

## Une preuve bijective d'une formule de Touchard-Riordan.\*

Jean-Guy Penaud

LaBRI\*



**Résumé.** Une preuve bijective d'une formule tirée par Riordan d'un papier de Touchard est présentée. Cette preuve procède par un enchaînement de bijections allant des involutions aux polyominos, en passant par les histoires de fichiers, les mots, les arbres à deux types de sommets, les couples de suites d'entiers jusqu'à l'objet final où la propriété devient évidente.

**Abstract.** A pure combinatorial proof of a formula which was found by Riordan from a paper of Touchard is shown.

### 1. La formule de Touchard-Riordan

Il est classique de représenter une involution sans point fixe sur les entiers de 1 à  $2n$  (ensemble que l'on note  $[1..2n]$ ) par un diagramme composé de  $n$  cordes joignant deux à deux  $2n$  points distincts répartis sur un cercle. Le lecteur trouvera dans un autre papier de Dulucq et l'auteur un aperçu des relations entre cordes, arbres et permutations [8]. La figure 1 ci-contre montre la configuration de cordes associée à l'involution

$$\alpha = (1,4) (2,6) (3,5) (7,8).$$

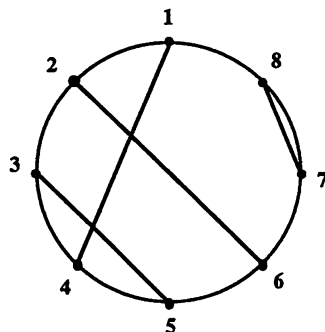


Figure 1.

Les questions qui viennent alors naturellement sont celles relatives aux *points de croisement* des cordes, c'est-à-dire, en termes d'involution sur  $[1,2n]$ , aux quadruplets  $(i,j,k,l)$  tels que  $1 \leq i < j < k < l \leq 2n$  et que  $(i,k)$  et  $(j,l)$  soient des cycles de l'involution.

— Quel est le nombre de configurations de cordes qui ne se coupent pas?

— Quel est le nombre de configurations ayant un nombre de croisements donné?

C'est, d'après Riordan [20], à Errera [9] que l'on doit d'avoir le premier posé et résolu le problème de compter le nombre de configurations où les cordes ne se coupent pas. Ces configurations sont, comme beaucoup d'autres objets combinatoires, comptées par les nombres de Catalan,

\* Travail effectué avec le soutien du PRC Mathématiques et Informatique.

\* UA CNRS n° 726, Université de Bordeaux I, 33405 Talence, France.

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \tag{1}$$

Dans une série de trois articles consacrés à l'étude de configurations associées au *problème du timbre poste*, Touchard ([22], [23], [24]) étudie la seconde question. Mais plutôt que d'utiliser un cercle de rayon fini pour représenter une involution sans point fixe, Touchard utilise un vocabulaire architectural et considère les cordes comme un *système d'arches* dont les extrémités sont des points d'un axe horizontal qui s'échangent dans l'involution (notons que d'autres comme Read, [20], les représentent par un *diagramme en dents de scie*). La figure 2 montre ces deux présentations d'une même involution sans point fixe  $\alpha$ .

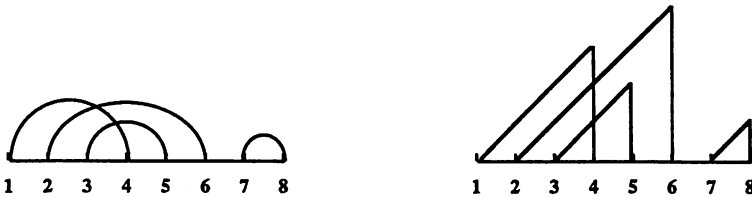


Figure 2. Deux représentation d'une involution sans point fixe.

Touchard trouve une solution dont l'expression, reformulée par Riordan [19] de manière plus condensée et plus explicite, s'écrit à l'aide des *nombres de Delannoy* (appelés *ballot numbers* par l'école anglo-saxonne). En reprenant les notations de Touchard [23], c'est-à-dire en appelant  $T_n(x)$  le polynôme énumérateur des configurations de  $n$  cordes selon leur nombre de croisements, et  $t_n(x)$  le polynôme dont les coefficients  $t_{i,j}$  sont les nombres de Delannoy, on peut écrire,

$$t_n(x) = (1-x)^n T_n(x) = \sum_{j=0,n} (-1)^j t_{n,j} x^{\frac{j(j+1)}{2}}, \tag{2}$$

avec 
$$t_{n,j} = D_{n+j}^{n-j} = \binom{2n}{n-j} - \binom{2n}{n-j-1}. \tag{3}$$

REMARQUE 1.1

Le polynôme  $T_n(x)$  est aussi le moment  $\mu_n$  des  $q$ -analogues des polynômes d'Hermite  $H_n(x;q)$  introduits par Rogers pour démontrer les célèbres identités de Rogers-Ramanujan.

