SUR LES MATRICES A SIGNES ALTERNANTS

Mireille Bousquet-Mélou, LaBRI,
Laurent Habsieger, CeReMaB
Université Bordeaux I
351, Cours de la Libération
33 405 Talence Cedex, France

Introduction

Une *matrice à signes alternants* $A=\left(A_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ est une matrice carrée, dont les coefficients appartiennent à l'ensemble $\{0,+1,-1\}$, et vérifiant de plus les deux conditions suivantes :

- dans chaque ligne et chaque colonne, les (+1) et les (-1) alternent (si l'on ne tient pas compte des zéros),

- la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne est 1.

Par exemple, la matrice suivante est à signes alternants :

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&-1&1&0\\1&-1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Notons $A_1(n)$ le nombre de telles matrices de taille n ; on calcule facilement $A_1(1)=1$, $A_1(2)=2$, $A_1(3)=7$; il y a quelques années, Robbins a conjecturé l'identité suivante :

$$A_1(n)=\prod_{i=0}^{n-1}\frac{(3i+1)!}{(n+i)!}\ \ldots$$

... qui n'a jamais été prouvée, en dépit de tentatives déjà relativement nombreuses, dont Robbins [4] a récemment retracé l'historique. D'autres conjectures, de forme voisine, portant sur l'énumération des matrices à signes alternants présentant certaines propriétés de symétrie, ont également été formulées, et, de nouveau, aucune d'entre elles n'est à ce jour démontrée. Citons à ce sujet l'étonnement de Robbins : " These conjectures are of such compelling simplicity that it is hard to understand how any mathematician can bear the pain of living without understanding why they are true".

Nous présentons ici une bijection entre les matrices à signes alternants de taille n et d'autres matrices, dites *matrices de type* $\mathcal{P}$, de taille n-1. Cette bijection présente principalement deux intérêts :

- ces nouvelles matrices semblent se prêter à une énumération plus facile. En particulier, elles peuvent être effectivement énumérées par des formules de récurrence, un peu à l'instar des triangles monotones [3].

- de plus, les éventuelles symétries de la matrice initiale se traduisent facilement par des propriétés analogues de la matrice image, ce qui laisse envisager l'étude des différentes classes de matrices symétriques pour l'énumération desquelles Mills et Robbins ont formulé des conjectures. Nous calculons effectivement les premiers termes des suites énumérant les matrices à signes alternants appartenant à certaines classes de symétrie, étendant ainsi les tables connues.

Par ailleurs, un cas particulier de cette bijection permet de relier la notion de matrices à signes alternants à celle de configurations de chemins ne se coupant pas. A l'aide des résultats généraux relatifs à ces configurations, nous généralisons et justifions bijectivement la formule sommatoire suivante :

$$\sum 2^{N(A)} = 2^{\binom{n}{2}}$$

qui porte sur toutes les matrices à signes alternants A de taille n, et dans laquelle $N(A)$ désigne le nombre de coefficients égaux à -1 dans A.

1) Un changement de base. Matrices de type $\mathcal{P}$

On peut caractériser les matrices $A = \left(A_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n}$ à signes alternants dans l'ensemble des matrices carrées à coefficients entiers à l'aide des deux conditions suivantes :

$$(1) \quad \forall\, 1 \le i,j \le n, \quad \left\{ \sum_{1 \le k \le j} a_{ik} \,,\, \sum_{1 \le k \le i} a_{kj} \right\} \subset \{0,1\},$$

$$(2) \quad \forall\, 1 \le i \le n, \quad \sum_{1 \le k \le n} a_{ik} = \sum_{1 \le k \le n} a_{ki} = 1 .$$

La condition (2) signifie que les matrices à signes alternants appartiennent à un sous-espace affine de dimension $(n-1)^2$ de l'espace des matrices carrées réelles de taille n. Choisissons pour origine de ce sous-espace la matrice identité de taille n, notée I_n, et pour base la famille $\left(E_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n-1}$, avec :

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & j & j+1 & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & & & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & -1 & 1 & & & \\ & \cdots & & 1 & -1 & & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & & & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Ainsi, toute matrice $A = \left(A_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n}$ de ce sous-espace s'écrit :

$$A = I_n + \sum_{1 \le i,j \le n-1} x_{ij} E_{ij} .$$

On a alors :

$$\forall \quad 1 \le i, j \le n \quad a_{ij} = \delta_{ij} + x_{i,j-1} + x_{i-1,j} - x_{ij} - x_{i-1,j-1} ,$$

en convenant que $x_{0i} = x_{i0} = 0$ et $x_{ni} = x_{in} = 0$ pour $0 \le i \le n$; inversement, les x_{ij} se déduisent des a_{kl} par les formules suivantes :

$$\forall\, 1 \le i, j \le n-1, \quad x_{ij} = \min(i,j) - \sum_{\substack{1 \le k \le i \\ 1 \le l \le j}} a_{kl} .$$

Enfin, on montre que la condition (1) ci-dessus se traduit sur les coefficients x_{ij} par :

$$(3) \quad \begin{cases} x_{i+1,j} - x_{i,j} \in \begin{cases} \{0,1\} & \text{si } 0 \le i < j \le n-1 , \\ \{-1,0\} & \text{si } 0 \le j \le i \le n-1 , \end{cases} \\ \\ x_{i,j+1} - x_{i,j} \in \begin{cases} \{0,1\} & \text{si } 0 \le j < i \le n-1 , \\ \{-1,0\} & \text{si } 0 \le i \le j \le n-1 , \end{cases} \end{cases}$$

où l'on convient que $x_{0i} = x_{i0} = 0$ et $x_{ni} = x_{in} = 0$ pour $0 \le i \le n$.

