		
6	1	57	302	302	57	1	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1

On vérifie directement à partir de la formule que l'on a:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{n,k} = n! \quad \forall n .$$

On retrouve ainsi les nombres $A_{n,k}$ dans divers problèmes d'énumération concernant le groupe S_n. Plus généralement on donne la définition suivante.

DEFINITION 2.1. *Soient D_n un ensemble de cardinal n! et X une application définie sur D_n à valeurs entières; on dit que X est une statistique eulérienne sur D_n si*

$$A_{n,k} = card\ \{d \in D_n : X(d) = k\} \quad 1 \leq k \leq n.$$

On trouve parfois aussi la définition suivante qui propose donc une autre convention :

DEFINITION 2.1'. *Soient D_n un ensemble de cardinal n! et X une application définie sur D_n à valeurs entières; on dit que X est une statistique eulérienne sur D_n si*

$$A_{n,k} = card\ \{d \in D_n : X(d) = k-1\} \quad 1 \leq k \leq n.$$

On a donc des statistiques eulériennes à valeurs dans l'intervalle [1,n] (celles satisfaisant la définition 2.1) et d'autres à valeurs dans l'intervalle [0,n-1] (celles satisfaisant la définition 2.1').

DEFINITION 2.2. *Soit π une permutation du groupe symétrique S_n ; on dit que π présente une anti-excédance en $i \in \{1, 2, ..., n\}$ si $i\pi \leq i$.*

La statistique AX qui associe à chaque permutation du groupe symétrique S_n le nombre d'anti excédances qu'elle présente est une statistique à valeurs dans l'intervalle [1,n]. Nous commençons par donner une preuve directe du fait que la statistique des anti-excédances est une statistique eulérienne sur le groupe symétrique. Nous introduirons ensuite une nouvelle *transformation fondamentale* qui permet le passage de la statistique des anti-excédances à la statistique des descentes (qui est notoirement eulérienne).

THEOREME 2.3. *La statistique des anti-excédances est une statistique eulérienne sur le groupe symétrique S_n .*

Preuve. Soit π une permutation de S_{n-1} qui présente k anti-excédances. Pour chaque anti-excédance $i \rightarrow i\pi$, la permutation $\pi\cdot(i\pi\ n)$ est une permutation de S_n qui présente k anti-excédances. En effet, on a perdu l'anti-excédance $i \rightarrow i\pi$, (puisque maintenant $i \rightarrow n$), mais on a en plus l'anti-excédance $n \rightarrow i\pi$. On associe ainsi à chaque permutation π de S_{n-1} qui présente k anti-excédances, k permutations de S_n qui présentent k anti-excédances, toutes du type $\pi\sigma$, où σ est une transposition de S_n qui échange n.

Si, par contre, π est une permutation de S_{n-1} qui présente $k-1$ anti-excédances et si pour chacune des $n-k$ excédances $i \rightarrow i\pi$, nous multiplions à droite π par la transposition $(i\pi\ n)$, nous obtenons alors la permutation $\pi\cdot(i\pi\ n)$ de S_n qui présente à nouveau k anti-excédances, puisque maintenant $i \rightarrow n$ reste une excédance mais on a en plus l'anti-excédance $n \rightarrow i\pi$. D'ailleurs, chaque permutation de S_{n-1} qui présente $k-1$ anti-excédances peut être considérée comme une permutation de S_n qui présente k anti-excédances en ajoutant celle du point fixe n. Nous associons ainsi à chaque permutation π de S_{n-1} qui présente $k-1$ anti-excédances, $n-k+1$ permutations de S_n qui présentent k anti-excédances et qui sont toutes du type $\pi\sigma$, avec σ transposition de S_n qui permute n, à l'exception d'une seule qui fixe n.