Dans cet article nous nous proposons de donner une preuve bijective des formules (2) et (3) que nous appellerons formules de Touchard-Riordan, en interprétant les coefficients  $t_{n,j}$  à l'aide d'une classe particulière d'involutions sans point fixe. Nous utilisons, outre les configurations de cordes, d'autres objets combinatoires en bijection avec les involutions, que sont les mots, les chemins et les arbres. Mais c'est grâce à un sixième objet, la famille des *polyominos horizontalement convexes*, que la preuve apparaît clairement.

## 2. La chaîne d'objets utilisés

### a) Les involutions sans points fixes et leurs histoires

La figure suivante montre une involution sans point fixe et l'*histoire de fichier* associée est constituée d'un chemin de Dyck, avec des valuations sur les pas descendants indiquant le nombre de croisements ( cf [12], [13]). C'est ici une *valuation de Hermite*, c'est-à-dire nulle sur les pas montants, et comprise entre 0 et la hauteur de l'extrémité du pas pour les pas descendants. Elle correspond à une histoire de file de priorité.

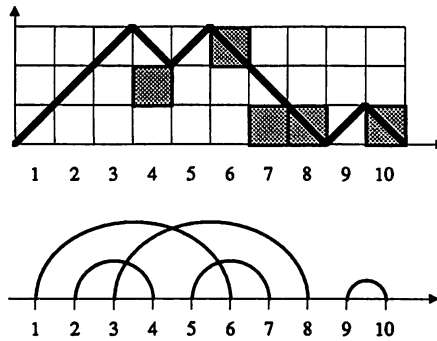


Figure 3.

Une involution et son histoire.

(La somme des hauteurs des bases des carrés donne le nombre de points de croisements de l'involution).

REMARQUE 2.1 Les  $q$ -analogues des polynômes d'Hermite, encore appelés polynômes de  $q$ -Hermite,  $H_n(x;q)$ , évoqués à la remarque 1 satisfont la récurrence,

$$H_{n+1}(x;q) = xH_n(x;q) - (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})H_{n-1}(x;q) .$$

D'après la théorie combinatoire des polynômes orthogonaux (voir Flajolet [11] ou Viennot [25] ), la valuation des chemins de Dyck interprétant les moments est celle des histoires fdp. Ceci démontre la remarque 1.1, à savoir que le moment des polynômes de  $q$ -Hermite est le polynôme énumérateur des involutions selon le nombre de croisements. L'identité (2) de Riordan-Touchard peut aussi être déduite du calcul des moments des polynômes de  $q$ -Hermite (voir [16] ). Rappelons enfin que la combinatoire des croisements de ces involutions joue un rôle fondamental dans la partie bijective de l'évaluation de l'intégrale de Askey-Wilson ([2], [16]).

Soit  $T(z,x)$  la série commutative énumérant les involutions selon le nombre de paires et celui de croisements. En utilisant le polynôme  $T_n(x)$  introduit dans la formule de Touchard-Riordan en (2), on peut écrire

$$T(z,x) = \sum_{n \geq 0} T_n(x) z^n.$$

**b) Involutions tout-ou-rien connexes (TORC)**

Particularisons les involutions. Nous dirons qu'une involution sur  $[1..2n]$  est *connexe* si et seulement s'il n'existe pas d'entier  $k$  tel que  $1 \leq k < 2n$  et que  $\alpha(i) \leq k$  pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq k$ .

D'autre part, considérons les involutions vérifiant l'alternative suivante, pour toute fermante, c'est-à-dire tout entier  $k$  tel que  $\alpha(k) = i$  et  $i < k$ ,

ι)  $k$  est une *fermante minimale*, i.e. toute ouvrante inférieure à  $k$  se ferme avant, soit

$$i < j < k \Rightarrow \alpha(j) < k,$$

ιι)  $k$  est une *fermante maximale*, i.e. toute ouvrante inférieure à  $\alpha(k)$  se ferme avant  $k$ , soit  $j < i \Rightarrow \alpha(j) < k$ .

La figure 4 montre une involution TORC. Ces involutions TORC ayant  $n+1$  arches sont codés par des histoires fdp associées à des mots de Dyck premiers à  $2n+2$  lettres, donc des mots de Dyck à  $2n$  lettres.

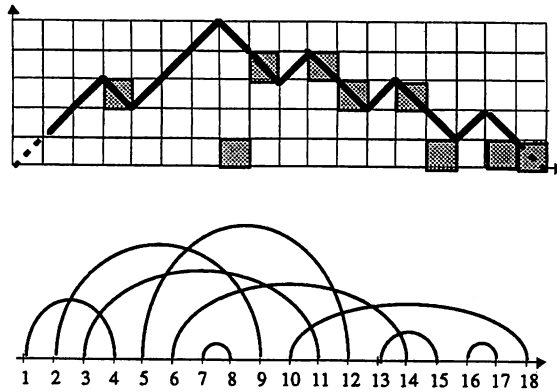


Figure 4. Un involution TORC et son histoire.

