FONCTIONS DE BESSEL, EMPILEMENTS ET TRESSES

J.M. Fedou, LaBRI*
Département d'Informatique
351, Cours de la Libération
33405 Talence, Cedex France

Abstract. In this paper, we show that the inverse of the basic Bessel function ${}^qJ_0$ and the quotient of the basic Bessel functions, ${}^qJ_1$ and ${}^qJ_0$ are the generating functions of some heaps of sticks. Moreover, we show that the numerators of the rational functions appearing in the development of these functions are the invariant polynomials of some kind of braids.

Résumé. Nous montrons dans cet article que l'inverse du q-analogue de la fonction de Bessel ${}^qJ_0$ ainsi que le rapport des q-analogues des fonctions de Bessel ${}^qJ_1$ and ${}^qJ_0$ sont les fonctions génératrices de certains empilements de demi-segments. Nous montrons que les numérateurs des fonctions rationnelles apparaissant dans le développement de ces quotients sont des polynômes invariants de certains éléments du groupe des tresses.

1. introduction

Récemment sont intervenus les q-analogues des fonctions de Bessel dans des problèmes d'énumération de polyominos, par exemple les polyominos parallélogrammes ou diagrammes de Ferrers gauches (M.P. Delest et J.M. Fedou [9]) et les polyominos convexes dirigés (M. Bousquet-Melou [5]) selon les paramètres aire et nombre de colonnes.

ENUMERATION DE DIAGRAMMES DE FERRERS GAUCHES ET FONCTIONS DE BESSEL.

Un diagramme de Ferrers est la figure obtenue à partir d'une partition $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$ d'un entier $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ en juxtaposant des rectangles de hauteur 1 et de largeur n_i . Un diagramme gauche de Ferrers est la différence de deux diagrammes de Ferrers (cf. figure 1).

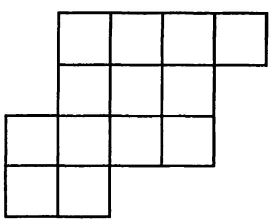


Figure 1. Diagramme de Ferrers gauche d'aire 13 ayant 5 colonnes.

* Unité associée au Centre National de la Recherche Scientifique n° 1304.

This work is partially supported by the PRC Mathématique et Informatique

Ces objets apparaissent également dans la littérature sous le nom de polyominos parallélogrammes . M.P Delest et J.M.Fedou [9] ont montré que la série génératrice F(t;q) des diagrammes de Ferrers gauches selon les paramètres nombre de colonnes et aire s'exprime aisément comme rapport de q-analogue des fonctions de Bessel J_1 et J_0,

$$F(t;q) = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q;q)_n (q;q)_{n+1}} q^{n+1} t^{n+1}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q;q)_n^2} q^n t^n},$$

où $(a;q)_n = (1-a)(1-aq)(1-aq^2) \dots (1-aq^{n-1})$. On remarque en effet que F(t;q) est à un changement de variables près un q-analogue du quotient $\frac{J_1}{J_0}$.

Rappelons que les fonctions de Bessel J_v [10] sont définies pour $v>-1$, par

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{1}{2}x)^{2n+v}}{n!\,\Gamma(v+n+1)},$$

et définissons, pour v entier, le q-analogue de J_v par

$${}^qJ_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n+v}{2}} x^{n+v}}{(q;q)_n (q;q)_{n+v}}.$$

On a alors $F(t;q) = \frac{{}^qJ_1}{{}^qJ_0}(qx)$.

ANCIENNES FORMULES, NOUVEAUX q-ANALOGUES

Ces problèmes ont fait resurgir d'anciennes formules concernant les fonctions de Bessel. Les développements des fonctions $\frac{1}{J_0}$, $\frac{J_1}{J_0}$ ont été étudiés par Carlitz [6], Lehmer [14], Watson [16] et beaucoup d'autres et il semble que la plupart de ces résultats admettent des q-analogues agréables. La figure 2 donne les premiers termes des développements classiques ainsi que leurs q-analogues. En particulier, les numérateurs intervenant dans tous ces développements sont à coefficients entiers positifs, symétriques et semblent unimodaux.

n	a_n	b_n	$a_n(q)$	$b_n(q)$
1	1	1	1	1
2	3	1	$1+q+q^2$	1
3	19	4	$1+2q+4q^2+5q^3+4q^4+2q^5+q^6$	$1+q+q^2+q^3$
4	211	33	$1+3q+8q^2+16q^3+26q^4+33q^5+37q^6+33q^7+26q^8+16q^9+8q^{10}+3q^{11}+q^{12}$	$1+2q+4q^2+6q^3+7q^4+6q^5+4q^6+2q^7+q^8$

Figure 2. premières valeurs des polynômes $a_n(q)$ et $b_n(q)$.

notations. On note,

$$\frac{1}{{}^{q}J_0(x)}=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n(q)}{(q;q)_n^2}\,x^n,$$

$$\frac{{}^{q}J_1(x)}{{}^{q}J_0(x)}=\sum_{n\geq 1}\frac{b_n(q)}{(q;q)_n(q;q)_{n-1}}\,x^n,$$

où $(q;q)_n= (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)$.

Nous donnons dans le paragraphe 2 de cet article une interprétation combinatoire de $J_0, \frac{1}{J_0}, \frac{J_1}{J_0}$ en terme d'empilements de demi-segments et montrons au paragraphe 3 que les polynômes $a_n(q)$ et $b_n(q)$ s'expriment très simplement en terme de tresses valuées.