Nous allons montrer que les permutations que l'on a ainsi obtenues sont toutes différentes. En effet si $\pi_1\sigma_1 = \pi_2\sigma_2$, alors on a nécessairement $n\pi_1\sigma_1 = n\pi_2\sigma_2$ et, puisque π_1 *et* π_2 fixent n (elles appartiennent à S_{n-1}) on a $n\sigma_1 = n\sigma_2$. Mais chaque σ_i (pour $i = 1,2$) est soit égal à l'identité ou bien est une transposition qui permute n. Par conséquent, $n\sigma_1 = n\sigma_2$ implique $\sigma_1 = \sigma_2$ et donc,, $\pi_1 = \pi_2$.

Si nous appelons $C_{n,k}$ le nombre de permutations de S_n qui présentent k anti-excédances, ce que nous avons établi ci-dessus nous donne:

$$C_{n,k} \geq k\, C_{n-1,k} + (n-k+1) C_{n-1,k-1} \qquad \forall\, n > 1,\ 1 \leq k \leq n$$

et , puisque $C_{1,1}=1$ et évidemment $C_{n,k}=0$ pour $k \leq 0$ ou $k > n$, on déduit que $C_{n,k} \geq A_{n,k}$ $\forall\, n > 1$, $1 \leq k \leq n$ où $A_{n,k}$ désignent les nombres Eulériens; mais par ailleurs :

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k} = n! \qquad \forall\, n$$

On a donc, forcément $C_{n,k} = A_{n,k}$ $\forall\, n > 0$, $1 \leq k \leq n$. □

REMARQUE. L'eulérienneté de la statistique AX des anti-excédances peut être prouvée moins directement mais plus rapidement en utilisant le fait que la statistique EXC des excédances est eulérienne en observant qu' on a la relation $AX(\pi) = n - EXC(\pi)$ pour toute permutation π de S_n (c'est-à-dire que AX est le complément à n de EXC) et utilisant le fait que les nombres eulériens ont la propriété de symétrie suivante : $A_{n,k} = A_{n,n-k+1}$ $\forall\, n > 1,\ 1 \leq k \leq n$. On a en effet :

$$card\ \{\pi \in S_n\ : AX(\pi) = k\} = card\ \{\pi \in S_n\ : EXC(\pi) = n-k\} = A_{n,n-k+1} = A_{n,k}$$

DEFINITION 2.4. *Soit π une permutation du groupe symétrique S_n; on dit que π présente une descente à la place $i \in \{1, 2, ..., n\}$ si $i\pi > (i+1)\pi$.*

Si DES désigne la statistique des descentes sur S_n, AX et DES sont distribuées de manière identique sur S_n parce qu'elles sont deux statistiques eulériennes.

Nous allons construire une bijection ϕ qui envoie S_n sur l'ensemble des mots standard de longueur n sur l'alphabet $A=\{1,2,...,n\}$ (à chaque permutation π correspond le mot $\pi(1)\pi(2) ... \pi(n)$) et telle que $DES(\phi(\pi)) = AX(\pi) - 1$ pour toute permutation $\pi \in S_n$ (rappelons que $AX: S_n \rightarrow [1,n]$ alors que $DES: S_n \rightarrow [0,n-1]$). Cela constituera l'analogue de la Première Transformation Fondamentale entre les statistiques DES et EXC (des excédances) (voir [Lo] pag. 185-189).

Soit π une permutation quelconque. Considérons sa décomposition en cycles disjoints:

$$(\pi_1\ \pi_2\ ...\ \pi_{i_1})\,(\pi_{i_1+1}\ \pi_{i_1+2}\ ...\ \pi_{i_1+i_2})...\,(\pi_{i_1+i_2+...+i_{k-1}+1}\ ...\ \pi_{i_1+i_2+...+i_k})$$

et ordonnons chaque cycle de sorte telle que l'entier maximal présent dans le cycle apparaisse à la dernière place. Ensuite ordonnons les cycles selon l'ordre décroissant de leurs maxima :

$$(\tau_1\ \tau_2\ ...m_1)\,(\tau_{j_1+1}\ \tau_{j_1+2}\ ...\ m_2)...\,(\tau_{j_1+j_2+...+j_{k-1}+1}\ ...\ m_k) \quad (*).$$

