Décomposition hyperoctahédrale de l'homologie de Hochschild

Nantel Bergeron
Harvard University, Department of Mathematics
Cambridge, Massachusetts 02138

Résumé

Nous étudions l'homologie Hyperoctahédrale. Plus précisément, nous étudions les familles d'opérateurs de la catégorie hyperoctahédrale qui commutent avec les opérateurs de bord de Hochschild

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$$

où $d_i : [n] \to [n-1]$ est l'application de face dans cette catégorie. Cette étude est intimement reliée aux projections dans les espaces de puissances symétriques et hyperoctahédrales d'algèbres de Lie libres. Nous discuterons aussi de l'homologie de Harisson dans un tel contexte et de certains autres problèmes connexes.

I. Introduction.

Le problème de décomposer l'homologie de Hochschild pour les algèbres commutatives sur les corps de caractéristique 0, a été étudié par Gerstenhaber et Schack dans [9] et par Barr dans [1]. Gerstenhaber et Schack donnent une caractérisation complète des familles d'éléments $f_n \in \mathbb{Q}[S_n]$ qui commutent avec les bords de Hochschild; $b_n f_n = f_{n-1} b_n$. Plus précisément, pour chaque entier n, ils introduisent une famille d'idempotents orthogonaux $\{e_n^k \in \mathbb{Q}[S_n]: 1 \leq k \leq n\}$ telle que $b_n e_n^k = e_{n-1}^k b_n$ et que pour toute famille $f_n \in \mathbb{Q}[S_n]$ où $b_n f_n = f_{n-1} b_n$, nous avons

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sgn}(f_k)\, e_n^k. \tag{I.1}$$

Ici, sgn: $\mathbb{Q}[S_n] \to \mathbb{Q}$ est l'homomorphisme signé. Une autre conséquence de ces résultats, pour A une algèbre commutative sur un corps de caractéristique 0 et M un A-bimodule, est la décomposition suivante de l'homologie de Hochschild

$$H_n(A, M) = \bigoplus_{k=1}^{n} H_n^k(A, M) \tag{I.2}$$

où $H_n^k(A,M) = e_n^k H_n(A,M)$. Dans [10], Loday donne une version de ces résultats pour les algèbres sur les corps de caractéristique non nulle. De plus, il donne aussi une décomposition similaire de l'homologie cyclique. L'équation (I.1) nous donne que la décomposition (I.2) est la plus fine dans l'algèbre $\mathfrak{L}' = \mathbb{Q}[\mathbf{Fin}']$ définie par Loday dans [10] où $\mathbf{Fin}'$ est la catégorie des ensembles $[n] = \{0, 1, ..., n\}$ pointés. L'algèbre $\mathfrak{L}'$ est un cadre naturel dans lequel les équations de commutation ci-haut ont un sens.

D'autre part, les idempotents de $\{e_n^k\}$ sont étudiés dans les travaux de Garsia [7], et avec Reutenauer dans [8]. Dans [7], la série génératrice des e_n^k y est donnée sous la forme

$$\sum_{k=1}^{n} e_n^k x^k = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (x - d(\sigma)) \uparrow_{A_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma \tag{I.3}$$

où $d(\sigma) = \operatorname{Card}\{i : \sigma_i > \sigma_{i+1}\}$, $(x) \uparrow_{A_n} = x(x+1)\cdots(x+n-1)$. En fait, l'équation (I.3) est l'image de l'équation dans [7] sous l'homomorphisme défini par $\sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma$. Dans nos travaux avec F. Bergeron [5], nous avons développé une formule similaire à (I.3) pour le groupe hyperoctahédral B_n. Plus précisément, nous avons que les éléments $\rho_n^k \in \mathbb{Q}[B_n]$ définis par

$$\rho_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \rho_n^k x^k = \frac{1}{|B_n|} \sum_{\pi \in B_n} (x - 2d(\pi)) \uparrow_{B_n} \operatorname{sgn}(\pi)\pi \tag{I.4}$$

sont des idempotents orthogonaux. Ici $d(\pi)$ dénote le nombre de descentes de π que nous définirons plus bas et $(x) \uparrow_{B_n} = (x+1)(x+3)\cdots(x+2n-1)$. Une fois de plus (I.4) n'est pas l'expression exacte de [5] mais elle est obtenue sous l'homomorphisme défini par $\pi \mapsto \operatorname{sgn}(\pi)\pi$. Parmi les propriétés remarquables des idempotents ρ_n^k est la commutation $b_n \rho_n^k = \rho_{n-1}^k b_n$. Cette nouvelle famille d'idempotents, nous permettra de donner une décomposition de l'homologie $H(A,M)$ différente de (I.2) pour les algèbres A munies d'un automorphisme involutif.

Dans la Section 1, en imitant Loday, nous construirons une algèbre $\mathfrak{B}'$ dans laquelle toutes les équations de commutation ci-haut auront un sens. Dans la Section 2, nous traiterons la décomposition de $H(A,M)$ donnée par les idempotents ρ_n^k. Cette dernière n'est pas la décomposition la plus fine possible pour l'algèbre $\mathfrak{B}'$. En particulier, si l'on munit une algèbre commutative A de l'involution triviale, la décomposition devient triviale! Nous verrons, dans la Section 3, certains raffinements de la décomposition de la Section 2. Pour pousser plus loin la décomposition, nous rappelons à la Section 4 la théorie des algèbres de Lie Hyperoctahédrales libres. La Section 5 est dédiée à l'étude de l'homologie hyperoctahédrale de Harisson. En conclusion, nos travaux convergent vers la décomposition la plus fine de $H(A,M)$ pour A une algèbre commutative munie d'un automorphisme involutif. Nous présenterons certains autres résultats partiels dans cette voie.