FONCTIONS GENERATRICES, EMPILEMENTS ET PYRAMIDES

La notion d'empilement de pièces, due à Viennot [15], est une version géométrique de la théorie des monoïdes partiellement commutatifs, introduite en 1969 par Cartier et Foata [8]. Soit un ensemble $\mathcal{S}$ muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$ réflexive et symétrique, dans lequel deux éléments en relation sont dits *en concurrence*. Un *empilement* est un ensemble fini de couples (A,n), où A est élément de s et n est un entier, appelé *niveau* de A, tel que

- deux pièces distinctes de E en concurrence ne sont jamais au même niveau
- si une pièce P de E est de niveau non nul n, il existe une pièce de E en concurrence avec P et de niveau n-1.

D'un point de vue monoïde de commutation, on peut définir un empilement à l'aide d'une suite d'éléments de $\mathcal{S}$. Deux suites $(A_i)_{i=1..n}$ et $(B_i)_{i=1..n}$ sont dites équivalentes lorsque les deux suites sont formées des mêmes éléments et lorsque les couples d'éléments en concurrence sont dans le même ordre, plus précisément lorsqu'il existe une permutation σ de $\{1..n\}$ telle que

- pour tout i, $B_{\sigma(i)} = A_i$,
- pour tout couple d'entiers $i<j$ tels que $A_i \ \mathcal{R}\ A_j$, $\sigma(i)<\sigma(j)$.

Un *empilement* est une classe d'équivalence pour cette relation. Dans ce qui suit on désignera un empilement à l'aide de l'un de ses représentants. On note $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ l'ensemble des empilements d'éléments de $\mathcal{S}$.

Une pièce A_i d'un empilement est dite *maximale* (resp. *minimale*) lorsque aucune des pièces $A_1,\ldots,A_{i-1}$ (resp. $A_{i+1},\ldots,A_n$) n'est en concurrence avec Ai. Les pièces maximales (resp. minimales) correspondent en théorie des monoïdes partiellement commutatifs aux lettres commutant avec toutes les lettres placées à leur gauche (resp. droite). Un empilement dont toutes les pièces sont à la fois maximales et minimales est dit *trivial.* En d'autres termes, un empilement est trivial lorsque aucune de ses pièces n'est en concurrence avec une autre.

L'un des intérêts de la théorie des empilements est de visualiser et d'éclaircir un certain nombre de théorèmes et plus particulièrement les théorèmes d'inversion. Ces théorèmes permettent d'énumérer certaines familles d'empilements relativement à une valuation donnée. On appelle valuation toute application v de l'ensemble des objets dans un anneau de polynômes telle que

- pour tout élément s de $\mathcal{S}$, v(s) est un polynôme sans coefficient constant,
- le nombre d'éléments ayant une composante non nulle relativement à ce monôme est fini, ceci afin de s'assurer de la convergence des séries étudiées.

La valuation d'un empilement est le produit des valuations des pièces qui le composent. On appelle *série génératrice* d'une famille d'empilements la somme des valuations des empilements faisant partie de cette famille. Le théorème 1 ci-dessous est l'analogue du théorème d'inversion de Möbius.

théorème 1 *La série génératrice des empilements de* $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ *est*

$$\sum_{E\in\mathcal{E}(\mathcal{A})} v(E) = \frac{1}{\sum_{F\in\mathcal{T}(\mathcal{A})} (-1)^{|F|} v(E)},$$

où $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ *désigne l'ensemble des empilements triviaux et* $|F|$ *désigne le nombre de pièces de* F.

théorème 2 *Soit* $\mathcal{M}$ *un sous-ensemble de* $\mathcal{A}$. *La série génératrice des empilements (éventuellement vides) ayant toutes leurs pièces maximales dans* $\mathcal{M}$ *est,*

$$\sum_{E,\,\mathrm{Max}(E)\subset\mathcal{M}} v(E) = \frac{\sum_{F\in\mathcal{T}(\mathcal{M}^c)} (-1)^{|F|} v(E)}{\sum_{F\in\mathcal{T}(\mathcal{A})} (-1)^{|F|} v(E)},$$

où $\mathcal{T}(\mathcal{M}^c)$ *désigne l'ensemble des empilements triviaux dans le complémentaire de* $\mathcal{M}$.

Pour les preuves concernant ces théorèmes ainsi que des compléments sur le sujet, le lecteur pourra se reporter à Viennot [15]. Ceci nous amène à une interprétation combinatoire des numérateurs des développements de $\frac{1}{J_0}$ et $\frac{J_1}{J_0}$ à l'aide de certains éléments du groupe des tresses.

GROUPE DES TRESSES

Le groupe des tresses a été introduit par Artin ([2], [3]). Du point de vue de la théorie des groupes, le groupe des tresses à n+1 brins B_n est le groupe libre engendré par les générateurs $x_1, x_2,\ldots, x_n$, satisfaisant aux relations

(1) pour tout i, $1 \le i \le n-1$, $x_i\, x_{i+1}\, x_i = x_{i+1}\, x_i\, x_{i+1}$,

(2) pour tout i,j de $\{1,2\ldots,n\}$ tel que $|\, i-j\,| \ge 2$, $x_i\, x_j = x_j\, x_i$.

On peut visualiser le groupe des tresses de la manière suivante.

