

# La Correspondance de Robinson-Schensted pour les Tableaux Oscillants Gauches

Serge Dulucq †  
Bruce E. Sagan ‡

**Abstract.** We introduce an analog of the Robinson-Schensted algorithm for Skew Oscillating Tableaux which generalize the well known correspondence for Standard Tableaux. We show that this new algorithm enjoy some of the same properties as the original. In particular, it is still true that replacing a permutation by its inverse exchanges the two output tableaux. These facts permit us to derive a number of identities involving  $\tilde{f}_n^{\alpha \rightarrow \beta}$ .

## 1. Introduction

Les tableaux de Young, introduits en 1902 par A. Young [You] pour calculer certains idempotents de l'algèbre du groupe symétrique, ont été très abondamment étudiés sous différents points de vue. En particulier, dans le cadre de la théorie des représentations du groupe symétrique, l'algorithme de Robinson-Schensted [Rob, Sche] donne une preuve combinatoire de l'identité

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2, \quad (1)$$

identité dans laquelle  $n!$  est la dimension de la représentation régulière, et  $f^\lambda$  est à la fois le degré et la multiplicité de la représentation associée à la forme  $\lambda$ . Depuis, une riche combinatoire sur les tableaux de Young a vu le jour. Ainsi, plusieurs correspondances analogues à celle de Robinson-Schensted ont été proposées pour divers types de tableaux: tableaux semi-standards [Knu], tableaux oscillants [DDF, Fav, Sun, McL], "shifted" tableaux [Sag, Wor], tableaux gauches [SaSt], ...

---

† LaBRI Université Bordeaux I, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence Cédex.  
E-mail : dulucq@labri.greco-prog.fr

‡ Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, MI 48824-1027.  
E-mail : sagan@nsf1.mth.msu.edu

Dans ce travail, nous nous intéressons à la famille des tableaux oscillants gauches, de tels tableaux correspondant à des chemins quelconques allant d'une certaine forme initiale à une certaine forme finale dans le treillis de Young représenté figure 1.

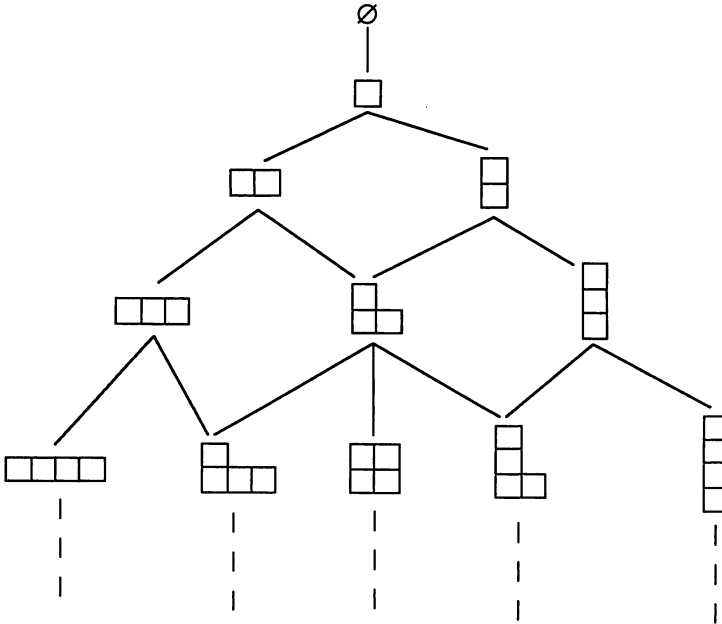


Figure 1

Ces tableaux oscillants gauches généralisent donc les notions de tableaux oscillants (pour lesquels la forme initiale est la forme vide  $\emptyset$ ), tableaux standards (la forme initiale est  $\emptyset$  et le chemin est une chaîne dans le poset représenté figure 1), tableaux gauches (la forme initiale est quelconque et le chemin est une chaîne dans ce même poset).

Dans cet article, nous donnons un analogue de l'algorithme de Robinson-Schensted [Rob, Sche] pour cette famille des tableaux oscillants gauches. Nous montrons également que cette correspondance possède les mêmes propriétés que l'originale, en particulier celle qui fait que le remplacement d'une permutation par son inverse a pour effet d'échanger les deux tableaux obtenus [Schü]. De ces résultats, nous déduisons un certain nombre d'identités faisant intervenir le nombre de ces tableaux.

Le paragraphe suivant présente les définitions et notations que nous utilisons au long de ce travail. Ensuite, nous proposons un algorithme (dit fondamental) associant à un tableau oscillant gauche un triplet constitué d'une involution partielle et de deux tableaux partiels, correspondance donnant une première formule d'énumération pour ces

tableaux (en fonction des formes initiale et finale et de la longueur des tableaux). Dans le paragraphe quatre, nous donnons la correspondance de type Robinson-Schensted pour les tableaux oscillants gauches, déduite de l'algorithme fondamental. Nous obtenons ainsi une formule analogue à la formule (1) sur les dimensions. Dans le dernier paragraphe, nous montrons que cette correspondance possède une propriété analogue à l'originale, propriété dont nous déduisons une formule pour le nombre de tableaux oscillants gauches ayant une forme initiale et une longueur fixées.