A toute involution TORC codée par un mot  $f$ , on peut associer un *signe* égal à  $(-1)^{r_f}$  où  $r_f$  est le nombre de fermantes maximales.

Appelons  $\Theta_{n,p,r}$  le nombre d'involutions ayant  $n+1$  arches,  $p$  croisements et  $r$  fermantes maximales, et posons

$$\Theta_{n,p} = \sum_{r=1}^p (-1)^r \Theta_{n,p,r}, \tag{4}$$

$\Theta_n(x)$  le polynôme en  $x$  ainsi défini,

$$\Theta_n(x) = \sum_{p=0}^n \Theta_{n,p} x^p,$$

et

$$\Theta(z, x) = \sum_{n \geq 1} \Theta_n(x) z^n.$$

Pour établir bijectivement la formule de Touchard-Riordan, il suffit de montrer les deux propositions suivantes.

PROPRIETE 2.2 Pour tout  $n \geq 1$  on a l'égalité,

$$\Theta_n(x) = (1-x)^n T_n(x). \tag{5}$$

PROPRIETE 2.3 Pour toutes valeurs de  $n$  et de  $p$ ,  $\Theta_{n,p} = 0$ , sauf si  $p = 1+2+\dots+k = \binom{k+1}{2}$

alors  $\Theta_{n,p} = (-1)^k t_{n,k}$  avec  $t_{n,k} = D_{n+k}^{n-k} = \binom{2n}{n-k} - \binom{2n}{n-k-1}$ .

La première est une conséquence directe du codage, et la suite de l'article est consacrée à la preuve bijective de la seconde.

**c) Mots de Dyck bicolores et arbres à cerises.**

Puisqu'il n'y a que deux cas possibles pour une fermante d'une involution TORC, ces involutions peuvent être codées par un mot sur un alphabet à trois lettres, la seule lettre  $z$  codant une ouvrante, et les deux lettres  $\hat{z}$  et  $\hat{y}$  codant une fermante suivant que celle-ci est minimale ou maximale. On a ainsi le langage  $L$  d'équation,

$$L = \varepsilon + z L \hat{z} L + z L \hat{y} L. \tag{6}$$

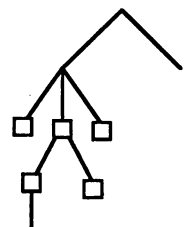
Pour tout mot  $g$  de  $L$  codant une involution TORC,  $|g|_{\hat{y}}$  est égal au nombre de fermantes maximales, et le poids de  $g$ , égal à la somme des hauteurs des  $\hat{y}$ , s'exprime en posant pour tout mot  $u$ ,  $\delta(u) = |u|_{\hat{z}} - (|u|_{\hat{z}} + |u|_{\hat{y}})$ , par,

$$\omega(g) = \sum_{g = u \hat{y} v} \delta(u).$$

Ce poids est égal au nombre de croisements.

Ainsi le nombre  $\Theta_{n,p,r}$ , défini précédemment, est égal au nombre de mots  $g$  de  $L$  tels que  $|g| = n$ ,  $|g|_{\hat{z}} = r$ , et  $\omega(g) = p$ , c'est-à-dire aux involutions à  $n+1$  arches,  $p$  croisements et  $r$  fermantes maximales.

C'est aussi le nombre d'une certaine famille d'arbres, les arbres à cerises. En effet les arbres codés par les mots du langage  $L$  ont des sommets de deux types: les cerises (carrées), et les simples. Un sommet sera dit carré si et seulement si on le quitte par une arête codée  $\hat{y}$ . Ainsi  $\Theta_{n,p,r}$  sera le nombre d'arbres planaires ayant  $n$  arêtes,  $r$  sommets carrés, et dont la longueur de cheminement des sommets carrés est égale à  $p$ .



Exemple. Le mot  $z z \hat{y} z z z \hat{z} \hat{y} z \hat{y} \hat{y} z \hat{y} \hat{z} z \hat{z}$ , correspondant à l'involution de la figure 4 code aussi l'arbre représenté dans la figure 5 qui a 5 carrés et une longueur de cheminement de 12.

Figure 5. Un arbre à carrés.

Considérons les involutions TORC possédant la propriété supplémentaire que les fermantes qui suivent immédiatement une ouvrante sont maximales. Le langage associé P est un sous-ensemble de L vérifiant l'équation,

$$P = z \bar{z} + z \bar{z} P + z P \bar{z} + z P \bar{z} P + z P \bar{y} + z P \bar{y} P. \tag{7}$$

Pour les arbres codés par ce langage, toutes les feuilles sont des sommets carrés.

On a alors une propriété de factorisation des mots de L analogue à la propriété de la *factorisation de Catalan* de Chottin et Cori, [4], qu'énonce le lemme suivant, en notant D le langage de Dyck sur z et  $\bar{z}$ .