Dans l'écriture de π ainsi obtenue, m_t désigne le maximum des entiers dans le t-ème cycle. Nous faisons alors correspondre à π le mot $\phi(\pi)$ obtenu à partir de (*) en enlevant les parenthèses;

Nous allons voir que si la permutation π a d anti-excédances, le mot $\phi(\pi)$ a alors $d-1$ descentes. En effet, si on a une anti-excédance $\tau_p \rightarrow \tau_{p+1}$ où τ_p n'est pas un des maxima, celle ci est retrouvée telle quelle comme descente dans le mot $\phi(\pi)$. Par contre les anti-excédances présentées dans les m_t avec $t \leq k-1$ sont toutes retrouvées comme descentes dans $\phi(\pi)$ puisque $m_t > m_{t+1} > \tau_{j_1+j_2+\ldots+j_t+1}$.

ϕ est une bijection entre S_n et l'ensemble des mots standard de longueur n sur l'alphabet $A=\{1,2,\ldots,n\}$ qui qdmet pour inverse la fonction χ définie comme suit :
étant donné un mot $v=v_1v_2\ldots v_n$ sans répétitions sur l'alphabet $A=\{1,2,\ldots,n\}$, soit $f(v)$ le préfixe de v qu'on obtient en coupant v à droite de l'entier maximal qui apparaît en v. Si w est un mot standard de longueur n, définissons $c_1(w)=f(w)$ et $c_j(w)=f((c_{j-1}(w)^{-1}\ldots c_1(w)^{-1})w)$; $c_j(w)$ est donc le préfixe du mot restant quand on efface les $(c_i)_{i<j}$ déjà calculés, et on coupe ensuite le mot obtenu à droite l'entier maximal qu'y apparaît. La suite s'arrête quand nous obtenons le mot vide. On définit alors $\chi(w)$ comme la permutation dont la décomposition en cycles disjoints est donnée par les mots $c_j(w)$ mis entre parenthèses.

EXEMPLE. Donnons sur un exemple l'action des fonctions ϕ et χ. Pour cela considérons la permutation:

$$\pi = (1\ 9\ 12\ 5)\ (2\ 8)\ (3)\ (4\ 13\ 6)\ (10)\ (7\ 14\ 11).$$

Permutons les entiers dans chaque cycle de façon à mettre l'entier maximal de chaque cycle à la fin:

$$\pi = (5\ 1\ 9\ 12)\ (2\ 8)\ (3)\ (6\ 4\ 13)\ (10)\ (11\ 7\ 14)$$

ordonnons maintenant les cycles selon l'ordre décroissant des maxima :

$$\pi = (11\ 7\ 14)\ (6\ 4\ 13)\ (5\ 1\ 9\ 12)\ (10)\ (2\ 8)\ (3).$$

Nous avons alors :

$$\phi(\pi) = 11\ 7\ 14\ 6\ 4\ 13\ 5\ 1\ 9\ 12\ 10\ 2\ 8\ 3\ .$$

Si par contre on part du mot standard :

$$w = 6\ 4\ 10\ 1\ 13\ 14\ 7\ 11\ 3\ 12\ 9\ 5\ 2\ 8$$

D'après la définition de la fonction f ci-dessus on coupe alors w comme suit:

$$w = 6\ 4\ 10\ 1\ 13\ 14 / 7\ 11\ 3\ 12 / 9 / 5\ 2\ 8 /$$

Ainsi on a donc :

$$\chi(w) = (6\ 4\ 10\ 1\ 13\ 14)\ (7\ 11\ 3\ 12)\ (9)\ (5\ 2\ 8).$$

3. Distribution des anti-excédances dans le groupe alterné.

Quand on effectue le processus de multiplication par une transposition qu'on a utilisé dans le Théorème 2.3, on obtient des permutations paires (resp. impaires) à partir des permutations impaires (resp. paires). En plus, chaque permutation paire (resp. impaire) de S_{n-1} qui présente $k-1$ anti-excédances donnera une permutation paire (resp. impaire) de S_n qui présente k anti-excédances.