## 2. Définitions et notations

Nous utilisons ici la terminologie habituelle sur les tableaux et nous supposons connu l'algorithme de Robinson-Schensted tel que présenté dans [Sche]. Les définitions non précisées ci-dessous pourront être trouvées dans cet article.

Nous notons indifféremment par  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  une *partition* et le *diagramme de Ferrers* correspondant, représenté en notation "Française", c'est à dire avec la plus longue part  $\lambda_1$  sur la ligne inférieure (ligne 1) et où les parts nulles sont interdites. La *cellule* du diagramme sur les ligne  $i$  et colonne  $j$  est notée  $c=(i, j)$  et ainsi,  $c \in \lambda$  si et seulement si  $1 \leq j \leq \lambda_i$ . Si  $\mu \subseteq \lambda$ , la *forme gauche*  $\lambda/\mu$  est l'ensemble de cellules  $\{c \mid c \in \lambda \text{ et } c \notin \mu\}$ . Si  $|\lambda/\mu|=n$ , nous écrivons  $|\lambda/\mu| \vdash n$  et parlons de *partition (gauche)* de  $n$  pour  $\lambda/\mu$ .

Un *tableau de Young T de forme*  $\lambda/\mu$  est un étiquetage des cellules de  $\lambda/\mu$  par des entiers positifs de sorte que les lignes et colonnes soient croissantes au sens large. Nous notons  $T_c$  ou  $T(i, j)$  l'étiquette de la cellule  $c=(i, j)$  ; ainsi,  $k \in T$  signifie  $k=T(i, j)$  pour un certain couple  $i, j$ . Un tableau de Young est *partiel* si ses étiquettes sont distinctes, *standard* s'il est partiel et les étiquettes comprises entre 1 et  $n=|\lambda/\mu|$ . Par exemple, lorsque  $\lambda=(5, 4, 2)$  et  $\mu=(3, 2)$ , les deux tableaux suivants sont respectivement partiel et standard.



Figure 2

Les ensembles de tableaux de Young partiels et standards de forme  $\lambda/\mu$  sont notés respectivement  $PT(\lambda/\mu)$  et  $ST(\lambda/\mu)$ , l'ensemble  $\overline{PT}(\lambda/\mu)$  désignant les tableaux de Young partiels de forme  $\lambda/\mu$  avec décroissance en ligne et colonne.

Nous notons  $f^{\lambda/\mu}$  le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda/\mu$ .

Une *involution partielle*  $\pi$  sur  $[n]=\{1, 2, \dots, n\}$  est un ensemble de paires verticales d'entiers de  $[n]$  deux à deux distincts

$$\pi = \left( \begin{matrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{matrix} \right) \text{ où } i_1 < i_2 < \dots < i_k < n \text{ et } i_p > j_p \text{ (} 1 \leq p \leq k \text{),}$$

ces paires verticales constituant les cycles de l'involution qui sera toujours sans point fixe. Nous notons  $\tilde{\pi} = i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k$  et  $\tilde{\pi} = j_1 \ j_2 \ \dots \ j_k$  les lignes supérieure et inférieure de cette involution.

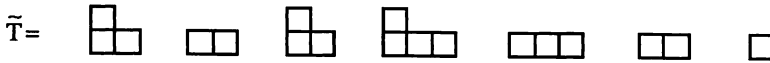
L'ensemble des involutions partielles sur  $[n]$  est l'ensemble  $\text{PINV}(n)$ .

**Définition 2.1** Un *tableau oscillant gauche* de formes initiale  $\alpha$  et finale  $\beta$  et de longueur  $n$  est une suite  $\tilde{T}$  de diagramme de Ferrers (ou partitions)

$$\tilde{T} = (\alpha = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n = \beta)$$

où  $\lambda_k$  est obtenue à partir de  $\lambda_{k-1}$  par ajout ou suppression d'une cellule. L'ensemble de tels tableaux est noté  $\text{TOG}_n(\alpha \rightarrow \beta)$  et leur nombre  $\tilde{f}_n^{\alpha \rightarrow \beta}$ .

**Exemple 2.2**



Ainsi  $\tilde{T} \in \text{TOG}_6\{(2,1) \rightarrow (1)\}$ .

Cette notion de tableaux oscillants gauches généralise donc les notions de

- tableaux oscillants [DDF, SUN, DF, MacL] qui correspondent au cas où  $\alpha = \emptyset$ ,
- tableaux de Young standards correspondant au cas où  $\alpha = \emptyset$  et où les seules opérations admises dans "l'histoire" du tableau sont des adjonctions de cellules.

Dans le prochain paragraphe, nous présentons l'algorithme fondamental à partir duquel nous obtiendrons dans la section suivante une correspondance de type Robinson-Schensted pour les tableaux oscillants gauches. Pour terminer, nous verrons que cette correspondance possède des propriétés analogues à celle de Robinson-Schensted, en particulier lorsque l'on permute les deux tableaux oscillants gauches obtenus ce qui a pour effet d'inverser (en un certain sens que nous définirons) l'involution partielle.