Considérons deux ensembles de n+1 points, appelés respectivement origines et extrémités. L'élément x_i du groupe des tresses fait passer un brin joignant i à i+1 au dessus du brin joignant i+1 à i, les autres origines j (j≠i et j≠i+1) étant directement reliées aux extrémités j :

Ces tresses élémentaires se composent aisément ; la tresse f.g s'obtient en reliant les extrémités de f aux origines de g. Ainsi, la relations (1) est représentée figure 4. Les travaux sur le groupe des tresses sont nombreux et variés. Toujours d'un point de vue de la théorie des groupes, le problème du mot ainsi que celui de la conjugaison pour le groupe des tresses ont été résolus par Garside [13]. . Du point de vue topologique, le groupe des tresses est relié à la théorie des noeuds([4]). Récemment, de nombreux développements ont été introduits également en Mécanique Statistique où le groupe des tresses est très proche de la relation de Yang-Baxter ([17]). L'article de Cartier [7] fait le point sur tous les développements récents sur le groupe des tresses.

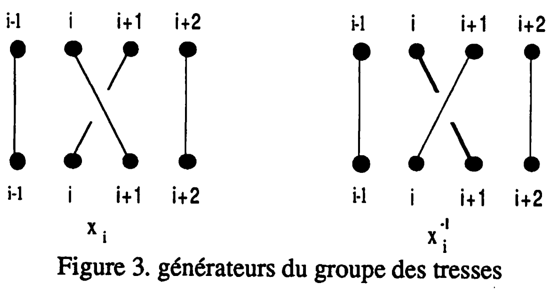


Figure 3. générateurs du groupe des tresses

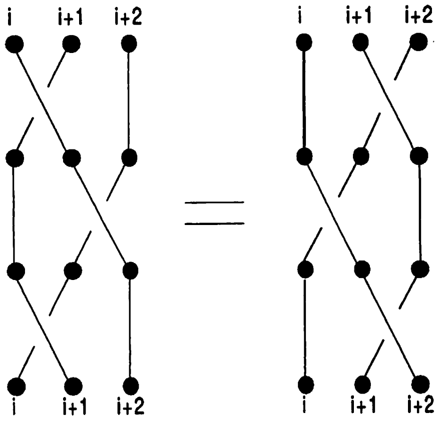


Figure 4. $x_i\, x_{i+1}\, x_i = x_{i+1}\, x_i\, x_{i+1}$

Définition 3. Soit w un mot de $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_{n-1}^{-1}\}^*$ représentant l'élément t du groupe des tresses B_n. La différence entre le nombre de lettres positives x_i intervenant dans w et le nombre de lettres négatives x_i^{-1} dans w est indépendante du représentant w de la tresse t et est appelée *exposant* de t. On note,

$$\exp(t) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} |w|_{x_i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} |w|_{x_i^{-1}}\right).$$

Définition 4. Une fonction Tr de B_n dans $\mathbb{C}$ est une *trace de Markov* lorsqu'elle vérifie les conditions suivantes:

- $Tr(ab) = Tr(a)\, Tr(b)$ pour $a,b \in B_n$,
- $Tr(a\, x_n) = \tau\, Tr(a)$, pour $a \in B_{n-1}$
- $Tr(a\, x_n^{-1}) = \overline{\tau}\, Tr(a)$, pour $a \in B_{n-1}$,

où les constantes τ et $\overline{\tau}$ sont définies par $\tau = Tr(x_n)$ et $\overline{\tau} = Tr(x_n^{-1})$.

En particulier, les traces de Markov sont utilisées pour calculer les polynômes de lien ([4],[17]). Dans ce qui suit, nous utiliserons la trace de Markov triviale Tr définie par $Tr(a) = q^{\exp(a)}$.

Exemple. Si $a = x_1\, x_2\, x_1^{-1}\, x_2$, alors $\exp(a) = 3-1=2$ et $Tr(a) = q^2$.

2. fonctions de Bessel et empilements de demi-segments

2.1. définitions

On considère deux droites parallèles D et D' de $\mathbb{R}^3$, de vecteur directeur $\vec{i}$, et O, O' deux points appartenant respectivement à D et D'. Un point M de D (resp. M' de D') est ainsi entièrement caractérisé par son abscisse m (resp m') dans le repère $(O, \vec{i})$ de D (resp. $(O', \vec{i})$ de D').

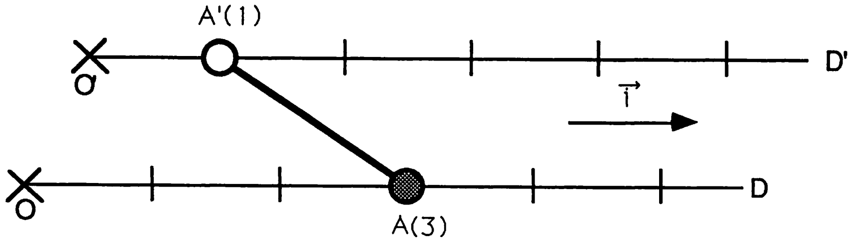


Figure 5. un demi-segment .

définition 5. On appelle *demi-segment* tout intervalle semi-ouvert [A ; A' [où A et A' sont des points à abscisses entières positives a et a' respectivement de D et D'. On appelle *poids* du demi-segment [A,A'[le monôme $\pi([A,A'[)=q^{a+a'}$. Deux demi-segments [A ; A' [et [B ; B' [sont en *concurrence* lorsque ($a\leq b$ et $a'>b'$) ou ($a\geq b$ et $a'<b'$) ou ($a=b$ et $a'=b'$).
Exemple. Le demi-segment dessiné figure 5 est [A(3) ; A'(1) [et son poids est q^4.

définition 6. Un *empilement trivial* de demi-segments est la donnée d'une suite de demi-segments deux à deux disjoints. Le *poids* d'un tel empilement est le produit des poids des demi-segments qui le composent.