LEMME 2.4. *Tout mot f de L a une unique factorisation,  $f = f_1 u_1 f_2 u_2 \dots f_{2p} u_{2p} f_{2p+1}$ , vérifiant les conditions suivantes,*

- les  $f_i$  sont des mots de D, ( $1 \leq i \leq 2p+1$ ),*
- $u_i, 1 \leq i \leq 2p$ , est une lettre de  $\{z, \bar{z}, \bar{y}\}$ ,*
- $u_1 u_2 \dots u_{2p}$  est un mot de P.*

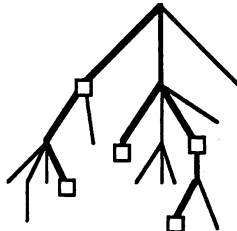


Figure 6. Un arbre à sommets de deux types et son squelette (en gras).

On appelle *squelette* de l'arbre le sous arbre maximal dont toutes les feuilles sont des carrés. La figure 6 ci-dessus montre le squelette en trait épais. Le mot code est le mot suivant où les lettres en gras forment le mot de P, qui code clairement le sous-arbre.

**z z z  $\bar{z}$  z z  $\bar{z}$  z z  $\bar{z}$  z  $\bar{y}$   $\bar{z}$  z z  $\bar{y}$  z z  $\bar{y}$  z z z z z z z z z z  $\bar{y}$  z z  $\bar{z}$   $\bar{y}$  z z z z z**

Exemples. a)  $\Theta_{n,1} = -\Theta_{n,1,1}$  où  $\Theta_{n,1,1}$  compte le nombre d'involutions sans point fixe ayant n+1 arches, un croisement et une fermante maximale de hauteur nécessairement 1. C'est donc aussi le nombre de mots de L qui les code; or ces mots possèdent un seul  $\bar{y}$  et cet  $\bar{y}$  est de hauteur 1 dans le mot. D'après le lemme précédent ce sous-ensemble de L est égal à  $D z D \bar{y} D$ , or ce langage est clairement en bijection avec le langage  $D z D z D$  c'est-à-dire le langage des facteurs gauches de Dyck de hauteur finale 2, et l'on a

$$\Theta_{n,1,1} = D_{n+1}^{n-1} .$$

b) De même pour p=2, on a, d'après la formule (4),

$$\Theta_{n,2} = \sum_{r=1}^2 (-1)^r \Theta_{n,2,r} .$$

Or d'après le lemme précédent,  $\Theta_{n,2,1}$  compte le nombre de mots de longueur  $2n$  du langage  $D z D z D \bar{y} D \bar{z} D$  et  $\Theta_{n,2,2}$  compte le nombre de mots de longueur  $2n$  du langage  $D z D \bar{y} D z D \bar{y} D$ . Ces deux langages sont clairement en bijection et l'on a  $\Theta_{n,2,1} = \Theta_{n,2,2}$ , donc  $\Theta_{n,2} = 0$ .

Cette propriété est due d'une part au fait que les mots  $z z \bar{y} \bar{z}$  et  $z \bar{y} z \bar{y}$  ont même poids et des signes opposés, et d'autre part que tout mot de  $L$  a une unique factorisation. Ce résultat se généralise et l'on a le théorème,

**THEOREME 2.5** *Il existe une involution qui opère sur les mots de  $P$ . Cette involution conserve la longueur et le poids du mot, c'est-à-dire la somme des hauteurs des lettres  $\bar{y}$  et change le signe, c'est-à-dire la parité du nombre de lettres  $\bar{y}$ . Ses seuls points fixes sont les mots  $z^p \bar{y}^p$ , ( $p \geq 1$ ).*

Avant d'aborder la preuve du théorème, qui sera faite à l'aide d'un nouvel objet, remarquons que la propriété 2.3 est un corollaire immédiat de ce théorème.

**PREUVE DE LA PROPRIETE 2.3**

Soit  $f$  un mot de  $L$ . D'après le lemme 2.4, il s'écrit,

$$f = f_1 u_1 f_2 u_2 \dots f_p u_p f_{p+1}.$$

Si son squelette  $u_1 u_2 \dots u_p$  n'est pas de la forme  $z^r \bar{y}^r$ , il lui correspond d'après le théorème 2.5 un mot différent de même longueur et de même poids mais de signe opposé,  $v_1 v_2 \dots v_p$ , donc le mot  $g = f_1 v_1 f_2 v_2 \dots f_p v_p f_{p+1}$  a même longueur, même poids que  $f$  et signe opposé, et donc leurs contributions s'annuleront mutuellement dans le calcul de  $\Theta_{n,p}$ .

Par contre tous les mots ayant même longueur et comme squelette  $z^r \bar{y}^r$  vont avoir même poids  $p = 1+2+\dots+r = \frac{r(r+1)}{2}$  et même signe, et donc leur contribution va s'ajouter. Le coefficient de  $x^p$  dans  $\Theta_{n,p}$  sera donc au signe près le nombre de mots de longueur  $2n$  dans  $(D z)^r (D \bar{y})^r D$ , clairement en bijection avec le langage  $(D z)^r (D \bar{z})^r D$ . C'est donc le nombre de facteurs gauches de mots de Dyck de longueur  $2n$  et de hauteur finale  $2r$ , c'est-à-dire le nombre de Delannoy  $D_{n+r}^{n-r}$ .