Avant de débuter cette discussion nous répondons à une question de C. Procesi [communication personnelle]. Pour l'énoncer nous devons nous placer dans un contexte plus général. D'abord, quelques définitions. Un groupe fini qui admet une présentation de la forme

$$\langle s_i, 1 \leq i \leq n; (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, m_{ii} = 1\rangle$$

est appelé un *groupe de Coxeter.* Pour W un groupe de Coxeter et $w \in W$, nous posons $\ell(w) = \min\{p : w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_p}\}$ et $d(w) = \mathrm{Card}\{s_i : \ell(w) > \ell(w s_i)\}$. Dans l'algèbre de groupe $\mathbb{Q}[W]$, Procesi s'est demandé si les éléments $\ell_n^k = \sum_{d(w)=k} \mathrm{sgn}(w) w$ engendrent une sous-algèbre commutative de dimension $n+1$. Cette question est motivée du fait que pour les groupes de type A (groupes symétriques) Loday [10] a démontré ce fait en utilisant les formules de commutation avec les bords de Hochschild. Par la suite, nous avons démontré [5] ce même résultat pour les groupes de type B; ceci découle de la formule (I.4). En effet, si l'on pose

$$\lambda_n^k = (-1)^{k-1} \rho_n(2k+1) \tag{I.5}$$

on observe que

$$\lambda_n^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+i}{i} \ell_n^{k-i}.$$

D'une part la sous-algèbre engendrée par les $\{\ell_n^k\}$ est égale à celle engendrée par les $\{\lambda_n^k\}$, d'autre part cette dernière est commutative et de dimension $n+1$ puisque

$$\lambda_n^k \lambda_n^{k'} = (-1)^{(k-1)(k'-1)} \rho_n(2k+1) \rho_n(2k'+1) = \lambda_n^{k'} \lambda_n^k.$$

Nous avons donc répondu affirmativement à la question de Procesi pour ces deux grandes familles de groupes de Coxeter. Cependant, ceci est faux en général! En effet, on vérifie à l'aide de Maple que pour le groupe D_5 la sous-algèbre engendrée par les $\{\ell_n^k\}$ n'est pas commutative, sa dimension étant plus grande que 6, et elle n'est même pas semi-simple! Il semble qu'une formule de type (I.3) ou (I.4) soit la clef nécessaire pour avoir une telle sous-algèbre semi-simple.

1. Catégorie hyperoctahédrale

Soit $\mathbf{Fin}'_B$ la catégorie ayant pour objets les ensembles $[n] = \{0, 1, ..., n\}$ et pour morphismes les fonctions signées $f_\epsilon : [n] \to [m]$. Un tel morphisme est la donnée d'une fonction $f : [n] \to [m]$ telle que $f(0) = 0$ et d'une suite de signes $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n$. Ici, $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ est le groupe multiplicatif à deux éléments. Dans cette catégorie, deux morphismes $f_\epsilon: [n] \to [m]$ et $g_\gamma: [s] \to [r]$ sont composables seulement si $m = s$ et dans ce cas

$$f_\epsilon \circ g_\gamma = (f \circ g)_{\epsilon\gamma_f}$$

où $\gamma_f = (\gamma_{f(1)}, \gamma_{f(2)}, ..., \gamma_{f(n)}) \in \mathbb{Z}_2^n$. Nous appelons $\mathbf{Fin}'_B$ la *catégorie hyperoctahédrale pointée.* Il est parfois plus pratique d'écrire $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ pour désigner un morphisme f_ϵ de la catégorie $\mathbf{Fin}'_B$, où $f_i = \epsilon_i f(i)$. De cette façon, le groupe hyperoctahédral B_n peut être representé dans $\mathbf{Fin}'_B$ par les morphismes $\pi = \sigma_\epsilon: [n] \to [n]$ où σ est une permutation de $[n]$ laissant fixe l'élément 0.

D'autre part, soit Δ la catégorie simpliciale. On sait que cette catégorie ayant pour objets les ensembles $[n]$ et pour morphismes les fonctions faiblement croissantes, est engendrée par les applications faces $d_i: [n] \to [n-1]$ et dégénérescences $s_i: [n] \to [n+1]$ pour $0 \leq i \leq n$. Nous définissons un foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Fin}'_B$ en envoyant d_i et s_i sur les morphismes, dénotés d_i et s_i par abus de langage, définis par: $d_i = (1, 2, ..., i-1, i, i, i+1, ..., n-1)$ si $i < n$, $d_n = (1, 2, ..., n-1, 0)$ et $s_i = (1, 2, ..., i-1, i+1, ..., n+1)$. Nous avons une théorie de l'homologie hyperoctahédrale chaque fois qu'un foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \to K$**-module** se factorise à travers la catégorie $\mathbf{Fin}'_B$. Ici nous nous intéressons plus particulièrement au bord de Hochschild

$$b_n = \sum_{i=o}^{n} (-1)^i d_i: [n] \to [n-1]. \tag{1.1}$$

Un calcul simple montre que $b_{n-1} b_n = 0$.

Nous posons maintenant $\mathfrak{B}' = \mathbb{Q}[\mathbf{Fin}'_B]$ l'algèbre des morphismes de $\mathbf{Fin}'_B$. Plus précisément, un élément de $\mathfrak{B}'$ est une somme formelle finie $\sum c_i f_i$ telle que pour tout i, $c_i \in \mathbb{Q}$ et f_i est un homomorphisme de $\mathbf{Fin}'_B$. Par convention nous posons $f \circ g = 0$ si f et g ne sont pas composables dans $\mathbf{Fin}'_B$. Nous remarquons que $b_n \in \mathfrak{B}'$ et que $\mathbb{Q}[B_n]$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{B}'$. Nous avons donc un cadre de travail dans lequel les produits tels que $f_{n-1} b_n$ et $b_n f_n$ ont un sens pour $f_n \in \mathbb{Q}[n]$. Le but de ce travail est de caractériser les familles $\{f_n \in \mathbb{Q}[B_n]\}$ telles que

$$f_{n-1} b_n = b_n f_n. \tag{1.2}$$

Exemple 1.1 Si $\mathcal{A}$ est une algèbre commutative sur un corps de caractéristique 0 muni d'un automorphisme involutif