Si $P_{n,k}$ et $D_{n,k}$ désignent respectivement le nombre de permutations paires et impaires de S_n qui présentent k anti-excédances, on obtient les formules récursives suivantes:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_{n,k} = k\,D_{n-1,k} + (n-k)D_{n-1,k-1} + P_{n-1,k-1} \\ D_{n,k} = k\,P_{n-1,k} + (n-k)P_{n-1,k-1} + D_{n-1,k-1} \end{array}}$$

On a bien évidemment $P_{n,k} + D_{n,k} = A_{n,k}$ et on a en particulier $P_{n,k} = 0$ ou $D_{n,k} = 0$ si $k \geq n$ ou si un des deux indices est inférieur ou égal à zéro. Nous posons par convention $D_{0,1} = 1$ (rappelons que $A_{0,1} = 1$ par convention). De plus on a pour tout n :

$$P_{n,n} = P_{n-1,n-1} = \ldots = P_{1,1} = 1 \quad D_{n,n} = D_{n-1,n-1} = \ldots = D_{1,1} = 0$$

et,

$$P_{n,1} = 1 \quad \text{si } n \text{ est impair et} \quad P_{n,1} = 0 \quad \text{si } n \text{ est pair}$$
$$D_{n,1} = 1 \quad \text{si } n \text{ est pair et} \quad D_{n,1} = 0 \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

car le cycle standard $(1\ 2\ \ldots\ n)$, qui est la seule permutation avec une anti-excédance, est une permutation paire si et seulement si n est impair.

Les deux formules pour $P_{n,k}$ et $D_{n,k}$, bien que compactes, ont le désavantage d'exprimer chaque suite en fonction de l'autre. Nous voulons obtenir une expression qui donne $P_{n,k}$ en fonction uniquement des $P_{n,k}$ qui le précédent. Multiplions pour cela chaque terme des deux équations du système par $u^n t^k$ et sommons sur u et t ; nous obtenons alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} P_{n,k}u^n t^k = \sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} k\cdot D_{n-1,k}u^n t^k + \sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} (n-k)D_{n-1,k-1}u^n t^k + \sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} P_{n-1,k-1}u^n t^k \\ \displaystyle\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} D_{n,k}u^n t^k = \sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} k\cdot P_{n-1,k}u^n t^k + \sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} (n-k)P_{n-1,k-1}u^n t^k + \sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} D_{n-1,k-1}u^n t^k \end{array}}$$

Appelons respectivement P et D les deux sommes $\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} P_{n,k}u^n t^k$ et $\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} D_{n,k}u^n t^k$. P et D sont alors les fonctions génératrices des deux suites $P_{n,k}$ et $D_{n,k}$, et nous avons donc les égalités suivantes, dues au fait que $P_{0,k} = 0$ pour tout k, et que $D_{0,1} = 1$ et $D_{0,k} = 0$ pour tout $k \neq 1$, qui traduisent le système ci dessus en fonction de P et D et de leurs dérivées.

$$\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} k\cdot D_{n-1,k}u^n t^k = t\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} D_{n-1,k}u^n t^k\Big) = t\frac{\partial}{\partial t}\Big(u\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} D_{n-1,k}u^{n-1} t^k\Big) =$$

$$= ut\frac{\partial}{\partial t}(D + D_{0,1}t) = ut\frac{\partial}{\partial t}(D + t) = ut\Big(\frac{\partial D}{\partial t} + 1\Big)$$

$$\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} k\cdot P_{n-1,k}u^n t^k = t\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} P_{n-1,k}u^n t^k\Big) = t\frac{\partial}{\partial t}\Big(u\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} P_{n-1,k}u^{n-1} t^k\Big) =$$

$$= ut\frac{\partial}{\partial t}(P + P_{0,1}t) = ut\frac{\partial P}{\partial t}$$

