Le nombre d'arbres m-Husimis invariants sous une permutation des sommets.

Ivan Constantineau

Version Préliminaire

Abstract. Let $[n]$ be the set $\{1, 2, \ldots, n\}$ and β a permutation of S_n, the symmetric group on $[n]$. In this paper we compute the number of m-Husimi's rooted and unrooted trees on $[n]$ fixed by conjugation with β.

Résumé. Soient $[n]$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ et β une permutation de S_n, le groupe symétrique sur $[n]$. Dans cet article, nous calculons le nombre d'arbres et d'arborescences m-Husimi invariants par conjugaison avec β.

§0. Introduction.

Un arbre *Husimi général* est un graphe connexe dont les arêtes ne sont jamais contenues dans plus d'un cycle simple. On peut imaginer un arbre Husimi (figure 1) comme un arbre de Cayley ordinaire, auquel on aurait "substitué" des polygones de diverses tailles aux arêtes de l'arbre. L'arbre est dit *pur* si tous les polygones qui le constituent sont de même taille. Si la taille de ces polygones est m, on dira qu'il est $m-$Husimi.

Dans cet article nous calculons, pour tout entier $m > 2$ le nombre d'arbres $m-$Husimis invariants sous une permutation donnée des sommets. Nous avons déjà traité le cas $m = 2$ des arbres ordinaires dans [4]. La méthode utilisée ici est la même que celle que nous avons employée pour résoudre ce dernier cas.

Nous trouvons d'abord le nombre d'*arborescences* (arbres *pointés*) $m-$Husimi laissées fixes par une permutation donnée. Le nombre d'arbres $m-$Husimi invariants s'exprime aisément en termes du nombre de ces arborescences.

Nos calculs reposent sur le *principe d'auto-similarité* que nous décrivons sommairement dans la section 1. Le lecteur pourra en trouver une description plus complète dans [1]. Puisque ce principe s'énonce en termes d'espèces de structures, nous profitons de cette section pour en rappeller les rudiments.

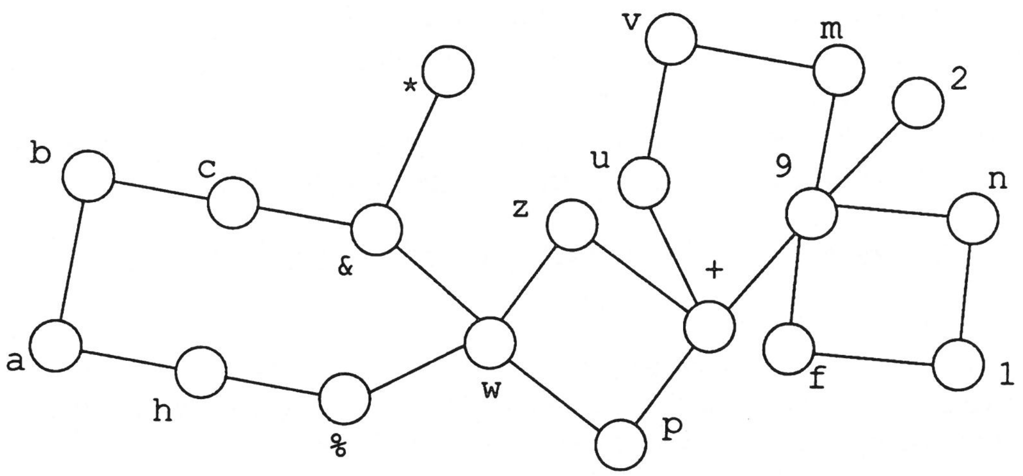

Figure 1. Un arbre Husimi général

§1. Espèces de structures et auto-similarité.

1.1 Espèces de structures. Une *espèce de structures* [10,12] F est une règle qui, premièrement, associe à tout ensemble fini U, un ensemble fini $F[U]$ de $F-$*structures* sur U et qui, deuxièmement, assigne à toute bijection $f : U \to V$ une bijection $F[f] : F[U] \to F[V]$ telle que, pour tout U, on ait $F[1_U] = 1_{F[U]}$ et telle que, si la composée fg de deux bijections f, g est bien définie, alors on ait $F[fg] = F[f]F[g]$. La bijection $F[f]$ est appelée le *transport le long de* f des $F-$structures sur U vers les $F-$structures sur V.