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ a &\longmapsto \overline{a} \end{aligned}$$

et si M est un bimodule symétrique ($a.m = m.a$), nous posons $C_n(\mathcal{A}; M) = M \otimes \mathcal{A}^{\otimes n}$. Pour simplifier la notation, nous écrivons $(m, a_1, ..., a_n) \in C_n(\mathcal{A}; M)$ pour désigner le tenseur $m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$. Nous avons alors le foncteur $\mathbf{Fin}'_B \to K$**-module** défini par $[n] \mapsto C_n(\mathcal{A}; M)$ et $f_\epsilon \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}'_B}([n], [m]) \longmapsto f_\epsilon(a_0, a_1, ..., a_n) = (a_{f_\epsilon^{-1}(0)}, a_{f_\epsilon^{-1}(1)}, ..., a_{f_\epsilon^{-1}(m)}) \in C_m(\mathcal{A}; M)$

où pour $f^{-1}(i) = \{j_1, j_2, ..., j_k\}$ et $\epsilon_0 = 1$ nous posons $f_\epsilon^{-1}(i) = \{\epsilon_{j_1}j_1, \epsilon_{j_2}j_2, ..., \epsilon_{j_k}j_k\}$ et $a_{\{\epsilon_{j_1}j_1, \epsilon_{j_2}j_2, ..., \epsilon_{j_k}j_k\}} = a_{\epsilon_{j_1}j_1} a_{\epsilon_{j_2}j_2} \cdots a_{\epsilon_{j_k}j_k}$ avec la convention que $a_\emptyset = 1$ et que $a_{-i} = \overline{a}_i$. Nous avons maintenant un foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Fin}'_B \to K$**-module** qui se factorise à travers $\mathbf{Fin}'_B$. Il est aisé de vérifier que ce foncteur correspond à la théorie classique de l'homologie de Hochschild. En d'autres termes, nous avons le complexe

$$C_*(\mathcal{A}; M) = \cdots \xrightarrow{b_{n+1}} C_n(\mathcal{A}; M) \xrightarrow{b_n} C_{n-1}(\mathcal{A}; M) \xrightarrow{b_{n-1}} \cdots \xrightarrow{b_1} C_0(\mathcal{A}; M)$$

et l'homologie de Hochschild classique est donnée par

$$H_n(\mathcal{A}; M) = \frac{\ker(b_n)}{\mathrm{Im}(b_{n+1})}. \tag{1.3}$$

2. Décomposition donnée par l'agèbre de descentes

Dans cette section, nous rappelons certains résultats de [5]. Ceux-ci sont basés sur nos travaux [3][4] sur les algèbres de descentes des groupes hyperoctahédraux, transformées par l'homomorphisme défini par $\pi \mapsto \mathrm{sgn}(\pi)\pi$. Nous en rappelons ici les grandes lignes. Nous terminons cette section par l'étude de ces résultats à travers le foncteur $\mathbf{Fin}'_B \to \mathbf{Fin}'$ qui oublie la structure de signes.

Pour $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n) \in B_n$, nous définissons l'ensemble $D(\pi) \subseteq [n-1]$ des *descentes* de π comme étant l'ensemble des positions $0 \leq i \leq n-1$ pour lesquelles $\pi_i > \pi_{i+1}$ avec, bien sur, $\pi_0 = 0$. Rappelons que $\pi = \sigma_\epsilon \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}'_B}([n], [n])$ et que $\pi_i = \epsilon_i \sigma(i)$. Etant donné un ensemble de descentes $D = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\} \subseteq [n-1]$, nous construisons une composition $p(D) = (i_2 - i_1, i_3 - i_2, ..., i_k - i_{k-1}, n - i_k)$ de l'entier $n - i_1$. Par convention, $p(\{n\}) = \emptyset$ est la seule composition de 0. Ceci est une correspondance bijective entre les sous-ensembles de $[n-1]$ et les compositions d'entiers m, $0 \leq m \leq n$. Pour simplifier l'écriture, nous posons $p(\pi) = p(D(\pi))$. Dans le contexte plus général des groupes de Coxeter, Solomon [12] a montré que l'espace vectoriel engendré par les éléments $X_p = \sum_{p(\pi)=p} \mathrm{sgn}(\pi)\pi$ pour p une composition de $0 \leq m \leq n$, est fermé sous la multiplication dans $\mathbb{Q}[B_n]$. Autrement dit, nous avons une sous-algèbre de $\mathbb{Q}[B_n]$. C'est cette sous-algèbre que nous appelons l'*algèbre des descentes* de B_n. Nous avons montré que les éléments

$$I_p = \sum_{\substack{q_0 \models r \leq n-m \\ q_i \models p_i}} Z_{k(q_0)} N_{k(q_1)} N_{k(q_2)} \cdots N_{k(q_k)} \; X_{q_0 q_1 q_2 \cdots q_k} \tag{2.1}$$

pour $p = (p_1, p_2, ..., p_k) \models m \leq n$, forment une base d'idempotents de l'algèbre des descentes de B_n. Ici, $p \models m$ signifie que p est une composition de l'entier m, $k(p)$ dénote le nombre de parts de p, $Z_i = (-1)^i \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2i-1)}{2^i i!}$, $N_i = \frac{(-1)^{i-1}}{i}$ et $q_0 q_1 q_2 \cdots q_k$ est la composition de $n-r$ obtenue en concaténant les compositions $q_0, q_1, ..., q_k$ bout à bout. A partir des éléments (2.1), nous avons construit une famille complète d'idempotents orthogonaux pour la partie semi-simple de l'algèbre des descentes de B_n. Pour la définir, posons $\lambda(p)$ le partage de $m \leq n$ obtenu de $p \models m \leq n$ en réordonnant les parts de p. Les éléments

$$E_\lambda = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\lambda(p)=\lambda} I_p \tag{2.2}$$

pour λ un partage de $m \leq n$ forment une famille d'idempotents minimaux orthogonaux. Pour la suite, nous devons rappeler une autre expression des E_λ. Soit $S = i_1 < i_2 < \cdots < i_r \subseteq \{1, 2, ..., n\}$, pour $\pi = \sigma_\epsilon \in B_r$ nous posons $S\pi = (\epsilon_1 i_{\sigma(1)}, \epsilon_2 i_{\sigma(2)}, ..., \epsilon_r i_{\sigma(r)})$. Par extension linéaire, nous posons $I_{[S]} = SI_{(r)}$ où $I_{(r)}$ est élément de l'algèbre des descentes de B_r. Similairement, nous posons $\tilde{I}_{[S]} = SI_\emptyset$ où $\emptyset \models 0 \leq r$. Pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ un partage de $m \leq n$, nous avons