Exemple. Le poids de l'empilement trivial dessiné figure 6 est q^{30}.

Un empilement trivial ayant n demi-segments est défini par la donnée de n points à abscisses entières $A_1, A_2,\ldots, A_n$ distincts de D et n points à abscisses entières non nécessairement distincts $A'_1, A'_2,\ldots, A'_n$ de D'. L'entier n étant fixé, la somme S_n des poids de tous les empilements triviaux à n pièces est la some des produits $\prod_{i=1}^{n} q^{a_i+a'_i}$, pour $0\leq a_1<a_2<\ldots<a_n$ et $0\leq a'_1\leq a'_2\leq\ldots\leq a'_n$. En remplaçant a_i par $a_i=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_i$, et a'_i par $a_i=\alpha'_1+\alpha'_2+\ldots+\alpha'_i$on obtient

$$S_n=\sum q^{n\alpha_1+(n-1)\alpha_2+\ldots+2\alpha_{n-1}+\alpha_n}q^{n\alpha'_1+(n-1)\alpha'_2+\ldots+2\alpha'_{n-1}+\alpha'_n},$$

où la somme est prise sur tous les entiers $\alpha_1\geq 0$, $\alpha_2>0,\ldots,\alpha_n>0$, et $\alpha'_1\geq 0,\alpha'_2\geq 0,\ldots,\alpha'_n\geq 0$. Il vient donc

$$S_n=\frac{q^{\binom{n}{2}}}{(q;q)_n^2}.$$

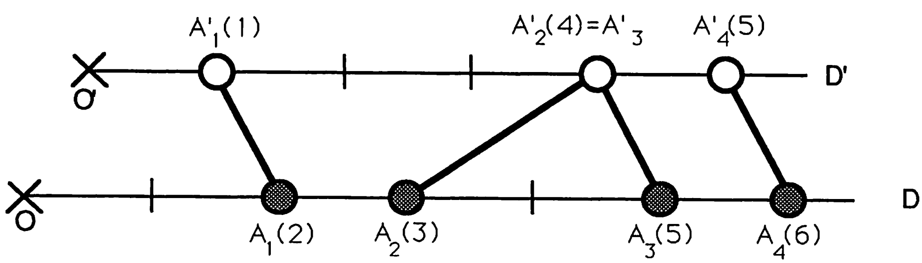


Figure 6. Un empilement trivial.

définition 7. Un *empilement* de demi-segments est la donnée d'une suite de demi-segments. Deux suites de demi-segments définissent le même empilement lorsque elles sont formées des mêmes demi-segments et lorsque les demi-segments en concurrence sont dans le même ordre.

exemple. L'empilement dessiné figure 7 correspond aux suites de points

$([A_1,A'_1[\, , [A_2,A'_2[\, , [A_3,A'_3[\, , [A_4,A'_4[\,)$
$= ([A_2,A'_2[\, , [A_1,A'_1[\, , [A_3,A'_3[\, , [A_4,A'_4[\,)$
$= ([A_2,A'_2[\, , [A_3,A'_3[\, , [A_1,A'_1[\, , [A_4,A'_4[\,)$.

définition 8. On dit qu'un demi-segment $[A_k,A'_k[$ est une *pièce maximale* de l'empilement $([A_i,A'_i[)_{i=1..n}$, lorsque chacun des demi segments $[A_i,A'_i[$, pour i=1 à k-1 n'est pas en concurrence avec $[A_k,A'_k[$.

exemple. Les pièces maximales de l'empilement dessiné figure 7 sont $[A_1,A'_1[$ et $[A_2,A'_2[$.