Nous appelons *matrices de type* $\mathcal{P}$ les matrices $X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le n-1}$ satisfaisant les conditions (3).

Les matrices de type $\mathcal{P}$ sont donc des matrices d'entiers positifs, ayant seulement des 0 et des 1 sur les lignes et colonnes extérieures. De plus, dans chaque ligne et chaque colonne, les coefficients croissent jusqu'à la diagonale, et décroissent ensuite. Les éléments diagonaux sont donc des maxima locaux. Enfin, deux coefficients voisins diffèrent de un au plus. La diagonale principale apparaît ainsi comme une "ligne de crête", et c'est cette image, mêlée à une crise subite et aiguë de régionalisme, qui nous a amenés à appeler "matrices de type pyrénéen" ces matrices, terminologie que nous abrégeons discrètement en "matrices de type $\mathcal{P}$".

Par exemple, la matrice de type $\mathcal{P}$ associée à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La correspondance que nous venons de décrire étant bijective, l'énumération des matrices à signes alternants de taille n se ramène donc à celle des matrices de type $\mathcal{P}$ de taille n-1.

2) Propriétés de symétrie

Le groupe des symétries du carré agit naturellement sur les matrices à signes alternants. Il y a 8 classes de conjugaison de sous-groupes de ce groupe, et, pour chacune de ces classes, on peut s'intéresser aux matrices à signes alternants invariantes sous l'action d'un sous-groupe représentant la classe considérée. Dans la plupart des cas, Mills et Robbins [2] [4] ont formulé des conjectures sur le nombre de telles matrices, dont la forme est voisine de celle de la conjecture principale énoncée ci-dessus. L'un des avantages du codage des matrices à signes alternants par des matrices de type $\mathcal{P}$ consiste en une traduction simple des propriétés de symétrie. Par exemple, étudions en détail le cas des matrices symétriques par rapport aux deux diagonales.

Notons V_n la matrice $\left(\delta_{i,n+1-j}\right)_{1\le i,j\le n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & 0 & . & 0 \\ 0 & . & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Une matrice A à signes alternants de taille n est symétrique par rappport aux deux diagonales si et seulement si ${}^tA = A$ et ${}^t\left(V_n A V_n\right) = A$.
Or, ${}^tE_{ij} = E_{ji}$ et ${}^t\left(V_n E_{ij} V_n\right) = E_{n-j,n-i}$. De même, ${}^tI_n = I_n$ et ${}^t\left(V_n I_n V_n\right) = I_n$.

Comme la famille $\left(E_{ij}\right)_{1\le i,j\le n-1}$ est libre, les conditions de symétrie sur A se traduisent de la façon suivante sur les coefficients de X : $x_{ij} = x_{ji} = x_{n-j,n-i}$ pour $1 \le i,j \le n-1$, ce qui équivaut à dire que la matrice X est elle-même symétrique par rapport aux deux diagonales.

En suivant les notations de Robbins, nous notons $A_6(n)$ le nombre de matrices à signes alternants symétriques par rapport aux deux diagonales. Mills et Robbins [2] [4] ont conjecturé que

$$\frac{A_6(2n+1)}{A_6(2n-1)} = \frac{\binom{3n}{n}}{\binom{2n-1}{n}}.$$

Ils ne proposent en revanche aucune formule pour $A_6(2n)$.

Il est facile de vérifier que les autres propriétés de symétrie se transportent de façon simple sur les matrices de type $\mathcal{P}$. Nous parvenons ainsi aux résultats suivants : soit A une matrice à signes alternants de taille n, et $X = \left(x_{ij}\right)_{1\le i,j\le n-1}$ la matrice de type $\mathcal{P}$ associée à A.

La matrice A est symétrique par rapport à la diagonale principale si et seulement si X l'est aussi, c'est à dire si $x_{ij} = x_{ji}$ pour $1 \le i,j \le n-1$.

La matrice A est symétrique par rapport à l'axe vertical si et seulement si $x_{ij} + x_{i,n-j} = \min(i,j,n-i,n-j)$ pour $1 \le i,j \le n-1$.

La matrice A est invariante par rotation de 180 degrés si et seulement si X l'est aussi, c'est à dire si $x_{ij} = x_{n-i,n-j}$ pour $1 \le i,j \le n-1$.

La matrice A est invariante par rotation de 90 degrés si et seulement si $x_{ij} + x_{n-j,i} = \min(i,j,n-i,n-j)$ pour $1 \le i,j \le n-1$.

La matrice A est symétrique par rapport aux deux diagonales si et seulement si X l'est aussi, c'est à dire si $x_{ij} = x_{ji} = x_{n-i,n-j}$ pour $1 \le i,j \le n-1$.

La matrice A est symétrique par rapport à l'axe vertical et à l'axe horizontal si et seulement si $x_{ij} + x_{i,n-j} = x_{ij} + x_{n-i,j} = \min(i,j,n-i,n-j)$ pour $1 \le i,j \le n-1$.

La matrice A est invariante par toutes les symétries du carré si et seulement si $x_{ij} = x_{ji} = x_{n-i,n-j}$ et $x_{ij} + x_{i,n-j} = \min(i,j,n-i,n-j)$ pour $1 \le i,j \le n-1$.

3) Matrices de type $\mathcal{P}$ généralisé

Nous nous intéressons ici à l'énumération de matrices un peu plus générales que les matrices de type $\mathcal{P}$.