Soit U un ensemble fini. Le groupe symétrique sur U, S_U, agit sur $F[U]$ par transport de structures. Soit β une permutation dans S_U. L'ensemble des points fixes de $F[\beta]$ est dénoté $Fix(F[\beta])$ et sa cardinalité $fix(F[\beta])$.

Soit $n \geq 0$ un entier et $\beta \in S_n$. Pour toute espèce F donnée, les termes $fix(F[\beta])$ ne dépendent, en général, que du *type* $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ de la permutation β (pour tout i, β a β_i cycles de longueur i). Nous écrirons aussi (indifféremment) $\beta \vdash 1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \ldots n^{\beta_n}$ pour indiquer le type de β.

Les types de permutations d'ensembles finis sont en bijection (évidente) avec les *partages d'entiers*. Ainsi, pour tout partage τ, l'expression $fix(F[\tau])$ a un sens. Pour toute espèce F on définit la *série indicatrice de cycles* de F, dénotée Z_F, de la manière suivante:

$$Z_F = Z_F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{\substack{\tau \\ \tau \vdash 1^{\tau_1} 2^{\tau_2} 3^{\tau_3} \ldots}} fix(F[\tau]) \frac{x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3} \cdots}{1^{\tau_1}\tau_1! 2^{\tau_2}\tau_2! 3^{\tau_3}\tau_3! \cdots}. \tag{1}$$

La théorie des espèces de structures permet un calcul systématique des séries indicatrices. En effet à chaque opération *combinatoire* sur les espèces (somme, produit de Cauchy, produit cartésien, composition partitionnelle, composition fonctorielle, dérivée etc) il correspond une opération *algébrique* au niveau des séries indicatrices. Pour trouver la série indicatrice d'une espèce donnée F on commence par la décomposer au niveau combinatoire, via un *isomorphisme naturel*, en termes d'espèces plus simples (dont la série indicatrice est connue) et d'opérations combinatoires particulières sur ces dernières. On obtient alors la série indicatrice de F en opérant algébriquement sur les séries des espèces qui la composent.

1.2 Auto-similarité. Une autre façon de calculer des séries indicatrices consiste à trouver directement leurs coefficients. La méthode de l'auto-similarité procède de la sorte. A partir d'une permutation β d'un type donné (arbitraire) on construit et énumère les structures de $Fix(F[\beta])$.

Pour donner une idée de cette méthode, nous en restreignons l'étude aux cas des sous-espèces $F \subseteq Rel$ de l'espèce Rel des *relations binaires*[1].

Pour tout ensemble fini U, $Rel[U] = \{s : s \subseteq U \times U\}$. De plus, si $f : U \to V$ est une bijection, alors le transport des $Rel-$structures le long de f est défini par la règle suivante:

$$\forall (x_1, x_2) \in U \times U, (f(x_1), f(x_2)) \in Rel[f](s) \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in s. \tag{2}$$

Définitions 1. *Soient $n \geq 0$ un entier, β une permutation de $[n]$ et F une sous-espèce de Rel. L'ensemble des cycles sous-jacents à la permutation β est dénoté $\mathbb{C}(\beta)$. Pour toute $F-$structure s sur $[n]$ nous définissons la* **relation quotient** *s/β de s par β de la manière suivante:*

$$\forall (C, D) \in \mathbb{C}(\beta) \times \mathbb{C}(\beta), (C, D) \in s/\beta \Leftrightarrow \exists x \in C, \exists y \in D, (x, y) \in s. \tag{3}$$

[1] Il semble plausible [13] que toute espèce de structure puisse être envisagée (plongée) comme une sous-espèce des relations. Notre méthode, qui s'étend sans difficulté aux relations m-aires [2] (quelque-soit m), s'appliquerait donc à toute espèce de structure ordinaire.

De plus, nous posons $Q_F(\beta) = \{\rho \in Rel[\mathbb{C}(\beta)] : \exists s \in F[n], s/\beta = \rho\}$ *et désignons par* $\delta_{F,\beta} : Fix(F[\beta]) \to Q_F(\beta)$ *la surjection définie par* $\delta_{F,\beta}(s) = s/\beta$.