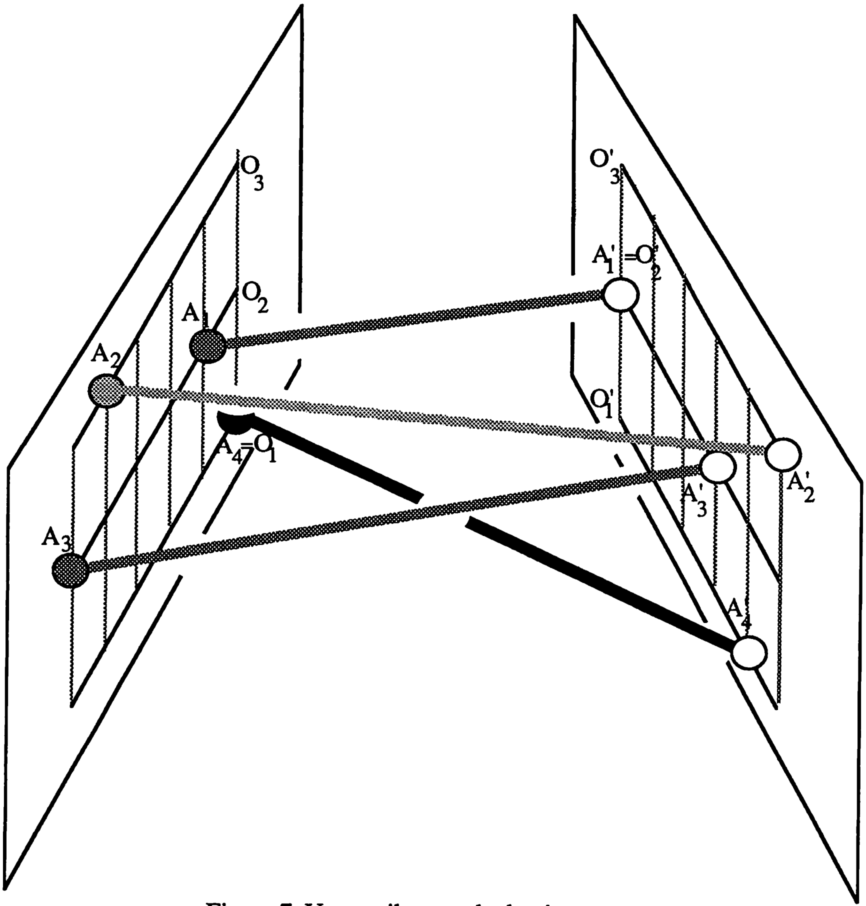


Figure 7. Un empilement de demi-segments

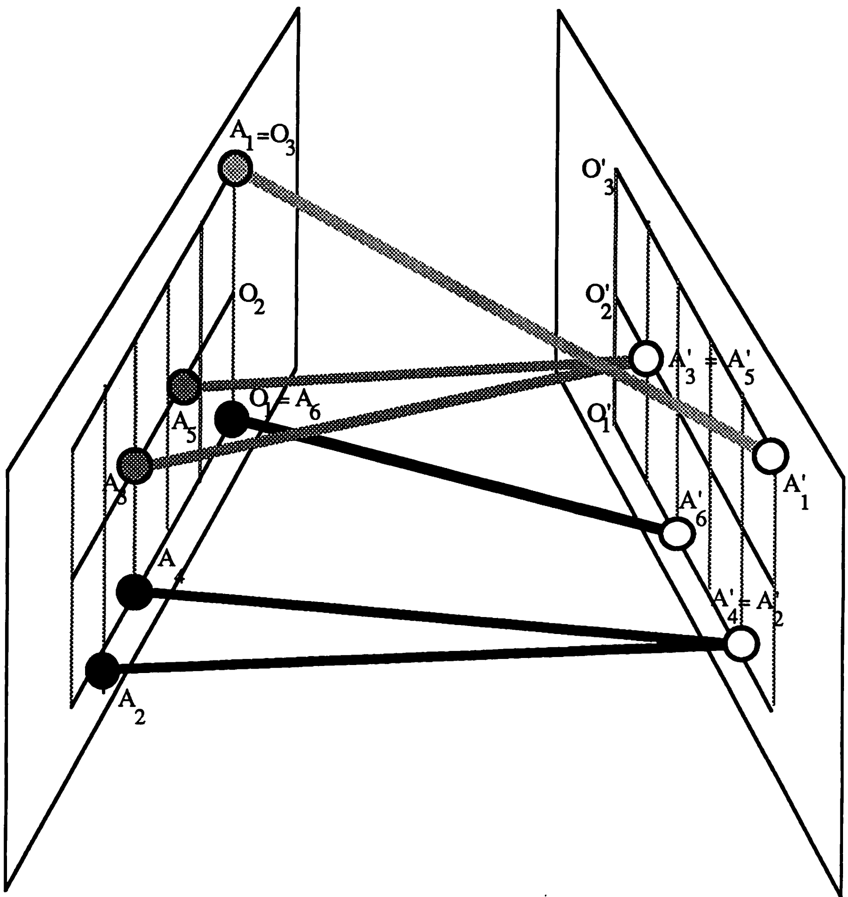


figure 8 Une pyramide de demi-segments

définition 9. On dit que $([A_i,A'_i[)_{i=1..n}$ est l'*écriture standard* d'un empilement de demi-segments lorsque pour tout k, $[A_k,A'_k[$ est la pièce maximale la plus à droite de l'empilement $([A_i,A'_i[)_{i=k..n}$.

exemple. l'écriture standard de l'empilement dessiné figure 5 est

$([A_2,A'_2[\ ,\ [A_1,A'_1[\ ,\ [A_3,A'_3[\ ,\ [A_4,A'_4[\ ).$

2.2. séries génératrices

En appliquant le théorème 1 sur les empilements, on a,

propriété 10. *La série génératrice des empilements de demi-segments est la fonction*

$$\frac{1}{qJ_0}.$$

De même, la somme des poids des empilements triviaux de n+1 pièces telles que $A_1>0$ est

$$\frac{q^{\binom{n+1}{2}}}{(q;q)_n^2}$$

et l'application du théorème 2 montre immédiatement,

propriété 11. *La série génératrice des empilements non vides de demi-segments tels que la pièce maximale soit de la forme* [O ; M' [*est la fonction* $\frac{qJ_1}{qJ_0}$. *Ce rapport est également la série génératrice des empilements non vides de demi-segments telles que les pièces maximales soient toutes de la forme* [M ; O' [

exemples. La figure 7 montre, en perspective, un empilement de 4 pièces de poids q^{22}. La figure 8 montre une pyramide de demi-segments dont l'unique pièce maximale est de la forme [O ; M' [.