$$E_\lambda = \frac{1}{2^k s(\lambda)} \sum_{\substack{S_0+S_1+\cdots+S_k=\{1,2,...,n\} \\ |S_0|=n-m, \quad |S_i|=\lambda_i}} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_k} \pm \tilde{I}_{[S_0]} \cdot I_{[S_{\sigma(1)}]} \cdot I_{[S_{\sigma(2)}]} \cdots I_{[S_{\sigma(k)}]} \tag{2.3}$$

où la première somme est sur toutes les décompositions de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ en $k+1$ sous-ensembles disjoints non vides, $\mathcal{S}_k$ dénote le groupe symétrique sur k éléments et $s(\lambda)$ dénote la cardinalité du stabilisateur de la suite λ sous l'action du groupe symétrique $\mathcal{S}_k$. De plus, l'opération "$\cdot$" dans les termes de cette somme est le produit de concaténation étendu linéairement aux sommes formelles de suites. Le signe $\pm$ dépend de la décomposition de $\{1, 2, ..., n\}$ et de la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_k$.

Nous avons montré [5] que les éléments ρ_n^k apparaissant dans l'équation (I.4) sont obtenus par

$$\rho_n^k = \sum_{\substack{\lambda \vdash m \leq n \\ k(\lambda)=k}} E_\lambda \tag{2.4}$$

où $\lambda \vdash m$ dénote que λ est un partage de m. Le théorème suivant est démontré dans la Section 5 de [5].

Théorème 2.1 *Dans l'algèbre $\mathfrak{B}'$ nous avons pour $0 \le k \le n$*

$$b_n \rho_n^k = \rho_{n-1}^k b_n \tag{2.5}$$

et $\{\rho_n^k\}$ forment une famille d'idempotents orthogonaux de $\mathbb{Q}[B_n]$ telle que

$$\sum_{k=0}^{n} \rho_n^k = \text{Identité} \tag{2.6}$$

Ce théorème nous permet de décomposer le complexe de l'exemple 1.1:

$$C_*(\mathcal{A}; M) = \bigoplus_{k \ge 0} C_*^{(k)}(\mathcal{A}; M)$$

et par le fait même nous avons le théorème suivant

$$H_n(\mathcal{A}; M) = \bigoplus_{k \ge 0} H_n^{(k)}(\mathcal{A}; M) \tag{2.7}$$

où $C_n^{(k)}(\mathcal{A}; M) = \rho_n^k C_n(\mathcal{A}; M)$ et $H_n^{(k)}(\mathcal{A}; M) = \rho_n^k H_n(\mathcal{A}; M)$.

Pour conclure cette section, considérons l'homomorphisme d'algèbre $F\colon \mathfrak{B}' \to \mathfrak{L}'$ induit par le foncteur $\mathbf{Fin}'_B \to \mathbf{Fin}'$ défini par $[n] \mapsto [n]$ et $f_\epsilon \mapsto f$.

Proposition 2.2

$$F\rho_n(x) = (1, 2, ..., n) \in \mathcal{S}_n \tag{2.8}$$

Preuve Pour ceci, il suffit de montrer que $F\rho_n^k = 0$ pour $k > 0$. En effet, puisque $\sum E_\lambda = (1, 2, ..., n) \in B_n$ nous avons $\sum_{k=0}^n \rho_n^k = (1, 2, ..., n)$. En appliquant F de chaque côté de cette dernière égalité, en assumant que $F\rho_n^k = 0$ pour $k > 0$, nous obtenons $F\rho_n^0 = (1, 2, ..., n)$. Considérons les équations (2.3) et (2.4), nous avons

$$F\rho_n^k = \frac{1}{2^k s(\lambda)} \sum_{\substack{S_0 + S_1 + \cdots + S_k = \{1,2,...,n\} \\ \sigma \in \mathcal{S}_k}} \pm F\tilde{I}_{[S_0]} \cdot FI_{[S_{\sigma(1)}]} \cdots FI_{[S_{\sigma(k)}]}.$$

Il est donc suffisant de montrer que $FI_{(r)} = 0$ pour $I_{(r)}$ donné par (2.1) avec $p = (r) \models r \ge 1$. D'autre part, pour $p \models r$, nous avons montré [5] que

$$X_p = X_p^A X_{(r)} \tag{2.9}$$

où X_p^A est un élément de la base de Solomon dans l'algèbre des descentes du groupe symétrique $\mathcal{S}_r$. En comparant la définition (2.1) avec la définition analogue de e_n^1 dans [7][8], nous pouvons montrer, en utilisant (2.9), que $I_{(r)} = e_n^1 X_{(r)}$. Donc $FI_{(r)} = e_n^1 F X_{(r)}$. Maintenant, un terme typique de $X_{(r)}$ est de la forme $x = \text{sgn}(\pi)\pi = \text{sgn}(\pi)(-i_k, ..., -i_1, j_1, ..., j_{r-k})$ où

$S = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\} \subseteq \{1, 2, ..., r\}$ et $\{j_1 < j_2 < \cdots < j_{r-k}\} = \{1, 2, ..., r\} - S$. Nous avons $F\text{sgn}(\pi)\pi = (-1)^k \text{sgn}(\sigma)\sigma$ où $\sigma = (i_k, i_{k-1}, ..., i_1, j_1, ..., j_{r-k})$. Soit π' l'élément de $X_{(r)}$ obtenu de π en changeant le signe de 1 (soit $i_1 = 1$ ou $j_1 = 1$). Nous remarquons que $F\text{sgn}(\pi')\pi' = (-1)^{k\pm 1}\text{sgn}(\sigma)\sigma = -F\text{sgn}(\pi)\pi$. Ceci construit une involution sans point fixe pour laquelle tous les termes de $FX_{(r)}$ s'annullent. Ce qui conclue la preuve du théorème.

L'équation (2.8) nous donne que la relation (2.5) est triviale lorsque l'on oublie la structure hyperoctahédrale. En particulier la décomposition (2.7) de l'homologie de Hochschild est triviale si l'on munit $\mathcal{A}$ de l'involution triviale.

3. Raffinement de la décomposition

Dans cette section nous allons raffiner le résultat donné par le théorème 2.1. Pour cela nous débutons par une proposition.