Pour la deuxième somme qui apparaît aux seconds membres de (S), nous avons :

$$\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty}(n-k)D_{n-1,k-1}u^nt^k = \sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} n\cdot D_{n-1,k-1}u^nt^k - \sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} k\cdot D_{n-1\,k-1}u^nt^k =$$

$$=ut\frac{\partial}{\partial u}\Big(\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} D_{n-1,k-1}u^nt^{k-1}\Big)-ut\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} D_{n-1,k-1}u^{n-1}t^k\Big) =$$

$$=ut\frac{\partial}{\partial u}\Big(u\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} D_{n-1,k-1}u^{n-1}t^{k-1}\Big)-ut\frac{\partial}{\partial t}\Big(t\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} D_{n-1,k-1}u^{n-1}t^{k-1}\Big) =$$

$$=ut\frac{\partial uD}{\partial u} - ut\frac{\partial tD}{\partial t} = utD + u^2t\frac{\partial D}{\partial u} - ut\,D - ut^2\frac{\partial D}{\partial t} = u^2t\frac{\partial D}{\partial u} - ut^2\frac{\partial D}{\partial t}$$

De façon analogue, nous avons :

$$\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty}(n-k)P_{n-1,k-1}u^nt^k = u^2t\frac{\partial P}{\partial u} - ut^2\frac{\partial P}{\partial t}$$

Finalement pour les deux dernières sommes apparaissant dans (S), on a :

$$\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} P_{n-1,k-1}u^nt^k = utP$$

$$\sum_{\substack{n=1\\1\leq k\leq n}}^{\infty} D_{n-1,k-1}u^nt^k = utD$$

On obtient donc ainsi que les fonctions D et P satisfont le système d'équations aux dérivées partielles suivant:

$$\boxed{\begin{aligned}(1-ut)\,P &= (ut-ut^2)\frac{\partial D}{\partial t} + u^2t\frac{\partial D}{\partial u} + ut\\ (1-ut)\,D &= (ut-ut^2)\frac{\partial P}{\partial t} + u^2t\frac{\partial P}{\partial u}\end{aligned}}$$

Si on tire D de la deuxième équation, et que l'on substitue cette expression dans la première, on obtient une équation en P et en ses dérivées partielles de premier et second ordre de la forme suivante :

$$(1-ut)^3\,P - ut\,(1-ut)^2 = A_{1,0}\frac{\partial P}{\partial t} + A_{0,1}\frac{\partial P}{\partial u} + A_{2,0}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + A_{1,1}\frac{\partial^2 P}{\partial u\partial t} + A_{0,2}\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}$$

où les $A_{i,j}$ sont des polynômes en u et t. Si on identifie maintenant dans les séries ci-dessus les coefficients des termes en u^nt^k, on obtient la formule:

$$\boxed{\begin{aligned}P_{n,k} = {} & 3P_{n-1,k-1} + k^2P_{n-2,k} + (2nk-2k^2-n)P_{n-2,k-1} + (k^2-2nk+n^2-3)P_{n-2,k-2} \\ & - (k-1)(k-2)P_{n-3,k-1} + (2k^2-2nk+4n-3k-2)P_{n-3,k-2} + (2nk-k^2-n^2+1)P_{n-3,k-3} + \\ & + \delta_{n,k}(\delta_{1,k}-2\,\delta_{2,k}+\delta_{3,k})\end{aligned}}$$

où $\delta_{i,j}$ représente le *symbole de Kronecker* .

En partant des valeurs initiales $P_{1,1}=1$ et $D_{1,1}=0$, pour $n \leq 7$ on obtient les valeurs suivantes pour $P_{n,k}$:

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	0	1					
3	1	1	1				
4	0	7	4	1			
5	1	11	36	11	1		
6	0	31	146	156	26	1	
7	1	57	603	1198	603	57	1

et pour $D_{n,k}$:

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	0						
2	1	0					
3	0	3	0				
4	1	4	7	0			
5	0	15	30	15	0		
6	1	26	156	146	31	0	
7	0	63	588	1218	588	63	0

Pour un n fixé, les $P_{n,k}$ donnent la distribution des anti-excédances dans le groupe alterné A_n. On peut remarquer que ces distributions sont symétriques pour les valeurs impaires de n, i. e., on a $P_{n,k} = P_{n,n+1-k}$ pour tout k ; dans le prochain paragraphe, nous donnerons une démonstration plus générale de ce fait.