### 3. L'algorithmme fondamental

**Théorème 3.1** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux partitions et  $n$  un entier. Il existe une bijection

$$\begin{aligned} \theta : \text{TOG}_n(\alpha \rightarrow \beta) &\rightarrow \text{PINV}(n) \times \text{PT}(\beta / \mu) \times \overline{\text{PT}}(\alpha / \mu) \\ \tilde{T} &\mapsto (\pi, P, Q) \\ \text{telle que } \pi \cup P \cup Q &= [n] \text{ (où } \cup \text{ désigne l'opérateur union disjointe).} \end{aligned}$$

**Remarque 3.2** Dans l'énoncé de ce théorème, la partition  $\mu$  décrit l'ensemble de toutes les partitions  $\lambda$  telles que  $\lambda \subseteq \alpha$  et  $\lambda \subseteq \beta$ .

On déduit immédiatement de ce théorème le résultat suivant.

**Corollaire 3.3** Le nombre de tableaux oscillants gauches de formes initiale  $\alpha$  et finale  $\beta$  et de longueur  $n$  est donné par

$$\tilde{f}_n^{\alpha \rightarrow \beta} = \sum_{\substack{k,l \geq 0 \\ n-k-l \text{ pair}}} \binom{n}{k, l, n-k-l} (n-k-l)!! \sum_{\substack{\mu: \alpha/\mu \text{---} k \\ \beta/\mu \text{---} l}} f^{\alpha/\mu} f^{\beta/\mu}.$$

En considérant des formes particulières pour  $\alpha$  et  $\beta$ , nous retrouvons les formules d'énumération suivantes pour les tableaux oscillants [DDF, Fav, Sun].

**Corollaire 3.4**

- (i)  $\tilde{f}_n^{\emptyset \rightarrow \beta} = \binom{n}{|\beta|} (n-|\beta|)!! f^\beta$ ,
- (ii)  $\tilde{f}_{2n}^{\emptyset \rightarrow \emptyset} = (2n)!!$ .

Avant de prouver le théorème 3.1, nous allons définir les différents processus de suppression dans un tableau de Young gauche partiel que nous serons amenés à considérer.

Soit  $P \in \text{PT}(\lambda / \mu)$ . Trois types de suppression peuvent être réalisées sur ce tableau.

- Suppression d'une cellule vide.

Il s'agit de la suppression d'une cellule appartenant à  $\mu$  en position  $(i, j)$  telle que les cellules en position  $(i, j+1)$  et  $(i+1, j)$  n'appartiennent ni à  $\mu$ , ni à  $\lambda/\mu$  (figure 3 ci-après, suppression de la cellule vide  $(5, 1)$ ).

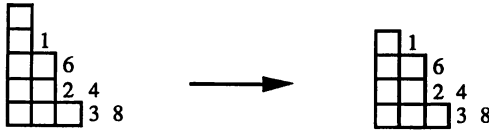


Figure 3

• Suppression d'une cellule contenant un entier.

Il s'agit de la suppression d'une cellule en position  $(i, j)$  de  $\lambda/\mu$  contenant un certain entier  $k$ , sur le même principe que dans l'algorithme de Robinson-Schensted. Cet entier  $k$  vient prendre la place du plus grand entier de la ligne  $i-1$  qui lui soit inférieur (lorsqu'il existe), ce processus étant itéré jusqu'à ce que l'une des deux situations suivantes se produisent.

- Suppression externe :

Le processus se termine par l'expulsion d'un entier de la première ligne de  $\lambda/\mu$  (la figure 4 représente la suppression de la cellule contenant 6 ce qui conduit à l'expulsion de l'entier 3).

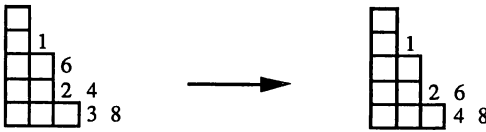


Figure 4

- Suppression interne :

Le processus se termine lorsque, à une certaine étape, l'entier  $m$  expulsé de la ligne  $p+1$  est plus petit que tous ceux de la ligne  $p$  ( $p > 0$ ) de  $\lambda/\mu$  ou lorsque cette ligne  $p$  ne comporte aucun entier (cas où  $\lambda_p = \mu_p$ ). Dans ce cas, l'entier  $m$  est placé dans la dernière cellule de  $\mu$  sur la ligne  $p$ . Ainsi, une cellule "coin" de  $\mu$  est remplie (la figure 5 représente la suppression de la cellule contenant l'entier 1 ce qui a pour effet de remplir la cellule  $(3, 2)$ ).

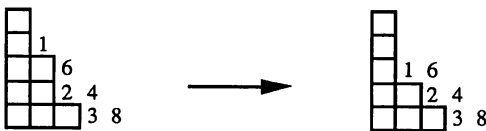


Figure 5

Preuve du théorème 3.1

Soit  $\tilde{T} = (\alpha = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n = \beta)$  un tableau appartenant à  $\text{TOG}_n(\alpha \rightarrow \beta)$ . On construit une suite  $(\emptyset_\alpha)$  désignant le tableau vide de forme  $\alpha/\alpha$

$$(\pi_0, P_0, Q_0) = (\emptyset, \emptyset_\alpha, \emptyset_\alpha), (\pi_1, P_1, Q_1), \dots, (\pi_n, P_n, Q_n) = (\pi, P, Q)$$

à l'aide de l'algorithme suivant (voir exemple 3.5).