Dans le polynôme

$$\Theta_n(x) = \sum_{p \geq 0} \Theta_{n,p} x^p,$$

les seuls coefficients non nuls sont ceux pour lesquels  $p$  est un entier vérifiant,

- $0 \leq p \leq \frac{n(n+1)}{2}$ ,
- il existe un entier  $r$  tel que  $p = \frac{r(r+1)}{2}$ ,

et alors ce coefficient vaut

$$(-1)^r \left( \binom{2n}{n-r} - \binom{2n}{n-r-1} \right).$$

**d) polyominos convexes**

Remarquons que le théorème 2.5 est évident pour les mots de P de longueur 2 et 4, comme le montre la figure 7 où l'on a représenté les arbres à n arêtes (n = 1, 2 ou 3) dont les sommets sont carrés ou non et dont toutes les feuilles sont carrées, les mots de P de longueur 2n qui les codent, et les chemins associés.

Mais il n'est plus évident pour  $n \geq 6$ , pour établir le théorème dans le cas général, nous allons utiliser un autre objet en bijection avec les mots de P, les *polyominos convexes*. Cette bijection est inspirée par une bijection établie par Fédou [10] dans un cadre plus général et dont elle peut être vue comme un cas particulier. Puis nous allons définir par une simple manipulation sur les cellules, une involution sur ces polyominos qui change la parité du nombre de bandes en laissant invariant la différence entre l'aire et le nombre de ces bandes.

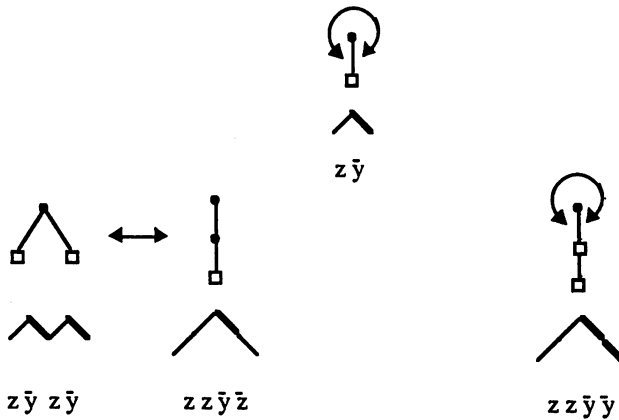


Figure 7. Les 4 premiers mots de P et les arbres associés.

Nous allons coder les mots de P de longueur 2n par deux suites d'entiers de longueur k,  $(a_i)$  et  $(b_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , telles que k est le nombre d'occurrences de  $\bar{y}$  dans le mot,  $a_i$  est le nombre de z qui précèdent la  $i^{\text{ème}}$  occurrence de  $\bar{y}$  et  $b_i$  le nombre de  $\bar{z}$  ou  $\bar{y}$  qui précèdent cette même occurrence. Plus précisément, on a la proposition,

**PROPOSITION 2.6** Les mots de P de longueur 2n sont en bijection avec deux suites d'entiers  $(a_i)$  et  $(b_i)$ ,  $1 \leq i \leq 2n$ , vérifiant les conditions suivantes,

- $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n$ ,
- $0 = b_1 < b_2 < \dots < b_k$
- $b_i < a_i, 1 \leq i \leq k$ .

De plus il est clair que si le mot w de P est représenté par le couple de listes  $(a_i)$  et  $(b_i)$  de longueur k, le poids de w est  $\sum_{i=1}^k (a_i - b_i)$ , et le signe  $\text{sgn}(w)$  est  $(-1)^k$ .



D'autre part considérons dans le plan combinatoire  $\Pi = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  les figures composées de *bandes horizontales* superposées, chaque bande étant formée de carrés unitaires consécutifs ayant en commun un côté vertical. Une bande est repérée par son *abscisse*, position du bord gauche, sa *longueur*, égale au nombre de carrés unitaires qui la composent, et son numéro ou *ordonnée*. L'ensemble forme un *polymino horizontalement convexe*.

On peut alors définir la construction suivante, notée  $\psi$ , qui associe à tout mot de  $P$  un ensemble de bandes, ainsi déterminé,

si  $w$  est représenté par le couple  $(a_i, b_i)_{1 \leq i \leq k}$ ,  $\psi(w)$  sera constitué de  $k + 1$  bandes; pour  $1 \leq i \leq k$ ,  $\beta_i$  a pour abscisse  $b_i$ , pour ordonnée  $i$  et pour longueur  $a_i - b_i + 1$ , comme indiqué sur la figure 8 ci-contre.  $\beta_{k+1}$  est constituée d'une seule cellule d'abscisse  $a_j$ .