4. La distribution des anti-excédances dans d'autres groupes de permutation.

DEFINITION 4.1. *Si G est un groupe de permutations de degré n, on définit la distribution des anti-excédances de G comme étant le n-uple* $(d_1,d_2, ...,d_n)$ *où* d_j *est le nombre de permutations de G présentant j anti-excédances.*

Par exemple on a pour tout groupe G:

$$d_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ contient le cycle standard } (1\ 2\ ...\ n) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$d_n = 1$ (car seule l'identité a n anti-excédances).

DEFINITION 4.2. *Si G est un groupe de permutations de degré n, on dira que sa distribution des anti-excédances est symétrique si on a* $d_j = d_{n+1-j}$ *pour tout* $j = 1,... ,n$.

Nos calculs des distributions des anti-excédances dans les groupes de permutations ont été faits en utilisant le système Cayley (voir [Ca1] et [Ca2]).

THEOREME 4.3. *La distribution des anti-excédances d'un groupe de permutations de degré n est symétrique si et seulement si le groupe contient le cycle standard* $\alpha=(1\ 2\ ...\ n)$.

Preuve. Une implication est triviale car, si le cycle n'est pas dans le groupe, on a $d_1 =0$ et $d_n= 1$.

Pour prouver le réciproque, nous montrerons que la bijection φ de G dans G définie par $\varphi(\pi) = \pi^{-1}\alpha$ vérifie $a_\pi+a_{\varphi(\pi)} =n+1$ pour toute permutation π (où a_π représente le nombre d'anti-excédances de la permutation π).

Soit $\sigma=\pi^{-1}\alpha$. Alors σ présente une anti-excédance en i si et seulement si $i\sigma \leq i$, c'est-à-dire si et seulement si $i\pi^{-1}\alpha \leq i$. Supposons maintenant $i\pi^{-1}\neq n$ $(i \neq n\pi)$ alors, $i\pi^{-1}\alpha = i\pi^{-1}+1$ et on a donc:

$$i\sigma \leq i \Leftrightarrow i\pi^{-1}+1 \leq i \Leftrightarrow i\pi^{-1}< i .$$

Ainsi σ a une anti-excédance en i si et seulement si π^{-1} présente une anti-excédance au sens strict en i, et ceci est équivalent à dire que π présente une excédance. Pour toute excédance de π en i avec $i\pi^{-1}\neq n$, σ présente donc une anti-excédance. De plus quand i est égal à $n\pi$, π^{-1} ne peut avoir d'anti-excédance au sens strict et π n'a donc pas d'excédance. Ainsi à toute excédance de π correspond bijectivement une anti-excédance de σ.

On a ainsi trouvé $n-a_\pi$ anti-excédances pour la permutation σ, l' anti-excédance ultime étant présentée dans l'entier $i =n\pi$ puisque $i\sigma= i\pi^{-1}\alpha =n\alpha= 1 \leq i$.

COROLLAIRE 4.4. *La distribution des anti-excédances sur le groupe alterné* A_n *est symétrique si et seulement si n est impair.*

Preuve. On avait déjà observé que le cycle standard $(1\ 2\ \ldots\ n)$ est un permutation paire si et seulement si n est impair.

REMARQUE. Si n est impair on a également $D_{n,k} = D_{n,n+1-k}$, puisque dans ce cas :

$$D_{n,k} = A_{n,k} - P_{n,k} = A_{n,n+1-k} - P_{n,n+1-k} = D_{n,n+1-k}$$

Pour ce qui concerne le lien entre les anti-excédances et l'opération de conjugaison à l'intérieur du groupe symétrique, nous avons le résultat suivant:

PROPOSITION 4.5. *Soit π une permutation du groupe symétrique S_n et soit a_π le nombre d'anti-excédances de π, alors les conjugués de π par les puissances de α présentent le même nombre d'anti-excédances.*

Preuve. Puisque $\pi^{\alpha^{n+1}} = (\pi^{\alpha^n})^\alpha$, il suffit de montrer que le nombre d'anti-excédances ne change pas par conjuguaison par α.