Proposition 3.1 *Pour $X_n = X_{(n)}$ dans l'algèbre des descentes de B_n, nous avons*

$$b_n X_n = X_{n-1} b_n \tag{3.1}$$

Preuve Rappelons que $X_n = \sum_{\pi_1 < \pi_2 < \cdots < \pi_n} \text{sgn}(\pi)\pi$. Fixons $1 \leq i < n$ et supposons que $\pi_{i+1}^{-1} \neq \pi_i^{-1} \pm 1$. Dans ce cas, nous devons avoir $\pi_i \pi_{i+1} < 0$. D'autre part, pour $(i, i+1)$ la transposition simple qui échange i et $i+1$, posons $\pi' = (i, i+1)\pi$. Nous avons que π' est élément du support de X_n, donc les termes $\text{sgn}(\pi)\pi$ et $\text{sgn}(\pi')\pi'$ de X_n s'annullent l'un et l'autre lorsqu'ils sont multipliés par d_i à gauche puisque $d_i\pi = d_i\pi'$ et $\text{sgn}(\pi) = -\text{sgn}(\pi')$. Ceci montre que lorsque l'on considère le produit $d_i X_n$, seuls les termes pour lesquels $\pi_{i+1}^{-1} = \pi_i^{-1} \pm 1$ survivent. Mais si $\pi_{i+1}^{-1} = \pi_i^{-1} - 1$ alors $\pi_i > \pi_{i+1}$ et donc π n'est pas dans le support de X_n. Il nous reste deux possibilités.

1. Supposons que $\pi_{i+1}^{-1} = \pi_i^{-1} + 1 > 0$. Pour $\pi = \sigma_\epsilon = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$, nous posons $j = \pi_i^{-1}$ et $\pi' = (\pi'_1, ..., \pi'_j, \pi'_{j+2}, ..., \pi'_n) \in B_{n-1}$ avec $\pi'_k = \pi_k$ si $\sigma_k < i+1$ et $\pi'_k = \epsilon_k(\sigma_k - 1)$ si $\sigma_k > i+1$. Nous avons alors que $\text{sgn}(\pi')\pi'$ est un terme de X_{n-1}, que $\text{sgn}(\pi') = (-1)^{i-j}\text{sgn}(\pi)$ et que $d_i\pi = \pi' d_j$.
2. Supposons que $\pi_{i+1}^{-1} = \pi_i^{-1} + 1 < 0$. Pour $\pi = \sigma_\epsilon = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$, nous posons $j = -\pi_{i+1}^{-1}$ et $\pi' = (\pi'_1, ..., \pi'_j, \pi'_{j+2}, ..., \pi'_n) \in B_{n-1}$ avec $\pi'_k = \pi_k$ si $\sigma_k < i$ et $\pi'_k = \epsilon_k(\sigma_k - 1)$ si $\sigma_k > i$. Nous avons alors que $\text{sgn}(\pi')\pi'$ est un terme de X_{n-1}, que $\text{sgn}(\pi') = -(-1)^{i-1-j}\text{sgn}(\pi) = (-1)^{i-j}\text{sgn}(\pi)$ et que $d_i\pi = \pi' d_j$.

Donc,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\pi_1 < \pi_2 < \cdots < \pi_n} (-1)^i \text{sgn}(\pi) d_i \pi = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\pi'_1 < \pi'_2 < \cdots < \pi'_n} (-1)^j \text{sgn}(\pi')\pi' d_j. \tag{3.2}$$

Dans le cas où $i = 0$, posons π' l'élément obtenu en changeant le signe de 1 dans π. Les deux termes $\mathrm{sgn}(\pi)\pi$ et $\mathrm{sgn}(\pi')\pi'$ de X_n s'annullent l'un et l'autre lorsqu'ils sont multipliés par d_0 à gauche puisque $d_0\pi = d_0\pi'$ et $\mathrm{sgn}(\pi) = -\mathrm{sgn}(\pi')$, donc $d_0 X_n = 0$. Finalement dans le cas où $i = n$ nous notons que pour $\mathrm{sgn}(\pi)\pi$ un terme de X_n, nous avons deux possibilités.

1. Soit que $\pi_1 = -n$; dans ce cas nous posons $\pi' = (\pi_2, \pi_3, ..., \pi_n) \in B_{n-1}$ et nous obtenons $d_n\pi = \pi' d_0$ et $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^n \mathrm{sgn}(\pi')$.
2. Soit que $\pi_n = n$; dans ce cas nous posons $\pi' = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n-1}) \in B_{n-1}$ et nous obtenons $d_n\pi = \pi' d_n$ et $\mathrm{sgn}(\pi) = \mathrm{sgn}(\pi')$.

Ceci donne, $(-1)^n d_n X_n = X_{n-1}d_0 + (-1)^n X_{n-1}d_n$, ce qui, avec (3.2) complète la preuve de (3.1).

Cette proposition nous permet de raffiner le résultat du théorème 2.1. En effet, nous remarquons que la famille d'éléments $\rho_n^{0,k} = e_n^k X_n$ commutent avec les bords de Hochschild. D'autre part, nous avons

$$\rho_n^{0,k} = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ k(\lambda)=k}} E_\lambda. \tag{3.3}$$

Ceci est obtenu en combinant (2.9), (2.1), (2.2) et un résultat de Garsia et Reutenauer [8] qui décrit e_n^k par une formule analogue à (2.4). Maintenant, en rappelant le fait que les idempotents E_λ sont orthogonaux, grâce à (2.4), nous avons que les idempotents $\rho_n^{+,k} = \rho_n^k - \rho_n^{0,k}$ avec les idempotents $\rho_n^{0,k}$ forment une famille d'idempotents orthogonaux qui commutent avec les bords de Hochschild. Remarquons que $\rho_n^{0,0} = \rho_n^{+,n} = 0$ sont les seuls éléments triviaux de cette famille.

Théorème 3.2 *Dans l'algèbre $\mathfrak{B}'$ nous avons pour $0 \leq k \leq n$*

$$\begin{aligned} b_n\rho_n^{0,k} &= \rho_{n-1}^{0,k} b_n \\ b_n\rho_n^{+,k} &= \rho_{n-1}^{+,k} b_n \end{aligned} \tag{3.4}$$

et $\{\rho_n^{0,k}, \rho_n^{+,k}\}$ forment une famille d'idempotents orthogonaux de $\mathbb{Q}[B_n]$ telle que

$$\sum_{k=0}^{n} (\rho_n^{0,k} + \rho_n^{+,k}) = \text{Identité} \tag{3.5}$$

Dans le cas de l'exemple 1.1, ceci nous donne une décomposition plus fine de l'homologie $H_n(\mathcal{A}; M)$.