**Algorithme C.** Supposons qu'à la  $k$ ème étape,  $\lambda_k$  soit obtenue à partir de  $\lambda_{k-1}$  par :

(1) ajout d'une cellule en position  $(i, j)$  ; dans ce cas

$$Q_k = Q_{k-1}, \pi_k = \pi_{k-1},$$

$$P_k(i, j) = k \text{ (ajout d'une cellule à } P_{k-1} \text{ étiquetée } k) ;$$

(2) suppression d'une cellule en position  $(i, j)$  ; dans ce cas, on supprime la cellule en position  $(i, j)$  de  $P_{k-1}$ , le processus conduisant au tableau  $P_k$  par

(a) une suppression externe :

$$Q_k = Q_{k-1},$$

on ajoute le couple  $(k, m)$  à  $\pi_{k-1}$  où  $m$  est l'entier expulsé de  $P_{k-1}$  ;

(b) une suppression interne :

$$Q_k(i, j) = k \text{ où } (i, j) \text{ est la cellule de } P_{k-1} \text{ ayant été remplie,}$$

$$\pi_k = \pi_{k-1};$$

(c) une suppression de cellule vide :

$$Q_k(i, j) = k \text{ où } (i, j) \text{ est la cellule supprimée,}$$

$$\pi_k = \pi_{k-1}.$$

Un exemple de cette construction est donné ci-dessous (exemple 3.5).

Il est facile de voir que, partant de  $\tilde{T} \in \text{TOG}_n(\alpha \rightarrow \beta)$ , cet algorithme fournit

$$P \in \text{PT}(\beta / \mu) : \text{à chaque étape de l'algorithme, } P_k \in \text{PT}(\lambda_k / \mu_k),$$

$$Q \in \overline{\text{PT}}(\alpha / \mu) : \text{en effet, } Q_0 = \emptyset_\alpha \text{ et, à chaque étape, si } P_k \in \text{PT}(\lambda_k / \mu_k) \text{ alors}$$

$$Q_k \in \overline{\text{PT}}(\alpha / \mu_k) \text{ (cas 2b et 2c de l'algorithme),}$$

$$\pi \in \text{PINV}(n) \text{ par construction.}$$

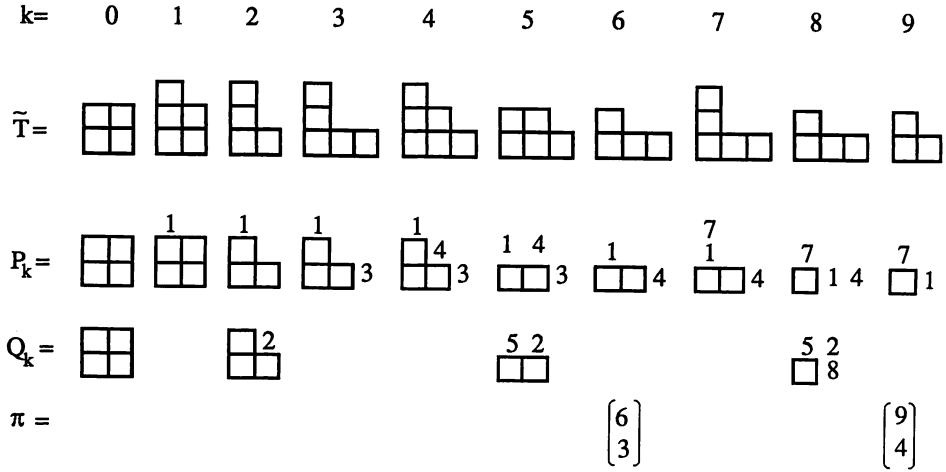
De plus,  $\pi \cup P \cup Q = [n]$  car

$Q$  est étiqueté par des entiers correspondant aux étapes de suppression (cas 2b et 2c),

$P$  est étiqueté par des entiers correspondant aux étapes d'insertion (cas 1), entiers non supprimés lors d'étapes ultérieures (cas 2a),

$\pi$  est constituée de couples dont les entiers correspondent aux étapes de suppression externe (cas 2a) et aux entiers expulsés.

**Exemple 3.5**



Ainsi  $\tilde{T} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; \begin{matrix} 7 \\ \square 1 \end{matrix} ; \begin{matrix} 5 & 2 \\ \square & 8 \end{matrix} \right\} .$

Pour montrer que cette application est bijective, nous allons construire son inverse. Pour cela, nous donnons un algorithme qui, partant d'un triplet  $(\pi, P, Q)$  appartenant à  $PINV(n) \times PT(\beta/\mu) \times \overline{PT}(\alpha/\mu)$  tel que  $\pi \cup P \cup Q = [n]$ , fournit un tableau  $\tilde{T}$  de  $TOG_n(\alpha \rightarrow \beta)$ .

Soit donc le triplet  $(\pi, P, Q)$ .

On construit une suite  $(P_n=P, Q_n=Q), (P_{n-1}, Q_{n-1}), \dots, (P_0, Q_0)$  à l'aide de l'algorithme suivant.