Appelons *matrice de type $\mathcal{P}$ généralisé* toute matrice $X = \left(x_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ vérifiant les conditions

$$(4)\quad \begin{cases} x_{i+1,j} - x_{i,j} \in \begin{cases} \{0,1\} & \text{si } 0 \le i < j \le n \ , \\ \{-1,0\} & \text{si } 0 \le j \le i \le n-1 \ , \end{cases} \\ \\ x_{i,j+1} - x_{i,j} \in \begin{cases} \{0,1\} & \text{si } 0 \le j < i \le n \ , \\ \{-1,0\} & \text{si } 0 \le i \le j \le n-1 \ , \end{cases} \end{cases}$$

où l'on convient que $x_{0i} = x_{i0} = 0$ pour $0 \le i \le n$. La différence avec les matrices de type $\mathcal{P}$ provient du fait qu'ici, les coefficients de la dernière ligne et la dernière colonne de X peuvent être différents de 0 et 1. Cette nouvelle définition est donc moins restrictive. Toute matrice de type $\mathcal{P}$ est bien sûr de type $\mathcal{P}$ généralisé, et il existe une bijection évidente (consistant à rajouter une ligne et une colonne de zéros) entre les matrices de type $\mathcal{P}$ de taille n-1 et les matrices de type $\mathcal{P}$ généralisé de taille n telles que $x_{nn} = 0$.

Par exemple, la matrice suivante est de type $\mathcal{P}$ généralisé (mais pas de type $\mathcal{P}$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $X = \left(x_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ une matrice de type $\mathcal{P}$ généralisé. Alors $x_{nn} \le n$. Pour $1 \le i \le n$, notons n_i (resp. m_i) le nombre de coefficients égaux à i dans la dernière colonne (resp. ligne) de X, et valuons cette matrice par :

$$\prod_{1\le i\le n} x_i^{n_i} y_i^{m_i} \ ,$$

où x_i et y_i désignent des indéterminées. Notons $\overline{Q}_{n,p}$ la série génératrice des matrices de type $\mathcal{P}$ généralisé de taille n telles que $x_{nn} = p$. Le nombre de matrices à signes alternants de taille n est alors $A_1(n) = \overline{Q}_{n,0}$. On cherche une relation de récurrence reliant les polynômes $\overline{Q}_{n,p}$.

On convient que $\overline{Q}_{0,0} = 1$. On a par ailleurs : $\overline{Q}_{n,p} = 0$ pour $0 \le n < p$.

Considérons une matrice X de type $\mathcal{P}$ généralisé de taille n+1, et la matrice X' obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de X. Alors X' est aussi de type $\mathcal{P}$ généralisé. Trois cas sont alors possibles ; si $p = x_{n+1,n+1}$:

(α) $\quad x_{nn} = p$,

(β) $\quad x_{nn} = p-1$,

(γ) $\quad x_{nn} = p+1$.

Une étude précise de la façon dont la matrice X' peut se prolonger en X fournit la relation de récurrence suivante :

$$\overline{Q}_{n+1,p}=\overline{S}_p\overline{T}_p\left(\overline{Q}_{n,p}+\overline{Q}_{n,p-1}+\overline{Q}_{n,p+1}\right),$$

où, pour $p\geq 0$, $\overline{T}_p$ est la transformation linéaire de $\mathbb{R}\left[x_1,\ldots,x_{p+1},y_1,\ldots,y_{p+1}\right]$ définie par :

$$\overline{T}_p\left(x_1^{n_1}\ldots x_{p+1}^{n_{p+1}}\,y_1^{m_1}\ldots y_{p+1}^{m_{p+1}}\right)=x_p^{1+n_{p+1}}\,y_p^{1+m_{p+1}}\prod_{1\leq i\leq p}\frac{x_i^{1+n_i}-x_{i-1}^{1+n_i}}{x_i-x_{i-1}}\;\frac{y_i^{1+m_i}-y_{i-1}^{1+m_i}}{y_i-y_{i-1}},$$

avec $x_0=1$ et $y_0=1$, et $\overline{S}_p$ est la transformation linéaire de $\mathbb{R}\left[x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_p\right]$ définie par :

$$\overline{S}_p\left(x_1^{n_1}\ldots x_p^{n_p}\,y_1^{m_1}\ldots y_p^{m_p}\right)=\begin{cases}0 & \text{si } \prod_{1\leq i\leq p} n_i m_i=0\;,\\ \\ x_1^{n_1}\ldots x_p^{n_p}\,y_1^{m_1}\ldots y_p^{m_p} & \text{sinon.}\end{cases}$$

La transformation $\overline{S}_p$ peut être vue comme une opération de simplification, ou une projection.

En outre, on obtient pour les matrices de type $\mathcal{P}$ généralisé symétriques par rapport à la diagonale principale une récurrence tout à fait analogue, en ne prenant qu'une famille d'indéterminées. Les polynômes énumérant ces matrices sont les $Q_{n,p}$, où $\left(Q_{n,p}\right)_{0\leq n,p}$ est la famille définie comme suit :

- $Q_{0,0}=1$,
- $Q_{n,p}=0$ pour $0\leq n<p$,
- enfin, pour $n\geq 0$ et $p\leq n+1$, $Q_{n+1,p}=S_pT_p\left(Q_{n,p}+Q_{n,p-1}+Q_{n,p+1}\right)$,

où T_p est la transformation linéaire de $\mathbb{R}\left[x_1,\ldots,x_{p+1}\right]$ définie par :

$$T_p\left(x_1^{n_1}\ldots x_{p+1}^{n_{p+1}}\right)=x_p^{1+n_{p+1}}\prod_{1\leq i\leq p}\frac{x_i^{1+n_i}-x_{i-1}^{1+n_i}}{x_i-x_{i-1}}\,,\tag{5}$$

où, de nouveau, $x_0=1$, et S_p est la transformation linéaire de $\mathbb{R}\left[x_1,\ldots,x_p\right]$ définie par :

$$S_p\left(x_1^{n_1}\ldots x_p^{n_p}\right)=\begin{cases}0 & \text{si } \prod_{1\leq i\leq p} n_i=0\;,\\ \\ x_1^{n_1}\ldots x_p^{n_p} & \text{sinon.}\end{cases}\tag{6}$$