Supposons $i \neq n$ et $i \neq n\pi^{-1}$; si π a une anti-excédance en i c'est-à-dire si $i\pi \leq i$, alors $i\pi+1 \leq i+1$ et donc, $(i+1)\pi^\alpha \leq i+1$ et π^α présente une anti-excédance en $i+1$. De même si $i\pi > i$, on a $i\pi+1 > i+1$ et $(i+1)\pi^\alpha > i+1$; donc, pour $i \neq n$ et $i \neq n\pi^{-1}$, on a une bijection entre les anti-excédances de π en i et celles de π^α en $i+1$.

Par ailleurs dans les deux entiers que nous s'avons pas considérés π présente une anti-excédance $(n \rightarrow n\pi)$ et une excédance $(n\pi^{-1} \rightarrow (n\pi^{-1})\pi = n)$ qui correspondent pour π^α à l'excédance $1 \rightarrow n\pi+1$ et à l'anti-excédance $n\pi^{-1}+1 \rightarrow 1$.

5. Le nombre moyen d'anti-excédances.

La formule bien connue de Burnside donne le nombre d'orbites d'un groupe de permutation en terme du nombre de points fixés par les éléments de G:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \chi(\pi) = h \qquad (1)$$

où h est le nombre d'orbites et $\chi(\pi) = |\{i \,/\, i\pi = i\}|$. Nous allons montrer que l'argument classique qui donne la formule (1) peut être utilisé pour prouver une formule similaire quand le nombre $\chi(\pi)$ de points fixes de π est remplacé par le nombre d'anti-excédances de π. Nous aurons ainsi quelques informations sur le nombre moyen d'anti-excédances dans un groupe de permutations quelconque. Nous noterons ci-dessous a_π pour le nombre d'anti-excédances de la permutation π, et $A_G = \sum_{\pi \in G} a_\pi$ pour la somme de toutes les anti-excédances de toutes les permutations du groupe G. Plus généralement,

$A_S = \sum_{\pi \in S} a_\pi$ désignera la somme de toutes les anti-excédances de toutes les permutations du sous-ensemble S du groupe G.

THEOREME 5.1. *Soit G un groupe de permutations de degré n, et h le nombre d'orbites de G. Alors on a :*

$$A_G = |G| \frac{n+h}{2}.$$

Preuve. Le nombre total d'anti-excédances est donné par:

$$\sum_{\pi \in G} |\{ i \,/\, i\pi \leq i \}| = \sum_{j \leq i} |\{ i \,/\, \exists \pi\colon i\pi = j \}| \qquad (*)$$

Soit Δ une orbite de G et considérons la contribution de Δ à la somme qui se trouve au membre droit de (*):

$$\sum_{j \leq i} |\{ i \,/\, \exists\ \pi\colon i\pi = j \}| \qquad i,j \in \Delta \qquad (**)$$

Comme G est évidemment transitif sur les éléments de Δ, chaque terme de (**) est égal à $\frac{|G|}{|\Delta|}$ et le nombre d'éléments de la somme est égal au nombre de couples (i, j) avec $i, j \in \Delta$ et $j \leq i$ c'est-à-dire $\frac{|\Delta|(|\Delta|+1)}{2}$.

Si $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_h$ sont les orbites de G, nous avons donc :

$$A_G = \sum_{t=1}^{h} \frac{|G|}{|\Delta_t|} \frac{|\Delta_t|(|\Delta_t|+1)}{2} = |G| \frac{n+h}{2}$$

car le nombre des éléments de toutes les orbites est évidemment n. □

COROLLAIRE 5.2. *Un groupe de permutation G de degré n est transitif si et seulement si* $A_G = |G| \frac{n+1}{2}$.