**Algorithme  $\mathcal{A}^{-1}$ .** Supposons qu'à l'étape  $k, k$  variant de  $n$  à  $1$ ,

(1<sup>-1</sup>) l'entier  $k$  soit l'étiquette d'une cellule de  $P_k$  :

on supprime la cellule de  $P_k$  contenant cet entier ce qui donne  $P_{k-1}$ ,

$Q_{k-1} = Q_k$  ;

(2<sup>-1</sup>) l'entier  $k$  n'appartient pas à  $P_k$  :

(a) le couple  $(k,m)$  appartient à  $\pi$

on insère (en utilisant l'algorithme de Robinson-Schensted) l'entier  $m$  dans

$P_k$  pour obtenir  $P_{k-1}$ ,

$Q_{k-1} = Q_k$  ;



(b)  $Q_k(i, j)=k$  et  $P_k(i, j)=m$

on vide la cellule  $(i, j)$  de  $Q_k$  pour obtenir  $Q_{k-1}$ ,

on insère l'entier  $m$  dans  $P_k$  à partir de la ligne  $i+1$  en utilisant également l'algorithme de Robinson-Shensted et la cellule  $(i, j)$  de  $P_k$  devient vide pour former  $P_{k-1}$ ,

(c)  $Q_k(i, j)=k$  et  $P_k$  ne possède pas de cellule en position  $(i, j)$ .

on vide la cellule  $(i, j)$  de  $Q_k$  pour obtenir  $Q_{k-1}$ ,

on ajoute la cellule vide  $(i, j)$  à  $P_k$  pour obtenir  $P_{k-1}$ .

On obtient ainsi, à l'issue de cet algorithme, la suite de tableaux  $(P_n=P, P_{n-1}, \dots, P_0)$  où  $P_k \in PT(\lambda_k / \mu_k)$ . Le tableau  $\tilde{T}$  est alors  $\tilde{T} = (\alpha = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n = \beta)$ .

Il est facile de voir que cet algorithme  $\mathcal{Q}^{-1}$  correspond exactement à la construction inverse de celle fournie par l'algorithme  $\mathcal{Q}$ ,

l'étape  $(1^{-1})$  correspondant à la suppression d'une cellule,

l'étape  $(2^{-1})$  correspondant à l'insertion d'une cellule :

$(2^{-1}a)$  étant une insertion externe,

$(2^{-1}b)$  étant une insertion interne,

$(2^{-1}c)$  étant l'insertion d'une cellule vide.

Un exemple d'application de l'algorithme  $\mathcal{Q}^{-1}$  est donné dans la deuxième partie de l'exemple 3.8 (3.8.2). Il correspond à la construction inverse de celle de l'exemple 3.5.

Il est maintenant naturel de se demander ce qu'il advient lorsque l'on considère le miroir du tableau oscillant gauche lorsque l'on applique l'algorithme  $\mathcal{Q}$ . Pour cela, nous allons dans un premier temps introduire quelques notations et définitions.

**Définition 3.6**

(i) A un tableau  $\tilde{T} = (\alpha = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n = \beta)$  appartenant à  $TOG_n(\alpha \rightarrow \beta)$ , on associe son *miroir*  $\tilde{T}^R = (\beta = \lambda_n, \dots, \lambda_1, \lambda_0 = \alpha)$  appartenant à  $TOG_n(\beta \rightarrow \alpha)$ .

(ii) Etant donné un entier  $n$  et un tableau  $P \in PT(\lambda / \mu)$  (resp.  $P \in \overline{PT}(\lambda / \mu)$ ) on définit le tableau  $P^c \in \overline{PT}(\lambda / \mu)$  (resp.  $P \in PT(\lambda / \mu)$ ) par  $P^c(i, j)=n+1-P(i, j)$  pour toute cellule  $(i, j) \in \lambda / \mu$ .

(iii) A une involution partielle  $\pi \in PINV(n)$  ayant pour cycles les couples  $(i_p, j_p)$ , on associe l'involution  $\pi^c \in PINV(n)$  dont les cycles sont les couples  $(n+1-j_p, n+1-i_p)$ .

**Théorème 3.7** Soit  $\tilde{T}$  un tableau oscillant gauche tel que  $\theta(\tilde{T}) = (\pi, P, Q)$ .

Alors  $\theta(\tilde{T}^R) = (\pi^c, Q^c, P^c)$ .

**Preuve.** Nous n'en donnerons ici que le principe.

Etant donné un tableau  $\tilde{T} = (\alpha = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n = \beta)$  tel que  $\theta(\tilde{T}) = (\pi, P, Q)$ ,  
 posons  $(\sigma, A, B) = (\pi^c, Q^c, P^c)$ .

Considérons alors la suite

$$(\pi_0, P_0, Q_0) = (\emptyset, \emptyset_\alpha, \emptyset_\alpha), (\pi_1, P_1, Q_1), \dots, (\pi_n, P_n, Q_n) = (\pi, P, Q)$$

obtenue en appliquant l'algorithme  $\mathcal{Q}$  au tableau  $\tilde{T}$ ,  
 et la suite

$$(A_n = A, B_n = B), (A_{n-1}, B_{n-1}), \dots, (A_0, B_0)$$

obtenue en appliquant l'algorithme  $\mathcal{Q}^{-1}$  au triplet  $(\sigma, A, B)$ .