4) Calculs effectifs

Les polynômes $\overline{Q}_{n,p}$ et $Q_{n,p}$ que nous avons définis dans la section précédente, et que nous savons déterminer par récurrence, permettent le calcul effectif des premiers termes des suites énumérant les matrices à signes alternants appartenant à certaines classes de symétrie. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux trois classes pour lesquelles aucune formule n'a été conjecturée : matrices symétriques par rapport à la diagonale principale, matrices de taille paire symétriques par rapport aux deux diagonales, matrices totalement symétriques. Dans ces trois cas, nous avons pu allonger notablement la liste des valeurs connues (Stanley [6]). Les tables des résultats sont données à la fin de l'article.

a) Matrices générales

Comme nous l'avons précédemment remarqué, le nombre de matrices à signes alternants de taille n est $A_1(n) = \overline{Q}_{n,0}$. Nous avons ainsi pu vérifier la conjecture de Robbins jusqu'au dixième terme.

b) Matrices symétriques par rapport à la diagonale principale

Le nombre de matrices à signes alternants de taille n symétriques par rapport à la diagonale principale est $A_2(n) = Q_{n,0}$.

Nous avons alors calculé $A_2(n)$ jusqu'à n=20, prolongeant ainsi la table de valeurs donnée par Stanley [6], qui donnait $A_2(n)$ pour $n \leq 8$.

c) Matrices symétriques par rapport aux deux diagonales

Comme nous l'avons rappelé en section 2, s'il existe une conjecture sur le nombre de matrices à signes alternants de taille impaire symétriques par rapport aux deux diagonales, on ne dispose, à notre connaissance, d'aucune formule analogue pour les matrices de taille paire. Nous montrons ici que le nombre de telles matrices s'exprime en fonction des polynômes Q_{np}, pour $0 \leq p \leq n$.

Soit A une matrice à signes alternants de taille $2n$ symétrique par rapport aux deux diagonales. D'après la section 2, il est équivalent de dire que la matrice X de type $\mathcal{P}$ associée est elle aussi symétrique par rapport aux deux diagonales. Notons $X = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq 2n-1}$ cette matrice.

La matrice $Z = (z_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ définie par $z_{ij} = x_{ij}$ pour $1 \leq i,j \leq n$ est une matrice de type $\mathcal{P}$ généralisé, de taille n, symétrique par rapport à sa diagonale principale. Sa valuation est $\prod_{1\leq i\leq n} x_{a_i}$, où $a_i = x_{in}$ pour $1 \leq i \leq n$.

Considérons la matrice symétrique $T = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ définie par $t_{ij} = i - x_{i,2n-j}$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$. Cette matrice est encore de type $\mathcal{P}$ généralisé, de taille n, et symétrique par rapport à sa diagonale principale. Sa valuation est $\prod_{1\leq i\leq n} x_{i-a_i}$.

Inversement, soient $Z = (z_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $T = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices de type $\mathcal{P}$ généralisé de taille n, symétriques par rapport à la diagonale, telles que $z_{in} + t_{in} = i$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors, l'unique matrice $X = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq 2n-1}$ symétrique par rapport aux deux diagonales définie par :

- $x_{ij} = z_{ij}$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$,
- $x_{ij} = i - t_{i,2n-j}$ pour $1 \leq i \leq n$, $n \leq j \leq 2n-1$ et $i + j \leq 2n$,

est de type $\mathcal{P}$.

Finalement, les matrices à signes alternants de taille $2n$ symétriques par rapport aux deux diagonales sont en bijection avec les couples (Z,T) de matrices de type $\mathcal{P}$ généralisé de taille n symétriques par rapport à la diagonale, telles que $z_{in} + t_{in} = i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Ainsi, en posant $Q_n = \sum_{0\leq p\leq n} Q_{np}$, et en écrivant :

$$Q_n = \sum_{\substack{a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\\ 0\leq a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n\leq n}} c_a \prod_{1\leq i\leq n} x_{a_i} \ ,$$

où, pour tout a, c_a est un entier, on obtient :

$$A_6(2n) = \sum_{\substack{a=(a_0, a_1, \ldots, a_n) \\ 0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le n}} c_a \, c_{f(a)} \quad ,$$

où $f(a) = (1-a_1, 2-a_2, \ldots, n-a_n)$.

Nous avons alors calculé $A_6(2n)$ jusqu'à n=12, prolongeant ainsi la table de valeurs donnée par Stanley [6], qui donnait $A_6(2n)$ pour $n \le 4$. Une formule similaire permet d'exprimer en fonction des Q_{np} le nombre de matrices à signes alternants de taille impaire symétriques par rapport aux deux diagonales. Nous avons ainsi calculé $A_6(2n+1)$ jusqu'à n=10.

d) Matrices totalement symétriques

Là encore, on ne connaît pas de conjecture donnant le nombre de matrices à signes alternants totalement symétriques de taille donnée. Soit A une telle matrice. Elle est forcément de taille impaire, soit $2n$+1. D'après la section 2, il est équivalent de dire que la matrice X de type $\mathcal{P}$ associée est symétrique par rapport aux deux diagonales et vérifie les conditions supplémentaires suivantes : $x_{ij} + x_{i,2n+1-j} = \min(i, j, 2n+1-i, 2n+1-j)$ pour $1 \le i,j \le 2n$.