Pour terminer cette section, nous démontrons une généralisation triviale du lemme de Barr [1]. Ce lemme sugère que la décomposition donnée par le théorème 3.2 est encore loin d'être minimale.

Lemme 3.3 *Pour $f \in \mathbb{Q}[B_n]$ nous avons $b_n f = 0$ si et seulement si*

$$f = \sum_{\epsilon \in \mathbb{Z}_n^2} c_\epsilon \, \varepsilon_n 1_\epsilon. \tag{3.6}$$

où $c_\epsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} sgn(\sigma)\sigma$ et $1_\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n) \in B_n$.

Preuve Le lemme de Barr original soutient que pour $u \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}_n]$, $b_n u = 0$ si et seulement si $u = c\varepsilon_n$ où $c \in \mathbb{Q}$. D'autre part, si $f \in \mathbb{Q}[B_n]$ alors nous avons la décomposition suivante $f = \sum_{\epsilon \in \mathbb{Z}_n^2} f_{(\epsilon)} 1_\epsilon$ avec $f_{(\epsilon)} \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}_n]$. En appliquant b_n de chaque côté de cette décomposition et utilisant le lemme de Barr, on obtient (3.6).

4. Algèbre de Lie hyperoctahédrale libre

Pour raffiner notre décomposition, nous nous devons d'introduire ici certaines notions de la théorie des algèbres de Lie hyperoctahédrales libres. Ceci nous donnera une meilleure compréhension des espaces dans lesquels les idempotent introduits ci-haut projettent. La première partie de cette section peut se retrouver dans [3].

Soit $A = \{\overline{a}_f < \cdots < \overline{a}_1 < a_1 < \cdots < a_f\}$ un alphabet avec deux copies (*négative* et *positive*) de f lettres. Soit A^* l'ensemble de tous les mots dans cet alphabet et A^n l'ensemble de tous les mots de n lettres. Nous définissons l'algèbre $\mathbb{Q}[A^*]$ l'ensemble de toutes les somme formelles finies de mots $\sum c_w w$ avec comme produit la linéarisation du produit de concaténation. L'algèbre $\mathbb{Q}[A^*]$ est graduée par la longueur des mots et nous dénotons les espaces homogènes de degré n par $\mathbb{Q}[A^n]$. Nous définissons dans $\mathbb{Q}[A^*]$ deux nouvelles opérations, la première définie algébriquement par $a_i \mapsto \overline{a}_i$ et $\overline{a}_i \mapsto \overline{\overline{a}}_i = a_i$, et la seconde définie linéairement par $w = b_1 b_2 \cdots b_n \mapsto \overleftarrow{b_1 b_2 \cdots b_n} = \overline{b}_n \overline{b}_{n-1} \cdots \overline{b}_1$. Nous définissons aussi une action de l'algèbre $\mathbb{Q}[B_n]$ sur l'espace homogène $\mathbb{Q}[A^n]$ en étendant l'action $\pi\colon b_1 b_2 \cdots b_n \mapsto b_{\pi_1} b_{\pi_2} \cdots b_{\pi_n}$ avec la convention que $b_{-i} = \overline{b}_i$.

L'algèbre de *Lie hyperoctahédrale libre* est l'algèbre de Lie engendrée, dans $\mathbb{Q}[A^*]$, par les lettres de A en utilisant le crochet de Lie $[f, g] = fg - gf$. Nous dénotons par Lie(A) cette algèbre et généralement, nous appelons les éléments de Lie(A) des *polynômes de Lie*. Un polynôme de Lie P est dit *positif* si $\overleftarrow{P} = -P$ et *négatif* si $\overleftarrow{P} = P$. Pour ce qui suit, nous utiliserons la lettre "P", respectivement "Q", pour désigner un polynôme de Lie homogène positif, respectivement négatif. Le lecteur vérifiera que les polynômes de Lie positifs forment une sous-algèbre de Lie. Il est possible de construire une base ordonnée $\mathcal{B} = \{Q_1, Q_2, ..., P_1, P_2, ...\}$ de Lie(A) telle que les polynômes Q_i, respectivement P_i, sont des polynômes de Lie homogènes négatifs, respectivement positifs. Nous posons

$$(P_1 \cdots P_l Q_1 \cdots Q_k)^{S_l \times S_k} = \frac{1}{l!k!} \sum_{\substack{\sigma \in S_l \\ \tau \in S_k}} P_{\sigma_1} \cdots P_{\sigma_l} Q_{\tau_1} \cdots Q_{\tau_k}.$$

Nous appelons $(P_1 \cdots P_l Q_1 \cdots Q_k)^{S_l \times S_k}$ un *monôme de Lie hyperoctahédral* de degré (l, k). Une variation sur un thème du théorème de Poincaré-Birkoff-Witt donne [3][7] que

$$\{(P_{i_1} \cdots P_{i_l} Q_{j_1} \cdots Q_{j_k})^{S_l \times S_k} : P_{i_r}, Q_{j_r} \in \mathcal{B}, i_1 \geq \cdots \geq i_l \text{ et } j_1 \geq \cdots \geq j_k\} \tag{4.1}$$

est une base de $\mathbb{Q}[A^*]$. Nous posons maintenant $\mathrm{Lie}^{l,k}(A) = \mathbb{Q}[(P_1 \cdots P_l Q_1 \cdots Q_k)^{S_l \times S_k}]$; l'espace linéaire engendré par les monômes de Lie hyperoctahédraux de degré (l, k). La base (4.1) nous donne que

$$\mathbb{Q}[A^*] = \bigoplus_{\substack{l \geq 0 \\ k \geq 0}} \mathrm{Lie}^{l,k}(A). \tag{4.2}$$