La preuve du théorème consiste à montrer que, à toute étape  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , les tableaux  $P_k$  et  $A_{n-k}$  vérifient

$$P_k \in PT(\lambda_k / \mu_k) \text{ pour une certaine forme } \mu_k,$$

$$A_{n-k} \in PT(\lambda_k / \gamma_k) \text{ pour une certaine forme } \gamma_k,$$

c'est à dire que les formes "globales" de ces deux tableaux sont identiques, fait dont nous déduisons le résultat attendu, soit

$$\theta^{-1}(\pi^c, Q^c, P^c) = \tilde{T}^R.$$

La preuve de ce fait consiste à examiner les différents cas intervenant dans les algorithmes  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q}^{-1}$  appliqués en parallèle aux suites  $(\pi_k, P_k, Q_k)$  et  $(A_{n-k}, B_{n-k})$ , et résulte essentiellement des propriétés de l'algorithme de Robinson-Schensted pour un tableau gauche.

Nous nous contentons de donner ici un exemple illustrant ce résultat, plutôt que d'effectuer cette énumération des différents cas à examiner.

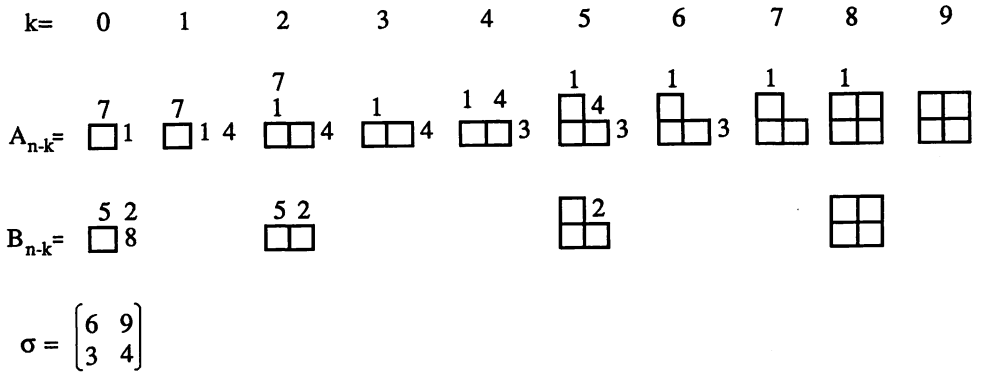
**Exemple 3.8**

**(3.8.1)** Le triplet  $(\pi, P, Q)$  obtenu par application de l'algorithme  $\mathcal{Q}$  au tableau  $\tilde{T}$ , ce tableau étant le miroir de celui considéré lors de l'exemple 3.5.

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{T} =$										
$P_k =$										
$Q_k =$										
$\pi =$							$\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$		

Ainsi  $\tilde{T} \longrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ \square & 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 3 \\ \square & 9 \end{bmatrix} \right\}$  et, pour  $0 \leq k \leq n=9$ ,  
 $P_k \in PT(\lambda_k / \mu_k)$  pour une certaine forme  $\mu_k$ .

(3.8.2) L'algorithme  $Q^{-1}$  appliqué au triplet  $(\sigma, A, B) = (\pi^c, Q^c, P^c)$ .



On peut constater que  $A_{n-k} \in PT(\lambda_k / \gamma_k)$  pour une certaine forme  $\gamma_k$ , et ceci pour tout  $k$  compris entre 0 et  $n=9$ . Le tableau ainsi obtenu est donc exactement le tableau miroir du tableau précédent.

### 4. La correspondance de Robinson-Schensted pour les tableaux oscillants gauches.

A partir de l'algorithme fondamental présenté précédemment, nous obtenons une correspondance pour les tableaux oscillants gauches analogue à celle de Robinson-Schensted.

**Théorème 4.1** Soient  $\alpha$  une partition et  $n$  un entier. Il existe une bijection

$$\Phi : \text{PINV}(2n) \times PT(\alpha / \mu) \times \overline{PT}(\alpha / \mu) \rightarrow \text{TOG}_n(\alpha \rightarrow \beta) \times \text{TOG}_n(\alpha \rightarrow \beta)$$

$$(\pi, P, Q) \mapsto (\tilde{P}, \tilde{Q})$$

où  $\pi \cup P \cup Q = [2n]$ .

Preuve. Elle est immédiate compte-tenu du théorème 3.1. En effet

$$(\pi, P, Q) \xrightarrow{\theta} \tilde{T} = (\alpha = \lambda_0, \dots, \lambda_n = \beta, \dots, \lambda_{2n} = \alpha)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{P} = (\alpha = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n = \beta) \\ \tilde{Q} = (\alpha = \lambda_{2n}, \lambda_{2n-1}, \dots, \lambda_n = \beta) \end{array} \right\}.$$

Nous déduisons immédiatement de ce théorème l'identité suivante.

**Corollaire 4.2** 
$$\sum_{\beta} (\tilde{f}_n^{\alpha \rightarrow \beta})^2 = \sum_k \binom{2n}{k, k, 2n-2k} (2n-2k)!! \sum_{\mu: \alpha/\mu \vdash k} (f^{\alpha/\mu})^2.$$

La bijection  $\Phi$  du théorème 3.1 est l'analogie de la correspondance de Robinson-Schensted pour les tableaux standards. Elle permet, en la particulierisant, de retrouver les identités connues pour les tableaux oscillants [DDF, Fav, Sun], les tableaux standards gauches [SaSt] et les tableaux standards [Sche].