La matrice $Z = (z_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ définie par $z_{ij} = x_{ij}$ pour $1 \le i,j \le n$ est une matrice de type $\mathcal{P}$ généralisé, de taille n, symétrique par rapport à sa diagonale principale. Par ailleurs, la condition énoncée ci-dessus implique que $x_{in} + x_{i,n+1} = i$, pour $1 \le i \le n$, et entraîne, puisque $x_{in} - x_{i,n+1}$ vaut 0 ou 1, que, pour $1 \le i \le n$:

$$z_{in} = x_{in} = \left[\frac{i+1}{2}\right].$$

Inversement, soit $Z = (z_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice de type $\mathcal{P}$ généralisé de taille n symétrique par rapport à la diagonale vérifiant cette condition. Alors, l'unique matrice $X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le 2n}$ totalement symétrique définie par $z_{ij} = x_{ij}$ pour $1 \le i,j \le n$ est de type $\mathcal{P}$.

Finalement, les matrices à signes alternants de taille $2n$+1 totalement symétriques sont en bijection avec les matrices de type $\mathcal{P}$ généralisé de taille n symétriques par rapport à la diagonale, dont la valuation est $x_1^2 x_2^2 \ldots x_{n/2}^2$ si n est pair, $x_1^2 x_2^2 \ldots x_{n-1/2}^2 x_{n+1/2}$ si n est impair. Ceci prouve alors que le nombre $A_8(2n+1)$ de matrices à signes alternants totalement symétriques est le coefficient de $x_1^2 x_2^2 \ldots x_{n/2}^2$ dans $Q_{n,n/2}$ si n est pair, et le coefficient de $x_1^2 x_2^2 \ldots x_{n-1/2}^2 x_{n+1/2}$ dans $Q_{n,n+1/2}$ si n est impair.

Nous avons alors calculé $A_8(2n+1)$ jusqu'à n=13, prolongeant ainsi la table de valeurs donnée par Stanley [6], qui donnait $A_6(2n)$ pour $n \le 7$.

Remarque. Il est facile de raffiner ces calculs, en valuant chaque matrice à signes alternants selon le nombre de -1 qu'elle possède. En effet, le nombre de -1 d'une matrice à signes alternants A est la somme des cardinaux des trois ensembles suivants :
$\{(i,j), j > i, x_{ij} = x_{i+1,j} = x_{i+1,j+1} = x_{i,j+1} + 1\}$, $\{(i,j), j < i, x_{ij} = x_{i,j+1} = x_{i+1,j+1} = x_{i+1,j} + 1\}$,
et $\{i, x_{ii} = x_{i+1,i+1} = x_{i,i+1} + 1 = x_{i+1,i} + 1\}$, où X est la matrice de type $\mathcal{P}$ associée à A. De légères modifications des transformations $\overline{S}_p$ et $\overline{T}_p$ permettent alors de calculer les premières valeurs des

polynômes P_n définis par $P_n = \sum x^{N(A)}$, où la somme porte sur les matrices A à signes alternants de taille n, et $N(A)$ désigne le nombre de -1 de A. Nous retrouvons ainsi la conjecture de Mills, Robbins et Rumsey [3] : il existe une famille $(B_n(x))_{n\geq 1}$ de polynômes telle que :

$$P_n(x) = \begin{cases} B_n(x)B_{n+1}(x) & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2B_n(x)B_{n+1}(x) & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Nous calculons ainsi les premières valeurs des $B_n(x)$. Elles figuraient déjà dans l'article de Stanley [6], à l'exception de la dernière.

$$B_1(x) = 1,$$
$$B_2(x) = 1,$$
$$B_3(x) = 1,$$
$$B_4(x) = 6 + x,$$
$$B_5(x) = 2 + x,$$
$$B_6(x) = 60 + 70x + 12x^2 + x^3,$$
$$B_7(x) = 6 + 13x + 6x^2 + x^3,$$
$$B_8(x) = 840 + 3080x + 3038x^2 + 1224x^3 + 195x^4 + 20x^5 + x^6,$$
$$B_9(x) = 24 + 136x + 234x^2 + 176x^3 + 63x^4 + 12x^5 + x^6,$$
$$B_{10}(x) = 15120 + 126000x + 348684x^2 + 451944x^3 + 311706x^4 + 124120x^5 + 29250x^6 + 4214x^7 + 441x^8 + 30x^9 + x^{10}.$$

Nous avons effectué des calculs similaires pour d'autres classes de symétrie (matrices symétriques par rapport une diagonale ou deux) sans jamais retrouver de semblables propriétés de factorisation.

5) Configurations de chemins ne se coupant pas. Une formule sommatoire

Dans la section précédente, il apparaît que le codage des matrices symétriques par rapport à la diagonale principale est plus simple à étudier que celui des matrices générales. Or, si A est une matrice à signes alternants quelconque de taille n, la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix},$$

de taille $2n$, est à la fois à signes alternants et symétrique. La matrice de type $\mathcal{P}$ associée à A' s'écrit :

$$X' = \begin{pmatrix} 1\,1 & .. & 1 & & & \\ 1\,2 & .. & 2 & & Y & \\ .. & & .. & & & \\ 1\,2 & .. & n & .. & 2\,1 \\ & & .. & & .. \\ & {}^tY & 2 & .. & 2\,1 \\ & & 1 & .. & 1\,1 \end{pmatrix},$$

avec $Y = (y_{ij})_{1\leq i,j\leq n-1}$ et $y_{ij} = i - \sum_{\substack{1\leq k\leq i \\ 1\leq l\leq j}} a_{kl}$.