Pour la suite, nous posons $\mathrm{Lie}_n^{l,k}(A) = \mathrm{Lie}^{l,k}(A) \cap \mathbb{Q}[A^n]$, $\mathrm{Lie}_n^{*,k}(A) = \bigoplus_{l \geq 0} \mathrm{Lie}_n^{l,k}(A)$ et $\mathrm{Lie}_n^{+,k}(A) = \bigoplus_{l > 0} \mathrm{Lie}_n^{l,k}(A)$. Nous avons montré dans [3] que $\mathbb{Q}[A^n]\theta\rho_n^k = \mathrm{Lie}_n^{*,k}(A)$ où $\theta: \mathbb{Q}[B_n] \to \mathbb{Q}[B_n]$ est l'automorphisme défini par $\pi \mapsto \mathrm{sgn}(\pi)\pi$. En fait, suite à la discussion de la Section 3 les résultats de [3] montrent que

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[A^n]\theta\rho_n^{0,k} &= \mathrm{Lie}_n^{0,k}(A) \\ \mathbb{Q}[A^n]\theta\rho_n^{+,k} &= \mathrm{Lie}_n^{+,k}(A) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Rappelons d'autre part que Garsia [7] avait d'abord décomposé l'algèbre $\mathbb{Q}[A^*]$ en utilisant les idempotents e_n^k. Pour cela nous posons

$$(R_1 R_2 \cdots R_k)^{S_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} R_{\sigma_1} R_{\sigma_2} \cdots R_{\sigma_k}$$

où $R_i \in \mathrm{Lie}(A)$; nous oublions la scission positif/négatif. Nous appelons $(R_1 R_2 \cdots R_k)^{S_k}$ un *monôme de Lie symétrique* de degré k. Garsia a montré que la décomposition

$$\mathbb{Q}[A^*] = \bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{Lie}^k(A) \tag{4.4}$$

où $\mathrm{Lie}^k(A)$ est l'espace engendré par les monômes de Lie symétriques de degré k, est obtenu par

$$\mathbb{Q}[A^n]\theta e_n^k = \mathrm{Lie}_n^k(A) \tag{4.5}$$

où $\mathrm{Lie}_n^k(A) = \mathrm{Lie}^k(A) \cap \mathbb{Q}[A^n]$.

Remarque 4.1 La décomposition (4.4) montre que l'algèbre enveloppante $\mathbb{Q}[A^*]$ de $\mathrm{Lie}(A)$ est aussi obtenue comme l'algèbre des puissances symétriques de $\mathrm{Lie}(A)$. Les dimensions des espaces $\mathrm{Lie}^k(A)$ sont intimement reliées aux classes de conjugaisons du groupe symétrique par le biais des nombres de Stirling de seconde espèce. Le lecteur ne s'étonnera pas de voir un lien similaire entre la décomposition (4.2) et les classes de conjugaisons du groupe hyperoctahédral [2][5].

Conjecture 4.2 *Il existe des idempotents orthogonaux $\rho_n^{l,k} \in \mathbb{Q}[B_n]$ tels que*

$$b_n\rho_n^{l,k} = \rho_{n-1}^{l,k}b_n \quad et \quad \mathbb{Q}[A^n]\theta\rho_n^{l,k} = \mathrm{Lie}_n^{l,k}(A). \tag{4.6}$$

Le théorème 3.2 est un pas dans cette voie. Pour finir cette section nous allons raffiner davantage (3.4) et (3.5) dans la direction désirée par (4.6). Pour cela posons $\rho_n^{l,0} = \rho_n^0 e_n^l \rho_n^0$. Nous avons la proposition suivante qui montre que les éléments $\rho_n^{l,0}$ décomposent ρ_n^0 en idempotents plus fins, orthogonaux à $\rho_n^{*,k}$ pour $k \neq 0$.

Proposition 4.3 *Les éléments $\rho_n^{l,0}$ sont des idempotents orthogonaux tels que*

$$b_n\rho_n^{l,0} = \rho_{n-1}^{l,0}b_n \quad et \quad \mathbb{Q}[A^n]\theta\rho_n^{l,0} = \mathrm{Lie}_n^{l,0}(A). \tag{4.7}$$

Preuve Nous avons que ρ_n^0 s'exprime simultanément en termes de la décomposition (4.2) et (4.4) par une expression de la forme

$$\rho_n^0 = \sum_{\substack{l\geq 1\\ i_1\geq\cdots\geq i_l}} (P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_l})^{S_l}.$$

Donc

$$\rho_n^{l,0} = \sum_{i_1\geq\cdots\geq i_l} (P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_l})^{S_l}.$$

De ceci, il est clair que $\rho_n^{l,0}$ est un idempotent. Celui-ci s'annulle sur les espaces $\mathrm{Lie}_n^{l',0}(A)$ pour $l' \neq l$ et est l'identité sur $\mathrm{Lie}_n^{l,0}(A)$, ce qui complète la preuve de la proposition.

5. Homologie de Harisson Hyperoctahédrale $H_*^{1,0}(\mathcal{A}, M)$

Dans l'exemple 1.1, étant donné la conjecture 4.2, nous aurions la décomposition suivante de l'homologie de Hochschild:

$$H_n(\mathcal{A}, M) = \bigoplus_{\substack{k\geq 0\\ l\geq 0}} H_n^{l,k}(\mathcal{A}, M). \tag{5.1}$$

Ici nous allons discuter les composantes suivantes qui sont obtenues par (3.4) et (4.7):

$$H_n^1(\mathcal{A}, M) = H_n^{0,1}(\mathcal{A}, M) \oplus H_n^{1,0}(\mathcal{A}, M). \tag{5.2}$$

Gerstennhaber et Schack ont montré que $H_n^1(\mathcal{A}, M) = e_n^1 H_n(\mathcal{A}, M)$ correspond à l'homologie de Harisson. Plus précisément, $H_n^1(\mathcal{A}, M)$ peut être obtenue des chaînes du complexe $C_*(\mathcal{A}, M)$ qui s'annulent sur les mélanges signés. Ceci est équivalent à dire que θe_n^1 projette dans un espace orthogonal aux produits de mélanges non triviaux. Nous montrons dans cette section une interprétation du même type pour l'homologie $H_n^{1,0}(\mathcal{A}, M)$.