3. tresses simples

Afin de diviser l'ensemble des empilements en sous classes, nous introduisons la notion de tresse simple. D'une manière intuitive, une tresse simple est une tresse non entrelacée : une tresse simple induit un ordre partiel (dessus, dessous) sur les brins qui la composent. Ainsi, la tresse T de la figure 9 est simple alors que la tresse T' ne l'est pas.

notation. on note $\sigma_{i,j} = x_i\, x_{i+1} \ldots x_{j-1}\, x_j$ pour $i \leq j$, et $\sigma_{i,j} = 1$ lorsque $i > j$.

définition 12. Soit T une tresse de B_n. On dit que le couple (i,j) est un *brin maximal* de la tresse T lorsque la tresse $(\sigma_{i,n})^{-1}\ T\ \sigma_{j,n}$ est une tresse de B_{n-1}.

définition 13. On définit l'ensemble BS_n des *tresses simples* à n+1 brins de B_n par récurrence de la manière suivante,

- *si* n=0, $BS_0 = \{1\}$,
- *si* $n > 0$, *alors* $BS_n = \bigcup_{i=1}^{n+1} \bigcup_{j=1}^{n+1} (\sigma_{i,n})\, BS_{n-1} (\sigma_{j,n})^{-1}$.

exemple. $x_1 = \sigma_{1,1}\ (\sigma_{2,1})^{-1} = \sigma_{1,1}$; $x_1^{-1} = \sigma_{2,1}\ (\sigma_{1,1})^{-1} = (\sigma_{1,1})^{-1}$.

remarque. Les tresses simples de B_n sont donc les éléments T de B_n qui s'écrivent sous la forme,

$$T = \prod_{i=1}^{n} \sigma_{k_i, n+1-i} \prod_{j=1}^{n} \sigma_{h_j, j}^{-1} \ ,$$

où, pour tout i, j appartenant à $\{1,2,\ldots,n\}$, $1 \leq k_i \leq i+1$ et $1 \leq h_j \leq j+1$.

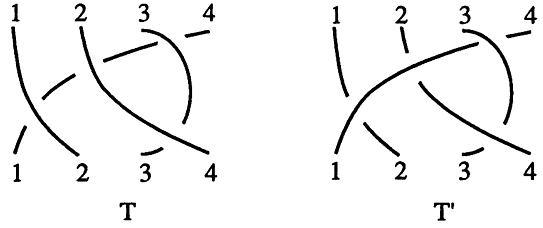
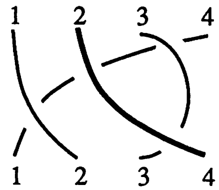


Figure 9. Une tresse simple T, et une tresse non simple T'.

De manière combinatoire, on peut lire l'écriture précédente à partir du dessin d'une tresse simple à l'aide de l'algorithme suivant:

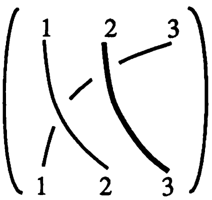
- prendre un brin maximal (k_1,h_1) de T,
- enlever ce brin et considérer la nouvelle tresse T_1 de B_{n-1} obtenue en décrémentant d'une unité les origines de T supérieures à k_1 et les extrémités de T supérieures à h_1.

La tresse T_1 ainsi obtenue est une tresse simple sur laquelle on peut itérer ces opérations. On obtient ainsi une suite de tresses simples T_i de B_{n-i} dont un brin maximal est le brin (k_{i+1},h_{i+1}). Cet algorithme permet de lire une tresse simple directement à partir de son dessin. Par exemple, si T désigne la tresse simple de la figure 9, on a,



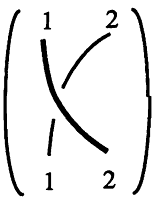
T

$= \sigma_{2,3}$



$\sigma^{-1}_{4,3}$

$= \sigma_{2,3}\ \sigma_{2,2}$



$\sigma^{-1}_{3,2}\ \sigma^{-1}_{4,3}$

$= \sigma_{2,3}\ \sigma_{2,2}\ \sigma_{1,1}$

Remarque. Cette écriture n'est pas en général unique. Ainsi, pour la tresse T de la figure 8, les différentes écritures possibles sont,

$$T = \sigma_{2,3}\, \sigma_{2,2}\, \sigma_{1,1} = \sigma_{2,3}\, \sigma_{1,2}\ \sigma_{1,1}\, (\sigma_{2,2})^{-1} = \sigma_{1,3}\, \sigma_{1,2}\, (\sigma_{2,3})^{-1}$$

Définition 14. On appelle *écriture standard* d'une tresse simple T l'écriture obtenue dans l'algorithme précédent en prenant à chaque étape le brin maximal le plus à droite.

Exemple. L'écriture standard de la tresse T de la figure 9 est $T = \sigma_{2,3}\, \sigma_{2,2}\, \sigma_{1,1}$.

Remarque. On peut représenter les tresses simples à l'aide de permutations à inversions orientées sans cycles.
En effet, toute tresse T de B_n induit une permutation de S_{n+1}, il suffit de considérer l'image de la tresse T par le morphisme envoyant chaque générateur x_i sur la transposition (i,i+1).Si l'on représente graphiquement une permutation π par la donnée de segments $[i,\pi(i)[$, le nombre de croisements entre ces segments est le nombre d'inversion de la permutation π. Choisir un ordre entre deux segments se croisant revient alors à orienter l'inversion correspondante. On obtient alors une tresse simple en orientant chaque inversion, à condition que le graphe obtenu ne contienne aucun cycle. En effet, si tel est le cas, la tresse obtenue est entrelacée. De plus, la trace de la tresse simple se lit aisément sur la permutation orientée sans cycle en prenant q pour les orientations $(\sigma(i) \longrightarrow \sigma(j))$ et $\frac{1}{q}$ pour les orientations $(\sigma(i) \longleftarrow \sigma(j))$, où $(\sigma(i), \sigma(j))$ est une inversion .