L'application qui associe à la matrice A la matrice Y est inversible car

$$\forall \ 1 \le i,j \le n \qquad a_{ij} = y_{i-1,j} + y_{i,j-1} - y_{ij} - y_{i-1,j-1},$$

où l'on convient que $y_{0i} = 0$, $y_{i0} = i$, $y_{in} = 0$ et $y_{ni} = n - i$ pour $0 \le i \le n$. Cette transformation est équivalente à celle qu'utilisent Robbins et Rumsey [5] en associant à chaque matrice A sa "corner sum matrix" définie par :

$$\bar{a}_{ij} = \sum_{1 \le k \le i, 1 \le l \le j} a_{kl} \ .$$

On obtient ainsi une bijection entre les matrices à signes alternants de taille n et certaines partitions planes. En effet, il est clair, compte tenu de la définition (3) des matrices de type $\mathcal{P}$, que les coefficients de Y décroissent dans les lignes et croissent dans les colonnes. De façon précise, nous disposons donc d'une bijection entre les matrices à signes alternants de taille n et les matrices $Y = (y_{ij})_{1 \le i,j \le n-1}$ de taille n-1 telles que :

$$(7) \qquad \forall \quad 0 \le i,j \le n-1 \quad \begin{cases} y_{i+1,j} - y_{ij} \in \{0,1\}, \\ y_{i,j+1} - y_{ij} \in \{-1,0\}, \end{cases}$$

avec $y_{0i} = 0$, $y_{i0} = i$, $y_{in} = 0$ et $y_{ni} = n - i$ pour $0 \le i \le n$.

Par exemple, la matrice image de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ce nouveau codage permet dans un premier temps d'obtenir pour $A_1(n)$ une formule close. En effet, la structure de la diagonale de X' montre que, pour construire X' par les étapes (α), (β) et (γ) décrites dans la section 3, il faut appliquer successivement n fois l'étape (β), puis n fois l'étape (γ). Cette remarque nous permet d'écrire la formule

$$A_1(n) = R_0 R_1 \ldots R_{n-1} R_n R_{n-1} \ldots R_1(1),$$

où pour $0 \le p \le n$, $R_p = S_p T_p$, les opérateurs linéaires T_p et S_p étant définis respectivement par (5) et (6). Il est ensuite facile de voir que $R_n R_{n-1} \ldots R_1(1) = x_1 x_2 \ldots x_n$, ce qui mène finalement à :

$$A_1(n) = R_0 R_1 \ldots R_{n-1}(x_1 x_2 \ldots x_n).$$

Cette écriture permet également de vérifier la conjecture de Robbins, jusqu'au dixième terme de nouveau.

Par ailleurs, nous allons montrer que ce codage permet d'expliquer bijectivement et de généraliser la formule suivante, déjà mentionnée dans [3][5][6] :

$$\sum_{A \in \mathcal{A}_n} 2^{N(A)} = 2^{\binom{n}{2}}.$$

Par commodité, nous choisissons, plutôt que les "corner sum matrices" de Robbins et Rumsey, le codage équivalent suivant : à toute matrice à signes alternants $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, on associe la matrice définie par :

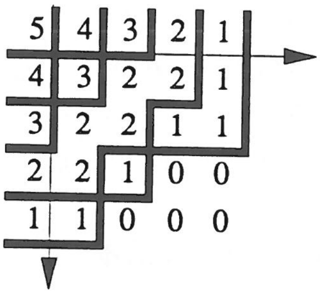
$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{i \le k \le n, j \le l \le n} a_{kl} \ .$$

Ce codage réalise une bijection entre les matrices à signes alternants de taille n et les matrices $Z=\left(z_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ vérifiant :

$$\begin{cases} z_{ij}-z_{i,j+1}\in\{0,1\}, \\ z_{ij}-z_{i+1,j}\in\{0,1\}, \\ z_{i1}=z_{1i}=n+1-i. \end{cases}$$

Ces matrices sont elles mêmes en bijection avec des configurations de chemins ne se coupant "presque" pas, dans un sens que nous définirons rigoureusement plus bas. Cette bijection s'établit en prenant pour chemins ceux qui délimitent l'ensemble des coefficients de Z supérieurs ou égaux à un entier donné. Par exemple, la configuration associée à la matrice A ci-dessus s'obtient comme suit :

$$A \;\to\; \tilde{A}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\to$$



$\to$

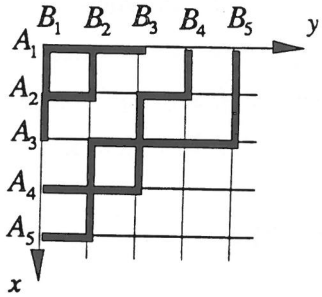


Figure 1.

Introduisons maintenant un peu de vocabulaire.