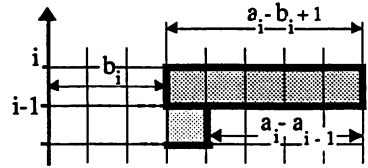


Figure 8.

Repérage de la  $i^{\text{ème}}$  bande.

Exemple. Le mot  $w = z z z \hat{y} \hat{z} \hat{y} z z \hat{y} z z \hat{z} \hat{y} \hat{y}$ , apparu dans l'exemple de la figure 6 est représenté par les 2 suites d'entiers,  $(a_i)_{1 \leq i \leq 6} = (3, 3, 5, 8, 8, 8)$  d'une part, et  $(b_i)_{1 \leq i \leq 6} = (0, 2, 3, 4, 6, 7)$ . La figure 9 montre le chemin, l'arbre et l'ensemble de bandes associé à  $w$ .

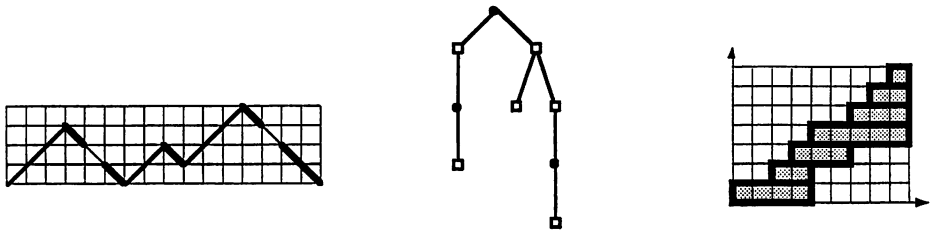


Figure 9. Un mot de  $P$ , l'arbre et le polymino associés.

On a alors le résultat suivant,

PROPOSITION 2.7

La construction  $\psi$  est une bijection entre les mots  $w$  de  $P$  de longueur  $2n$  de poids  $p$  et ayant  $q$  lettres  $\hat{y}$  et les polyminos parallélogrammes constitués de  $q+1$  bandes horizontales, et  $n+1$  colonnes, d'aire  $p+q+1$ , n'ayant pas deux bandes horizontales adjacentes de même abscisse, et dont la bande supérieure est composée d'une seule cellule.

Preuve. La vérification, conséquence directe des propriétés générales des mots de Dyck, et de celles particulières au langage  $P$ , est laissée au lecteur. Remarquons que grâce à l'ajout d'une cellule dans chaque bande horizontale par rapport à la valeur  $a_i - b_i$  qui

donne la hauteur de la  $j^{\text{ème}}$  occurrence de la lettre  $\hat{y}$  dans le mot, on est assuré de l'absence de points d'articulation dans le polyomino.

Exemple. le mot  $z^2 \hat{y} \hat{z} \hat{y} z^2 \hat{y} z^3 \hat{y} \hat{z} \hat{y} \hat{y}$  de l'exemple précédent a 16 lettres, 6  $\hat{y}$  et un poids de 13. Le polyomino associé par  $\psi$  possède 7 bandes, 9 colonnes et 20 cellules carrées.

Les mots  $z^q \hat{y}^q$ , ( $q \geq 1$ ), points fixes de l'involution à construire du théorème 5.2, ont pour polyomino associé par  $\psi$  un polyomino parallélogramme tel que les abscisses initiales des bandes superposées consécutives diffèrent exactement d'une unité, et que les abscisses finales sont toutes égales à  $q+1$ . La figure ci-contre montre  $\psi(z^6 \hat{y}^6)$  qui constitue un diagramme de Ferrers en "escalier" régulier.

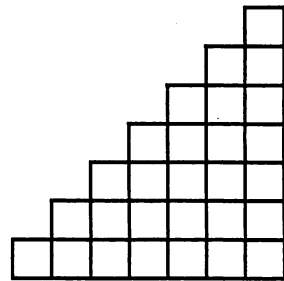


Figure 10. Un diagramme de Ferrers en escalier régulier.

Soit  $Q = \psi(P)$ , et  $Q_0 = \psi(\{z^q \hat{y}^q, 1 \leq q\})$ . Nous allons alors définir, pour achever ce travail, une application de  $Q$  dans  $Q$ , que l'on notera  $\kappa$ , qui laissera invariants les polyominos de  $Q_0$  et échangera 2 à 2 ceux de  $Q \setminus Q_0$  en changeant la parité du nombre de bandes.

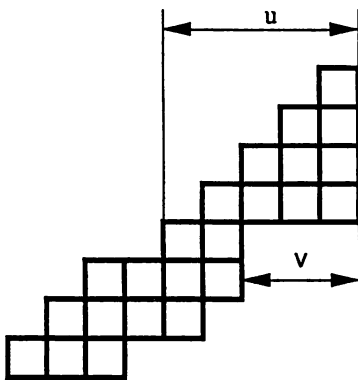


Figure 11. Un polyomino parallélogramme et ses deux paramètres  $u$  et  $v$ .