**Corollaire 4.3** (i) 
$$\sum_{\beta} (\tilde{f}_n^{\emptyset \rightarrow \beta})^2 = (2n)!! ,$$

(ii) 
$$\sum_{\beta/\alpha \vdash n} (f^{\beta/\alpha})^2 = \sum_k \binom{n}{k} k! \sum_{\alpha/\mu \vdash n-k} (f^{\alpha/\mu})^2 ,$$

(iii) 
$$\sum_{\beta \vdash n} (f^{\beta})^2 = n! .$$

Preuve.

(i) est une conséquence immédiate du corollaire 3.3 en prenant  $\alpha = \emptyset$  ;

(ii) est une conséquence du théorème 3.1 ; il suffit pour cela de se restreindre aux tableaux "oscillants"  $\tilde{P}$  et  $\tilde{Q}$  pour lesquels aucune suppression de cellule n'a lieu (tableaux standards gauches). La correspondance fournit alors des triplets  $(\pi, P, Q)$  tels que

$$\pi \in \text{PINV}(2n),$$

$$P \in \text{PT}(\alpha/\mu) \text{ avec } \tilde{\pi} \cup P = \{1, 2, \dots, n\},$$

$$Q \in \overline{\text{PT}}(\alpha/\mu) \text{ avec } \hat{\pi} \cup Q = \{n, n+1, \dots, 2n\} ;$$

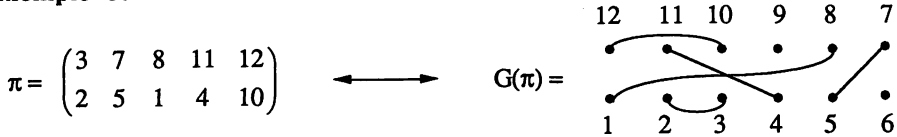
Ceci correspond à ne jamais employer la règle (2c) (réciproquement (2<sup>-1</sup>c)) de l'algorithme  $\mathcal{Q}$  (réciproquement  $\mathcal{Q}^{-1}$ ).

(iii) même raison que précédemment avec  $\alpha = \emptyset$ .

### 5. Propriété de la correspondance $\Phi$

Une involution  $\pi \in \text{PINV}(2n)$  peut être représentée sous la forme d'un *graphe*  $G(\pi)$  ayant pour ensemble de sommets les entiers de  $[2n]$  disposés sur deux lignes parallèles, de sorte que les entiers  $i$  et  $2n+1-i$  soient en correspondance, et pour arêtes les paires verticales constituant  $\pi$  (les cycles de l'involution).

#### Exemple 5.1

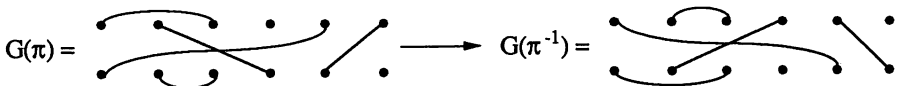


#### Définition 5.2

Etant donnée  $\pi \in \text{PINV}(2n)$ , on définit son *inverse*  $\pi^{-1} \in \text{PINV}(2n)$  comme étant l'involution dont le graphe  $G(\pi^{-1})$  est le graphe symétrique de  $G(\pi)$  par rapport à un axe horizontal. Autrement dit, au cycle  $(i_p, j_p)$  de  $\pi$  correspond le cycle  $(2n+1-j_p, 2n+1-i_p)$  dans  $\pi^{-1}$ , et ainsi  $\pi^{-1} = \pi^c$  (définition 3.6).

L'inverse d'une involution partielle ainsi défini correspond exactement à l'inverse d'une permutation du groupe symétrique lorsque celle-ci est représentée de manière analogue sous forme d'un graphe.

**Exemple 5.3** A l'involution  $\pi$  de l'exemple précédent correspond l'involution inverse  $\pi^{-1}$  dont le graphe est le suivant.



**Proposition 5.4** Soit  $\text{PINV}_c(n)$  l'ensemble des involutions partielles sur  $[n]$

- dont les cycles de longueur 2 sont bi-coloriés,
- pouvant admettre des points fixes.

Il existe une bijection  $\zeta : \text{PINV}_c(n) \longrightarrow \{\pi \in \text{PINV}(2n) : \pi = \pi^{-1}\}$ .

La figure suivante suffit pour se convaincre de la validité de ce résultat.

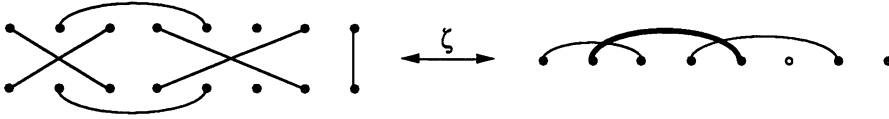


Figure 6

**Théorème 5.5** Soient  $n$  un entier et  $\alpha$  une partition.

Soit  $(\pi, P, Q)$  appartenant à  $\text{PINV}(2n) \times \text{PT}(\alpha/\mu) \times \overline{\text{PT}}(\alpha/\mu)$  tel que  $\phi(\pi, P, Q) = (\tilde{P}, \tilde{Q})$ .