On appelle *chemin de longueur n* tout n+1-uplet $\omega=(s_0,s_1,\dots,s_n)$ de points de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, tel que, si $s_i=(x_i,y_i)$, alors x_i-x_{i+1} et $y_{i+1}-y_i$ sont éléments de $\{0,1\}$. Les s_i sont les *sommets* de ω, les couples (s_i,s_{i+1}) sont ses *arêtes*, et ω *joint* le point s_0 au point s_n. Une arête telle que x_i-x_{i+1} et $y_{i+1}-y_i$ soient égaux à 1 est un *pas diagonal*. Deux chemins ω et ω' se *coupent* s'ils ont un sommet en commun ; ils se *traversent* s'il existe des points $c_1,\dots,c_k$ tels que $\omega=(s_1,\dots,s_i,c_1,\dots,c_k,s_{i+1},\dots s_n)$, $\omega'=(t_1,\dots,t_j,c_1,\dots,c_k,t_{j+1},\dots t_m)$ avec $s_i\ne t_j$, $s_{i+1}\ne t_{j+1}$ et, si $s_i=(u,v)$, $t_j=(u',v')$, $s_{i+1}=(z,t)$, et $t_{j+1}=(z',t')$, alors :

- si $u\ge u'$ et $v\ge v'$, alors $z\le z'$ et $t\le t'$;
- si $u\le u'$ et $v\le v'$, alors $z\ge z'$ et $t\ge t'$;.

Ainsi, les matrices à signes alternants de taille n sont en bijection avec les n-uplets $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)$ de chemins sans pas diagonaux, ne se traversant pas et n'ayant pas d'arête commune, tels que ω_i joigne A_i et B_i, où $A_i=(i-1,0)$ et $B_i=(0,i-1)$ pour $i\ge 1$ (Figure 1).

On dit que ω présente un *croisement* en position (i,j) si ce sommet est commun à deux chemins de ω. On dit que ω présente un *coude intérieur* en position (i,j) s'il n'y a pas de croisement en ce point, et si les points $(i+1,j)$, (i,j) et $(i,j+1)$ sont sommets d'un chemin de ω. Par exemple, la configuration de la figure 1 présente 5 croisements et 2 coudes intérieurs. Un calcul facile mène alors aux résultats suivants : si A est une matrice à signes alternants et ω la configuration de chemins associée :

- ω présente un coude intérieur en position (i,j) si et seulement si a_{ij} = -1,

- ω présente un croisement en position (i, j) si et seulement si $a_{ij} = 0$ et $\sum_{i<k\leq n} a_{kj} = \sum_{j<l\leq n} a_{il} = 1$.

Rappelons que le *nombre d'inversions* d'une matrice à signes alternants est :

$$\sum_{\substack{(i,j,k,l)\\ i<k,\, j<l}} a_{kj}\, a_{il}\ .$$

Il généralise bien sûr la notion usuelle définie pour les permutations. On dira qu'il y a une inversion en position (i, j) si $\sum_{(k,l)/i<k,\, j<l} a_{kj}\, a_{il} = 1$.

Le second résultat énoncé ci-dessus s'exprime alors de la façon suivante : ω présente un croisement en position (i, j) si et seulement si il y a une inversion en (i, j) et si $a_{ij} \neq -1$.

Soit maintenant $\mathfrak{C}_n$ l'ensemble des n-uplets $w = (w_1, \ldots, w_n)$ de chemins ne se coupant pas, tels que w_i joigne A_i et B_i. Valuons une telle configuration par $\prod_{1\leq i\leq n-1} q_i^{d_i}$, où d_i est le nombre de pas diagonaux apparaissant dans w en la $i^{\text{ème}}$ ligne.

Par exemple, la valuation de la seconde configuration de la figure 2 est $q_1 q_2^2 q_3 q_4$.

Proposition. La série génératrice des configurations de $\mathfrak{C}_n$ est :

$$D_n = \prod_{1\leq i\leq n-1} (1+q_i)^{n-i}\ .$$

Preuve. On se trouve exactement dans le cadre de la théorie de Gessel-Viennot relative aux déterminants et aux chemins ne se coupant pas. Pour $i \geq 1$ et $j \geq 1$, notons M_{ij} la série génératrice des chemins allant de A_i à B_j. On a les relations suivantes :

- $M_{i1} = M_{1i} = 1$ pour $i \geq 1$,
- $M_{ij} = M_{i-1,j} + M_{i,j-1} + q_{i-1} M_{i-1,j-1}$ pour $i \geq 2$ et $j \geq 2$.

La série génératrice D_n des configurations de $\mathfrak{C}_n$ est alors le déterminant de la matrice $\left(M_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

Effectuons sur ce déterminant les transformations élémentaires suivantes :

- pour $i \geq 2$, on soustrait à la $i^{\text{ème}}$ ligne la ligne précédente;
- puis, pour $j \geq 2$, on soustrait à la $j^{\text{ème}}$ colonne la colonne précédente.

En développant ensuite le déterminant par rapport à la première ligne, on obtient, compte tenu de la relation de récurrence ci-dessus, l'identité suivante,

$$D_n = D_{n-1} \prod_{1\leq i\leq n-1} (1+q_i)\ ,$$

qui fournit le résultat, puisque $D_1 = 1$.

Remarque. Une preuve bijective de ce résultat étonnamment simple serait sans doute intéressante.

Revenons maintenant aux matrices à signes alternants. Soit A une matrice à signes alternants de taille n, ω la configuration de chemins associée. Soit $\phi(A)$ l'ensemble des configurations de $\mathfrak{C}_n$ obtenues en transformant en pas diagonaux un certain nombre des coudes intérieurs de ω et la totalité des coudes $((i+1, j), (i, j), (i, j+1))$ tels qu'il y ait un croisement en position (i, j).

Alors, la somme des valuations des configurations de $\phi(A)$ est :

$$q_i^{I_i(A)-N_i(A)}(1+q_i)^{N_i(A)},$$

où $N_i(A)$) (resp. $I_i(A)$) désigne le nombre de -1 (resp. le nombre d'inversions) de A en $i$ème ligne, c'est à dire en position (i, j) pour un certain j.