Le *produit de mélange* de deux mots u, v dans A^* est dénoté ici par $u \sqcup\!\sqcup\, v$. Rappelons que le produit de mélange de deux mots u et v est la somme formelle de tous les mots qui sont obtenus en *mélangeant* u et v. Par exemple $ab \sqcup\!\sqcup\, cd = abcd + acbd + cabd + cadb + cdab + acdb$. Etant donné le produit scalaire $\langle -, - \rangle$ sur $\mathbb{Q}[A^*]$ pour lequel les mots de A^* sont orthogonaux, Ree [11] a montré la proposition suivante.

Proposition 5.1 [11] *R est un polynôme de Lie si et seulement si*

$$\langle R, u \sqcup\!\sqcup\, v \rangle = 0 \tag{5.3}$$

pour tous u, v non vides.

Cette proposition démontre que $H_n^1(\mathcal{A}, M)$ est bien l'homologie de Harrison.

Nous introduisons maintenant le produit de mélange hyperoctahédral. Dans ce contexte, nous définissons $\widehat{u} = \sum_{xy=u} \overleftarrow{x} \sqcup\!\sqcup\, y$. Un produit de mélange hyperoctahédral est soit $u \sqcup\!\sqcup\, v$, soit $\widehat{u} \sqcup\!\sqcup\, v$ ou soit $\widehat{u} \sqcup\!\sqcup\, \widehat{v}$. Nous avons la proposition suivante.

Proposition 5.2 *R est un polynôme de Lie positif si et seulement si*

$$\langle R, u \sqcup\!\sqcup\, v \rangle = 0 \quad et \quad \langle R, \widehat{u} \rangle = 0 \tag{5.4}$$

pour tous u, v non vides.

Preuve Supposons d'abord que R soit un polynôme de Lie positif. La proposition 5.1, nous donne la première égalité de (5.4) pour tous u, v non vides. D'autre part, nous avons $\langle R, \widehat{u} \rangle = \langle R, u \rangle + \langle R, \overleftarrow{u} \rangle$ puisque tous les autre termes de la somme $\widehat{u}$ sont des produits de mélange non triviaux. Par dualité et positivité de R, nous avons $\langle R, \widehat{u} \rangle = \langle R + \overleftarrow{R}, u \rangle = 0$. Supposons maintenant que (5.4) est satisfaite pour tous u, v non vides. La proposition 5.1 nous donne que R est un polynôme de Lie. Donc $0 = \langle R, \widehat{u} \rangle = \langle R + \overleftarrow{R}, u \rangle$ pour tout u non vide. Nous concluons que $R + \overleftarrow{R} = \sum_{u \neq \emptyset} \langle R + \overleftarrow{R}, u \rangle u = 0$ et donc $R = -\overleftarrow{R}$ est positif.

Les équations (5.4) sont équivalentes à dire que R est orthogonal à tous produits de mélanges hyperoctahédraux non triviaux. Nous avons donc le corollaire suivant.

Corollaire 5.3 *l'homologie $H_n^{1,0}(\mathcal{A}, M)$ est l'homologie de Harisson hyperoctahédrale obtenue des chaînes du complexe $C_*(\mathcal{A}, M)$ qui s'annulent sur les mélanges hyperoctahédraux signés.*

6. Conclusion

Nous avons présentement une preuve de la conjecture 4.2. L'idée est une utilisation judicieuse des familles d'idempotents e_n^l et ρ_n^k pour produire des projections orthogonales dans $\mathrm{Lie}_n^{l,k}(A)$ qui satisfont immédiatement les relations de commutation avec b_n. Nous réservons ce résultat pour un article ultérieur à celui-ci.

D'autre part, plusieurs questions restent encore ouvertes. Est-ce que la décomposition (4.6) est minimale? Le lemme 3.3 semble dire non à cela. Que dire des autres groupes de Coxeter? Pour chaque famille de groupes de Coxeter W_n nous pouvons construire une catégorie $\mathbf{Fin}_W^l$ et demander quelle famille d'éléments f_n commutent avec b_n? Mais plus proche de nous, dans un contexte hyperoctahédral, peut-on trouver des règles de commutation avec le bord de Conne B_n qui sont compatibles avec (4.6), pour décomposer l'homologie cyclique? Ceci se ferait à l'intérieur de $\mathbb{Q}[\mathbf{Fin}_B]$ où les morphismes de $\mathbf{Fin}_B$ ne sont pas contraints à $f(0) = 0$.

Bibliographie

[1] M. Barr, *Harrison homology, Hochschild homology and triples*, J. Algebra **8**, (1963), 314-323.

[2] N. Bergeron, *A Hyperoctahedral Analogue of the Free Lie Algebra*, J. Comb. Theory Ser. A, **58** No. 2, (1991), 256-278.

[3] N. Bergeron, *A Decomposition of the Descent Algebra of the Hyperoctahedral Group II*, J. Algebra **147**, (1992).

[4] F. Bergeron et N. Bergeron, *A Decomposition of the Descent Algebra of the Hyperoctahedral Group I*, J. Algebra **147**, (1992).

[5] F. Bergeron et N. Bergeron, *Orthogonal Idempotents in the Descent Algebra of B_n and Applications*, JPAA (accepté 1990).

[6] F. Bergeron et N. Bergeron, R. B. Howlett et D. E. Taylor, *A Decomposition of the Descent Algebra of Finite Coxeter Groups*, J. of Alg. Comb. (accepté 1991).

[7] A. Garsia, *Combinatorics of the Free Lie Algebra and the Symmetric Group*, Analysis, Et Cetera, Research papers published in honor of Jurgen Moser's 60th birthday, ed: Paul H. Rabinowitz and Eduard Zehnder, Academic Press, 1990.

[8] A. Garsia et C. Reutenauer, *A Decomposition of Solomon's Descent Algebras*, Adv. in Math. **77**, No 2, 1989, 189-262.

[9] M. Gerstenhaber et S. D. Schack, *A Hodge-type Decomposition for commutative algebra cohomology*, J. Pure Appl. Algebra **48**, 1987, 229-247.

[10] J.-L. Loday, *Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives*, Inv. Math. **96**, 1989, 205-230.

[11] R. Ree, *Lie elements and the algebra associated with shuffles*, Ann. of Math. **68**, No 2, 1958, 210-219.

[12] L. Solomon, *A Mackey Formula in the Group Ring of a Coxeter Group*, J. Algebra **41**, 1976, 255–264.