Pour cela introduisons deux paramètres  $u$  et  $v$  sur tout élément  $\pi$  de  $Q$ . Si  $\pi$  est un polyomino composé de  $q+1$  bandes d'abscisse  $b_i$  ( $1 \leq i \leq q+1$ ) et  $n+1$  colonnes, on pose

- $\iota$ )  $u = n+1 - b_k$  s'il existe un entier  $k$  ( $1 < k \leq q$ ) tel que  $b_k > b_{k-1} + 1$ , sinon  $u = n+1$ ;
- $\iota \iota$ )  $v = a_{\ell+1} - a_1$  où  $\ell$  est le plus grand entier ( $1 \leq \ell < q$ ) s'il existe tel que  $a_{\ell+1} = n$  et  $a_\ell < n$ , sinon  $v = n+1$ .

Ces paramètres sont illustrés sur la figure 11 ci-contre qui montre un élément de l'ensemble  $Q_0$ . Clairement,  $Q_0$  est l'ensemble des polyominos  $\pi$  de  $Q$  tels que  $u(\pi) = v(\pi) = n+1$  (où  $n$  est le nombre de colonne). Posons

$$Q^+ = \{ \pi / \pi \in Q \setminus Q_0, u(\pi) \leq v(\pi) \},$$

$$Q^- = \{ \pi / \pi \in Q \setminus Q_0, u(\pi) > v(\pi) \}.$$

Nous sommes alors en mesure de définir  $\kappa$ ,

a)  $\pi \in Q^+$ . Soit  $k$  tel que  $b_k = n+1-u(\pi)$ , et  $\ell$  tel que  $a_\ell - a_{\ell-1} = v(\pi)$ . Le fait que  $\pi$  soit connexe et sans point d'articulation implique que  $k > \ell$ . Informellement, pour construire  $\pi'$  à partir de  $\pi$ , on enlève les  $u$  cellules les plus à droite de la bande  $\ell$  et on ajoute une cellule à droite de chacune des bandes  $k, k+1, \dots, q+1$  puis on couvre le tout par une  $(q+2)^{i\grave{e}me}$  bande d'une seule cellule .

b)  $\pi \in Q^-$ . On comble la bande  $\ell$  par  $v$  cellules carrées et l'on enlève sur les bandes supérieures  $v+1$  cellules , une par bande.

Ces opérations sont décrites sur la figure 12 où le signe - marque les cellules à enlever et le signe + les cellules à ajouter.

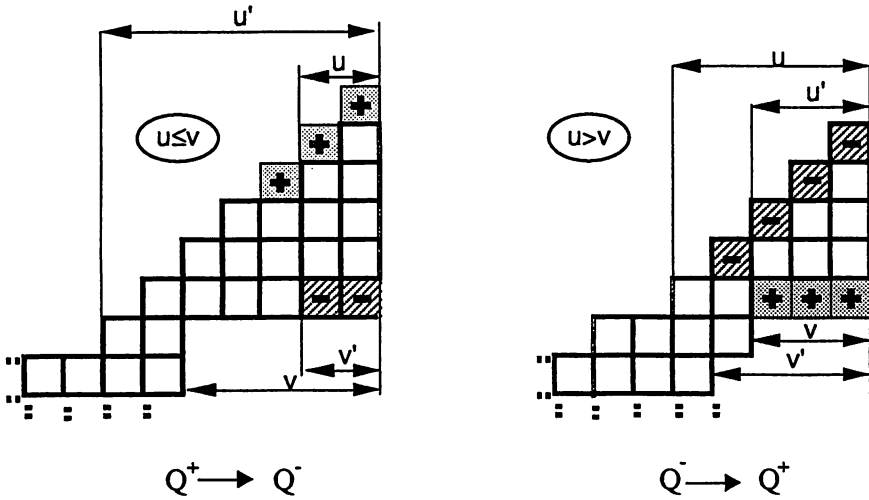


Figure 12. Deux exemples de l'involution  $\kappa$  .

Définissons le poids d'un polyomino  $\pi$  comme la différence entre le nombre de cellules et le nombre de rangées; on établit alors le résultat final, qui achève la preuve du théorème 2.5,

PROPOSITION 2.8 *L'application  $\kappa$  est une involution qui laisse  $Q_0$  invariant et telle que l'image d'un polyomino  $\pi$  de  $Q^+$  est un polyomino de  $Q^-$  et inversement. De plus  $\kappa$  conserve le nombre de colonnes, le poids et change la parité du nombre de rangées.*

La figure 12 ci-dessus illustre les deux cas de la définition de  $\kappa$ , et la figure 13 montre le polyomino, le chemin, le mot et l'arbre en correspondance avec le polyomino, le chemin et le mot de l'exemple de la figure 9.