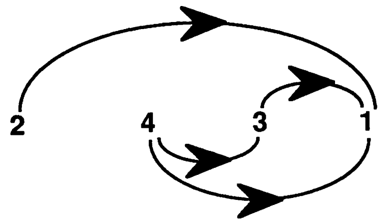


figure 10. Une permutation orientée sans cycle.

Exemple. La tresse T de la figure 9 est représenté par la permutation orientée sans cycle de la figure 10.

4. empilements de demi-segments et tresses simples valuées

4.1. résultats concernant $1/J_0$

Soient $\mathcal{E}(n)$ l'ensemble des empilements de n demi-segments et T(n) l'ensemble des triplets formés d'une tresse simple à n brins, d'une suite croissante de n entiers et d'une suite strictement croissante de n entiers,

$$T(n)=\left\{ (t,\{a_k\}_{k=1}^{n},\{a'_k\}_{k=1}^{n}), \left[\begin{array}{l} t\in BS_{n-1} \\ 0\leq a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n \\ 0\leq a'_1< a'_2<\ldots< a'_n \end{array}\right.\right\}.$$

théorème 15. *Il existe une bijection* φ_n *de* $\mathcal{E}(n)$ *dans* T(n) *telle que, pour tout* E *de* $\mathcal{E}(n)$,

$$\pi(E)=\pi(t)\,q^{\sum_{i=1}^{n} a_i+a'_i},$$

où $\varphi_n(E)=(t,(a_i)_{i=1}^{n},(a'_i)_{i=1}^{n})$.

preuve. La démonstration se fait par récurrence sur le nombre n de pièces.

Il est clair que $\varphi_1([A(a),A'(a')[\;=(e,(a),(a'))$, où e désigne l'unique tresse à un brin, définit une bijection de $\mathcal{E}_1$ dans T_1 satisfaisant aux conditions du théorème.

Supposons que l'on ait construit la bijection φ_{n-1} de $\mathcal{E}_{n-1}$ dans T_{n-1}.
Soit alors un empilement E de $\mathcal{E}(n)$. Il se décompose de manière unique sous la forme $[A(a),A'(a')[\times F$, où $[A,A'[$ est la pièce maximale la plus à droite de E et F est un empilement à n-1 demi-segments dont toutes les pièces maximales sont soit à gauche de $[A,A'[$, soit en concurrence avec $[A,A'[$. Soit

$$\varphi_{n-1}(F)=(u,(b_i)_{i=1}^{n-1},(b'_i)_{i=1}^{n-1}).$$

On a pour un certain i de $\{1,\ldots,n\}$, et un certain j de $\{1,\ldots,n\}$(on convient que $b_n=b'_n=+\infty$),
$b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_{i-1}\leq a< b_i\leq\ldots\leq b_{n-1}$ et $b'_1< b'_2<\ldots< b'_{j-1}< a'\leq b'_j<\ldots< b'_{n-1}$.
Considérons alors les suite $(a_k)_{k=1..n}$ et $(a'_k)_{k=1..n}$ définies par,
$a_k=b_k$ pour $k<i$, $a_i=a$ et $a_k=b_{k-1}-1$ pour $k>i$, et

$a'_k = b'_k$ pour $k<j$, $a'_j = a'$ et $a_k = b_{k-1} + 1$ pour $k>j$.
La suite $(a_k)_{k=1..n}$ est évidemment croissante et la suite $(a'_k)_{k=1..n}$ est strictement croissante. Soit $t = \sigma_{i,n}\, u\, (\sigma_{j,n})^{-1}$, qui est par définition une tresse simple. On montre par récurrence que le mot ainsi récursivement défini est une écriture normale de la tresse associée.
En effet, supposons que E_1 ait pour pièce maximale la plus à droite la pièce $[B(b),B'(b')[$, et que soit par récurrence écrite sous la forme $u= \sigma_{h,n-1}\, v\, (\sigma_{k,n-1})^{-1}$. On a, avec les notations précédentes $b=b_h$ et $b'=b'_k$. Si t n'est pas sous forme normale, alors, $i\leq h$ et $j\leq k$ ce qui entraîne $a<b_h=b$ et $a'\leq b_h=b'$, ce qui contredit le fait que $[A,A']$ est la pièce maximale la plus à droite.
L'application φ_n définie par

$$\varphi_n(E) = (t,(a_i)_{i=1}^n,(a'_i)_{i=1}^n),$$

est la bijection recherchée, la bijection réciproque se définissant de manière analogue.

En sommant le poids des tresses dont l'image par φ_n correspond à une même tresse t_0, on obtient

corollaire 16. *La somme des poids de tous les empilements associés à une même tresse simple* t_0 *est,*

$$\sum_{\varphi_n(E)=(t_0,\dots,\dots)} \pi(E) = \frac{tr(t_0)}{(q;q)_n^2}\, q^{\binom{n}{2}}.$$

En sommant sur tous les empilements de demi-segments, il vient,

théorème 17. *Les polynômes* $a_n(q)$ *sont reliés aux tresses simples par la relation,*

$$a_n(q) = q^{\binom{n}{2}} \sum_{t\in BS_{n-1}} tr(t).$$

De plus, les polynômes $a_n(q)$ *sont à coefficients entiers positifs, symétriques de degré* $n(n-1)$.

preuve. La symétrie s'obtient en remarquant que l'inverse d'une tresse simple est une tresse simple et que $\pi(t^{-1}) = \dfrac{1}{\pi(t)}$. Le degré se déduit en remarquant que la tresse simple de plus fort exposant est la tresse $\sigma_{1,n-1}\, \sigma_{1,n-2} \dots \sigma_{1,2}\, \sigma_{1,1}$, de poids $q^{n(n-1)/2}$.