Alors  $\phi(\pi^{-1}, Q^c, P^c) = (\tilde{Q}, \tilde{P})$ .

Ce résultat est une conséquence immédiate des théorèmes 3.7 et 4.1. Nous en déduisons l'identité suivante.

**Corollaire 5.6** 
$$\sum_{\beta} \tilde{f}_n^{\alpha \rightarrow \beta} = \sum_k \binom{n}{k} 2^k I_{n-k} \sum_{\mu: \alpha/\mu \vdash k} f^{\alpha/\mu}$$

où  $I_p =$  coefficient de  $\frac{x^p}{p!}$  dans  $e^{x+x^2}$ .

Preuve.

Soient  $\sigma$  appartenant à  $\text{PINV}_C(n)$  telle que  $\zeta(\sigma) = \pi$ , et  $P$  un tableau de  $\text{PT}(\alpha/\mu)$  tel que  $\pi \circ P \circ P^c = [2n]$ . Comme  $\pi = \pi^{-1}$ , nous avons

$$(\sigma, P) \xleftrightarrow{\zeta} (\pi, P) \longleftrightarrow (\pi, P, P^c) = (\pi^{-1}, P, P^c) \xleftrightarrow{\phi} (\tilde{P}, \tilde{P}) \longleftrightarrow \tilde{P}.$$

On déduit alors immédiatement de ce fait la formule du corollaire.

Comme précédemment, en particulierisant la correspondance  $\Phi$ , nous retrouvons les identités suivantes pour les tableaux oscillants, les tableaux standards gauches et les tableaux standards.

**Corollaire 5.7** (i) 
$$\sum_{\beta} \tilde{f}_n^{\emptyset \rightarrow \beta} = I_n = \text{coefficient de } \frac{x^n}{n!} \text{ dans } e^{x+x^2},$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{(n-2k)! k!}.$$

$$(ii) \sum_{\beta/\alpha \vdash n} f^{\beta/\alpha} = \sum_k \binom{n}{k} \text{Inv}(n-k) \sum_{\mu: \alpha/\mu \vdash k} f^{\alpha/\mu},$$

où  $\text{Inv}(p) = \text{coefficient de } \frac{x^p}{p!} \text{ dans } e^{x+\frac{x^2}{2}}$ .

$$(iii) \sum_{\beta \vdash n} f^{\beta} = \text{Inv}(n).$$

Un raisonnement analogue à celui prouvant le corollaire 4.3 permet d'obtenir ces résultats, compte-tenu du théorème 5.5.

**Remarque 5.8** Il est possible de mettre en évidence d'autres propriétés de cette correspondance pour les tableaux oscillants gauches, propriétés classiques dans le cas des tableaux standards. Ceci sera l'objet d'un prochain article.

## Références bibliographiques

- [DDF] M. Delest, S. Dulucq, L. Favreau, An analogue to Robinson-Schensted correspondence for oscillating tableaux, Actes du 20ième Séminaire Lotharingien de Combinatoire, L. Cerlienco et D. Foata éd., Alghero, Sardaigne, 1988.
- [DF] S. Dulucq, L. Favreau, A Combinatorial Model for Bessel Polynomials, Proc. Third International Symposium on Orthogonal Polynomials and their applications, Erice, Sicily, C. Brezinski, L. Gori and A. Ronveaux ed., Lecture Notes in Math., Springer Verlag, 1990, 243-249.
- [Fav] L. Favreau, "Combinatoire des tableaux oscillants et des polynômes de Bessel", Thèse, LaBRI Université Bordeaux I, 1991.
- [Knu] D.E. Knuth, Permutations, matrices and generalized Young tableaux, *Pacific J. Math.* 34(1970), 709-727.
- [McL] T.J. McLarnan, "Tableau recursions and symmetric Schensted Correspondences for ordinary, shifted and oscillating tableaux", Ph.D. Thesis, UCSD, 1986.
- [Rob] G. de B. Robinson, On representations of the symmetric group, *Amer. J. Math.* 60(1934), 745-760.
- [Sag] B.E. Sagan, Shifted tableaux, Schur Q-functions, and a conjecture of R. Stanley, *J. Comb. Theory (A)*, 45(1987), 62-103.
- [SaSt] B.E. Sagan, R.P. Stanley, Robinson-Schensted algorithms for skew tableaux, *J. Comb. Theory (A)* 55(1990), 161-193.
- [Sche] C. Schensted, Longest increasing and decreasing subsequences, *Canad. J. Math.* 13(1961), 179-191.

- [Schü] M.P. Schützenberger, Quelques remarques sur une construction de Schensted, *Math. Scand.* 12(1963), 117-128.
- [Sun] S. Sundaram, "On the combinatorics of representations of  $Sp(2n, \mathbb{C})$ ", Ph.D. Thesis, MIT, 1986.
- [Wor] D. Worley, "A theory of shifted Young tableaux", Ph.D. Thesis, MIT, 1984.
- [You] A. Young, On quantitative substitutional analysis II, *Proc. London Math. Soc. (1)* 34(1902), 361-397.