REMARQUE 2.9 Il y a équivalence entre les polyominos parallélogramme et les "Ferrers gauches" définis par un couple de partition d'entiers  $\lambda$  et  $\mu$  telles que  $\mu \subset \lambda$ . Cette

bijection agissant sur les polyominos parallélogrammes a des analogies avec celle (plus simple) de Franklin définie sur les diagrammes de Ferrers et démontrant le théorème pentagonal d'Euler (voir le livre d'Andrews [1] p 10).

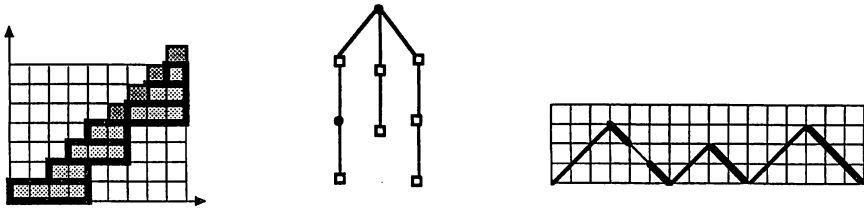


Figure 13. Le polyomino, l'arbre et le mot de P en bijection avec ceux de la figure 9.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. G.E. Andrews, *The Theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol n°2, ed Gian-Carlo Rota, Addison-Wesley, Reading, Massachussets, 1976.
2. R. Askey et J. Wilson, Some basic hypergeometric orthogonal polynomial that generalize Jacobi polynomials, *Memoirs Amer. Math. Soc.* 319 (1985).
3. J. Berstel et C. Reutenauer, *Les séries rationnelles et leurs langages*, Masson, Paris, 1984.
4. L. Chottin et R. Cori, Une preuve combinatoire de la rationalité d'une série génératrice associée aux arbres, *RAIRO Inf. Th.*,16 (1982), 113-128.
5. M.P. Delest, *Utilisation des langages algébriques et du calcul formel pour le codage et l'énumération des polyominos*, Thèse d'Etat, Université de Bordeaux I, 1987.
6. M.P. Delest, S. Dulucq, Enumeration of directed column-convex animals with given perimeter and area, rapport LaBRI n° 86-15, Université de Bordeaux I.
7. M.P. Delest, G.X. Viennot, Algebraic langages and polyominoes enumeration, *Theor. Comp.Sci.* 34 (1984), 169-206 .
8. S. Dulucq, J.G.Penaud, Cordes, Arbres et Permutations, à paraître dans *Discrete Math.*
9. A. Errera, Un problème d'énumération, *Mém. Acad. Royale Belgique* ,8°,2, v.11,1931.
10. J.M.Fédou, *Grammaires et q-généralisations de polyominos*, Thèse, Université de Bordeaux I, 1989.
11. P. Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, *Discrete Math.*, 32 (1980) 125-161.

12. P. Flajolet, J. Françon et J. Vuillemin, Sequence of operations analysis for Dynamic data structures, *J. of Algorithm* 1 (1980), 111-141.
13. J. Françon, Histoire de Fichiers, *RAIRO Inf. Th.*, 12 (1978), 49-62.
14. F. Franklin, Sur le développement du produit infini  $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots$ , *C.R.A.S* 82, (1881), 448-450.
15. J. Françon et X.G. Viennot, Permutations selon les pics, creux, doubles montées, doubles descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi, *Discrete Math.* 28 (1979), 21-35.
16. M. E. H. Ismail, D. Stanton et X. G. Viennot, The Combinatorics of q-Hermite polynomials and the Askey-Wilson Integral, *Europ. J. Combinatorics* (1987) 8, 379-392.
17. D. Knuth, *The art of computer programming*, vol 3, Addison-Wesley, Reading, 1973.
18. M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol 17, ed Gian-Carlo Rota , Addison-Wesley, Reading, Massachussets, 1983.
19. R. C. Read, The Chord Intersection Problem, Second International Conf. on Combinatorial Mathematics, *Ann. New-York Acad. Sc.*, vol 319 (1979), 444-454.
20. J. Riordan, The distribution of Crossings of Chords Joining Pairs of  $2n$  Points on a Circle, *Mathematics of Computation*, v.29, n° 129, (1975), 215-222.
21. M.P.Schützenberger, Context-free langages and pushdown automata, *Information and Control*, 6 (1963), 246-264.
22. J.Touchard, Sur un problème de configurations, *C. R. Acad. Sc. Paris*, Vol. 230, (1950), 1997-1998.
23. J.Touchard, Contributions à l'étude du problème des timbres poste, *Canad. J. Math.*, V. 2, (1950), 385-398.
24. J. Touchard, Sur un problème de configurations et sur les fractions continues, *Canad. J. Math*, V. 4, (1952), 2-25.
25. X.G. Viennot, *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, notes de cours , Université du Québec à Montréal, Montréal 1983.
26. X.G. Viennot, Enumerative combinatorics and algebraic languages, in *Fundamental of Computation Theory* , Proc. FCT'85, Lectures Notes in Comp. Sci. n° 199, ed. L. Budach, Springer-Verlag, 1985.