Par exemple, les quatre configurations de $\mathcal{C}_5$ obtenues a partir de la configuration de la figure 1 sont :

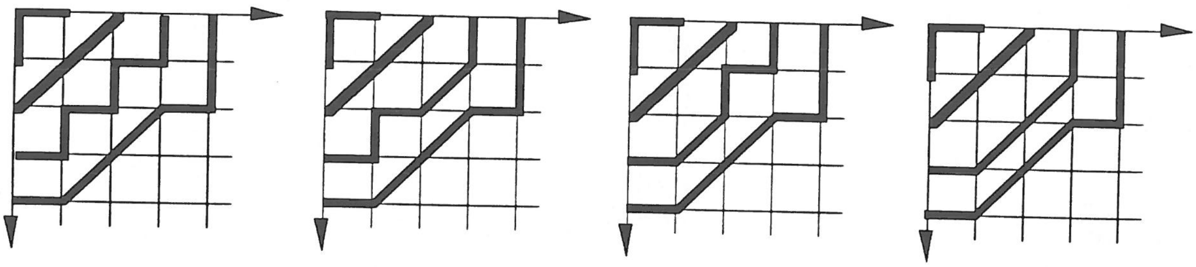


Figure 2.

Par ailleurs, l'ensemble des $\phi(A)$, lorsque A varie, est une partition de $\mathcal{C}_n$, et on aboutit donc au résultat suivant, dans lequel $\mathcal{A}_n$ désigne l'ensemble des matrices à signes alternants de taille n.

Proposition.

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_n}\prod_{1\le i\le n-1} q_i^{I_i(A)-N_i(A)}(1+q_i)^{N_i(A)} = \prod_{1\le i\le n-1}(1+q_i)^{n-i}.$$

Quelques cas particuliers.

1) Ce résultat était connu dans le cas où $q_i = q$ pour tout i ([5]) ; il s'écrit alors :

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_n} q^{I(A)-N(A)}(1+q)^{N(A)} = (1+q)^{\binom{n}{2}},$$

où $N(A)$) (resp. $I(A)$) désigne le nombre de -1 (resp. le nombre d'inversions) de A.

Lorsque $q = 1$, il mène à la relation : $\sum_{A\in\mathcal{A}_n} 2^{N(A)} = 2^{\binom{n}{2}}$.

2) Nous pouvons raffiner ce résultat de la facon suivante : soit A une matrice à signes alternants de taille n. Alors $N_1(A) = 0$ et, si l'unique coefficient non nul de la première ligne de A est situé en $k$ème colonne, $I_1(A) = k-1$. Notons $\mathcal{A}_{n,k}$ l'ensemble des matrices à signes alternants de taille n dont le coefficient non nul de la première ligne est en $k$ème colonne. La valuation d'une matrice de $\mathcal{A}_{n,k}$ est :

$$q_1^{k-1}\prod_{2\le i\le n-1} q_i^{I_i(A)-N_i(A)}(1+q_i)^{N_i(A)}.$$

En développant le premier facteur de la formule donnée dans la proposition ci-dessus, il vient

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_{n,k}}\prod_{1\le i\le n-1} q_i^{I_i(A)-N_i(A)}(1+q_i)^{N_i(A)} = \binom{n-1}{k-1} q_1^{k-1}\prod_{2\le i\le n-1}(1+q_i)^{n-i}.$$

En particulier, pour $q_i = 2$, on obtient : $\sum_{A\in\mathcal{A}_{n,k}} 2^{N(A)} = \binom{n-1}{k-1} 2^{\binom{n-1}{2}}$.

Résultats numériques :

n	$A_2(n)$	$A_6(n)$	$A_8(n)$
1	1	1	1
2	2	2	0
3	5	3	1
4	16	8	0
5	67	15	1
6	368	52	0
7	2 630	126	2
8	24 376	568	0
9	293 770	1 783	4
10	4 610 624	10 436	0
11	94 080 653	42 471	13
12	2 492 747 656	323 144	0
13	85 827 875 506	1 706 562	46
14	3 842 929 319 936	16 866 856	0
15	223 624 506 056 156	115 640 460	248
16	16 901 839 470 598 576	1 484 714 416	0
17	1 659 776 507 866 213 636	13 216 815 036	1 516
18	211 853 506 422 044 996 288	220 426 128 584	0
19	35 137 231 473 111 223 912 310	2 548 124 192 970	13 654
20	7 569 998 079 873 075 147 860 464	55 203 533 023 856	0
21		828 751 754 742 975	142 873
22		23 322 499 520 009 200	0
23			2 156 888
24		16 623 477 112 752 060 736	0
25			38 456 356
26			0
27			974 936 056

Références.

[1] I. Gessel et X.G. Viennot, Binomial determinants, paths, and hook length formulae, Adv. in Math. 58, 1985, p. 300-321.

[2] W. H. Mills et David P. Robbins, Symmetries of alternating sign matrices, manuscript.

[3] W. H. Mills, David P. Robbins et H. Rumsey, Alternating sign matrices and descending plane partitions, J. Comb. Th. A, Vol. 34, n°3, 1983, p. 340-359.

[4] David P. Robbins, The story of 1, 2, 7, 42, 429, 7436, ... , *The Mathematical Intelligencer*, vol. 13, n°2, 1991, p. 12-19.

[5] David P. Robbins et H. Rumsey, Determinants and alternating sign matrices, Adv. in Math. 62, 1986, p. 169-184.

[6] Richard P. Stanley, A baker's dozen of conjectures concerning plane partitions, *Combinatoire énumérative*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1234, New-York, Springer-Verlag (1985), p. 285-293.