4.2. résultats concernant J_1/J_0

Le théorème d'inversion des empilements montre que la fonction $\frac{J_1}{J_0}$ est la série énumératrice dont l'unique pièce maximale est de la forme $[O, M'[$ ou encore la série énumératrice dont l'unique pièce maximale est de la forme $[M, O'[$ Nous montrons ici,

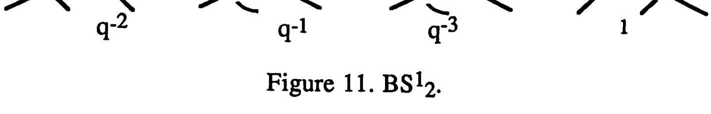


Figure 11. $BS^1{}_2$.

théorème 18. *En notant* BS^1_{n-1} *l'ensemble des tresses simples à n brins n'ayant qu'un unique brin maximal de la forme* (i,1), *on a,*

$$b_n(q) = q^{\binom{n}{2}} \sum_{t \in BS^1_{n-1}} tr(t).$$

Ce théorème se déduit en utilisant le corollaire 16 et le lemme suivant,

lemme 19. *L'image par* φ_n *de l'ensemble des empilements de demi-segments dont les pièces maximales sont de la forme* [A,O'[*est l'ensemble des triplets*

$$\left\{ (t, \{a_k\}_{k=1}^{n}, \{a'_k\}_{k=1}^{n}), \begin{bmatrix} t \in BS^1_{n-1} \\ 0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \\ 0 = a'_1 < a'_2 < \ldots < a'_n \end{bmatrix} \right\}.$$

Reprenons les notations de la construction de la bijection φ_n. Ici, a'=0, et la pièce maximale la plus à droite de l'empilement E_1 est de la forme $[B(b_h),B'(b'_k)[$, où $b_h \le a$ et b'_k quelconque. Par conséquent, h<i et $j=1\le k$, ce qui prouve que la tresse associée appartient bien à BS^1_{n-1}. De plus, $a'_1=0$, et a est quelconque, d'où la propriété.

exemple. la figure 11 montre les quatre éléments de BS^1_2 ainsi que leurs poids.

conclusions. Le rapport des fonctions de Bessel ${}^qJ_1$ et ${}^qJ_0$ est apparu lors de l'énumération des diagrammes de Ferrers gauches. La combinatoire liée à ces objets est particulièrement riche. Diverses interprétations combinatoires ont été données, à l'aide de de mots de Dyck, de multichaînes d'un poset, de polytopes rationnels dans la théorie de Ehrhart dans [11], et ici à l'aide des tresses simples. Divers problèmes concernant ces fonctions énumératrices restent ouverts, en particulier la log-concavité ou du moins l'unimodalité des polynômes $a_n(q)$ et $b_n(q)$ ainsi qu'une preuve combinatoire de la symétrie des polynômes $b_n(q)$.

références.

[1] G.E. ANDREWS, q-Series: their development and application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra, AMS **66**, (1986).

[2] E. ARTIN, Theori der Zöpfe, Abh. Math. Semin. Univ. **4** (1926) 47-72.

[3] E. ARTIN, Theory of Braids, Annal of Mathematics, **48** (1947) 101-126.

[4] J. BIRMAN and A. LIBGOBER (éditeurs) *Braids*, Proceedings of a research Conference, Contemporary Math. vol. 78, American Math. Soc. (1988).

[5] M. BOUSQUET-MÉLOU, q-Enumération de polyominos convexes, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux I, 1991.

[6] L. CARLITZ, Integers related to the Bessel functions, Proc. of Amer. math. Soc, **14** (1963), 1-9.

[7] P. CARTIER, Développements récents sur les groupes de tresses, Applications à la topologie et à l'algèbre, Séminaire BOURBAKI, dans Astérisque, **716** (1990) 1-42.

[8] P. CARTIER, D. FOATA, *Problèmes combinatoires de commutations et de réarrangements*, Lect. notes. in Math., 85, Springer-Verlag, Berlin (1969).

[9] M.P. DELEST, J.M. FEDOU, Enumeration of skew Ferrers diagrams, to appear in Discrete Math.

[10] A. ERDELYI, et alt., *Higher transcendental functions*, vol.2, McGraw-Hill (1955).

[11] J.M. FEDOU, Enumeration of skew Ferrers diagrams and Basic Bessel functions, à paraitre dans les actes du "2nd conference on lattice path combinatorics and applications" (1990) Hamilton, Canada.

[12] M. ISMAIL, The zeroes of basic Bessel functions and associated orthogonal polynomials, J. of Math. Anal. and Appl. **86** (1982), 1-18.

[13] F.A. GARSIDE, The braid group and other groups, Quart. J. Math. **17** (1969) 245-254.

[14] D.H. LEHMER, Zeros of the Bessel function $J_\nu(x)$, Math.Tables Aids Comput. **1** (1943-45), 405-407.

[15] X.G. VIENNOT, Heaps of pieces I, Basic definitions and combinatorial lemmas, in Combinatoire énumérative, eds G. Labelle et P. Leroux, Lect. Notes in Math. 1234, Springer-Verlag, Berlin (1986)

[16] G.N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge (1924) 502.

[17] C.N. YANG and M.L. GE (éditeurs) *Braid group, knot theory and statistical mechanics*, Adv. Series Math. Phys. vol 9, World Scientific (1989).