REMARQUE. En utilisant le Théorème 5.1 et la formule de Burnside nous pouvons obtenir le nombre d'anti-excédances au sens strict ($i\pi < i$):

$$A_G^* = |G| \frac{n+h}{2} - |G|h = |G| \frac{n-h}{2}$$

qui d'ailleurs coincide avec le nombre total d'excédances:

$$E_G = |G| \frac{n-h}{2}$$

L'expression du nombre moyen d'anti-excédances semble être plutôt une propriété des classes de conjugaison comme la proposition suivante le prouve, nous donnons d'abord une remarque.

REMARQUE. Si τ est un cycle $(i_1 \dots i_m)$, $m > 1$, et τ présente t anti-excédances, alors le cycle inverse présente m-t anti-excédances (τ^{1} présente une anti-excédance si et seulement si τ présente une excédance).

PROPOSITION 5.3. *Soient G un groupe de permutation de degré n, π une permutation de G, H la classe de conjugaison de π dans S_n et χ_H le nombre de points fixes par chaque permutation de H. Alors*

$$A_{G\cap H} = |G\cap H| \; \frac{n+\chi_H}{2}$$

Preuve. Observons d'abord que si σ est une permutation de H alors dans sa décomposition en cycles disjoints apparaissent exactement χ_H cycles de longueur 1 ; ces mêmes cycles apparaîtront aussi dans son inverse. Pour la remarque précedente et pour ce que nous venons de dire on a donc :

$$\forall\ \pi \in G\cap H \quad a_\pi + a_{\pi^{-1}} = n + \chi_H$$

et donc, si nous sommons sur les $\frac{|G\cap H|}{2}$ couples (π, π^{1}) avec $\pi \in G\cap H$, nous avons ce qu'il fallait démontrer. □

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier très profondément monsieur le professeur Dominique Foata, qui a été mon inspirateur, guide, conseiller et consultant "à distance" et qui m'a donné les directives pour la suite de mon travail, ainsi que Daniel Krob qui a eu la tache ingrate de relire cet article pour y apporter gentiment les corrections de style nécessaires.

REFERENCES

[Ca1] J. J. CANNON "An Introduction to the Group Theory Language, Cayley ", in : *Proceedings of the London Math. Society Symposium on Computational Group Theory* , M. D. Atkinsons ed., Academic Press, London, 1984, 145-183

[Ca2] J. J. CANNON "Cayley: A Language for Group Theory", preprint

[Co] L.COMTET, "Analyse Combinatoire", vol. 2, Presses Universitaires de France, Paris, 1970

[Fo] D. FOATA, Distributions eulériennes et mahoniennes sur le groupe de permutations, in *Higher Combinatorics*, [M. Aigner, ed., Berlin, 1976], 27-49. - D. Reidel, Amsterdam, 1977 (Proc. N.A.T.O. Adv. Study Inst.).

[Fo-Sch] D. FOATA AND M. P. SCHÜTZENBERGER,"Théorie Géometrique des Polynômes Eulériens", Lect. Notes in Math. 138, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Fo-Ze] D. FOATA AND D. ZEILBERGER, Denert's permutation statistic is indeed euler-mahonian, preprint.

[Kn] D.E. KNUTH, "The Art of Computer Programming", vol. 3/Sorting and Searching, Addison-Wesley, Reading, 1973.

[Lo] M. LOTHAIRE, "Combinatorics on Words", Addison-Wesley, Reading, 1983 (*Encyclopedia of Math. and its Appl.*, 17).

[Ma] R. MANTACI, Descents in permutation groups, *Rapp. L.I.T.P. 90-21*, (1990)

[Pe] D. PERRIN, Le degré minimal du groupe d'un code bipréfixe fini, *J. Comb. Theory, Ser. A* **25** (1978), 163-173.

[Ri] J. RIORDAN, "An Introduction to Combinatorial Analysis", John Wiley, New York, 1958.

[Wi] H. WIELANDT, "Finite Permutation Groups," Academic Press, New York, 1964.