Définitions 2. *Soient* $F \subseteq Rel$ *et* $P[n]$ *l'ensemble des parties de* $[n]$, $s \in F[n]$ *et* $x \in [n]$. *La coupe (en première composante) de* s *suivant* x, *dénotée* $s(x)$ *est l'ensemble* $s(x) = \{y : (x,y) \in s\}$.*Soit* β *une permutation de* S_n. *Pour toute* $s \in Fix(F[\beta])$ *on définit la fonction* $\Delta^s_{F,\beta}$ *comme suit:*

$$\begin{aligned} \Delta^s_{F,\beta} : \mathbb{C}(\beta) &\to P[n] \\ C \quad &\to s(min(C)). \end{aligned} \tag{4}$$

Posons $Sim(F,\beta) = \{(\delta_{F,\beta}(s), \Delta^s_{F,\beta}) : s \in Fix(F[\beta]), (\delta_{F,\beta}(s), \times P[n]^{\mathbb{C}(\beta)}, \Delta^s_{F,\beta}) \in Q_F(\beta)\}$. *On définit la fonction* $\Gamma_{F,\beta} : Fix(F[\beta]) \to Sim(F,\beta)$ *par* $\Gamma_{F,\beta}(s) = (\delta_{F,\beta}(s), \Delta^s_{F,\beta})$.

Proposition 3. *Pour toute espèce* $F \subseteq Rel$, *tout entier* $n \geq 0$ *et toute permutation de* $[n]$, *la fonction* $\Gamma_{F,\beta}$ *est une bijection.*

Preuve. La démonstration découle immédiatement des définitions 1 et 2. □

Pour trouver $fix(F[\beta])$ il suffit de calculer la cardinalité de $Sim(F,\beta)$. C'est ce en quoi consiste le principe d'auto-similarité. Nous lui avons donné ce nom simplement parce qu'on a souvent (pour de nombreuses espèces F) l'inclusion $Q_F(\beta) \subseteq F[\mathbb{C}(\beta)]$.

§2. Arbres et arborescences m−Husimis.

2.1 Racine et centre. Nous dénotons l'espèce des arbres Husimis généraux par Hus et celle des arbres et arborescences m−Husimis respectivement par Hus_m et Hup_m. L'espèce Hup_m est l'espèce Hus_m *pointée*, $Hup_m = Hus^\bullet_m$.

Par définition, une arborescence h (m−Husimi) a un unique point distingué, la *racine* $\rho(h)$. Si β est une permutation telle que $Hup_m[\beta](h) = h$ alors on a $\beta(\rho(h)) = \rho(h)$ et β doit avoir au moins un point fixe. Dans la structure quotient h/β nous désignons ce point fixe par $\rho(h/\beta)$.

Pour une Hus_m−structure, la situation, bien que similaire, n'est pas tout à fait la même. En effet, pour tout arbre $\alpha \in Fix(Hus_m[\beta])$ le *centre* de α doit être fixé par β. Rien n'oblige, par contre, à ce qu'il le soit *ponctuellement.*

En général, le centre d'un arbre Husimi α est soit un point, soit un polygone. Une manière simple de le retrouver consiste (comme pour les arbres de Cayley) à "émonder" l'arbre jusqu'au centre: on enlève successivement toutes les feuilles (les polygones pendants) de l'arbre initial et des sous-arbres obtenus.

Bien entendu si le centre de l'arbre est un point, alors la permutation β doit avoir un point fixe. Mais cela n'est pas forcé si le centre est un polygone. Par exemple, tout polygone à m côtés est un arbre m−Husimi (centré en lui-même) dont le groupe d'automorphismes contient *toujours* (si $m \geq 2$) des permutations circulaires (sans point fixe).

2.2 L'ensemble SIM($\mathbf{Hup_m}$, β). Soit $\beta \in S_n$. Pour toute Hup_m−structure sur $[n]$ et toute paire de sommets (x,y) dans $[n] \times [n]$ on dénote la distance de x à y dans h par $d_h(x,y)$ ou encore, plus simplement, par $d(x,y)$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. Si h est dans $Fix(Hup_m[\beta])$ et si x et y sont deux points du même cycle $C \in \mathbb{C}(\beta)$ alors on a $d_h(x,\rho(h)) = d_h(y,\rho(h))$. Ainsi, pour tout cycle $C \in \mathbb{C}(\beta)$ et tout $x \in C$, on a $d_{h/\beta}(C,\rho(h)) = d_h(x,\rho(h))$.

Soit $h \in Hup_m[n]$. En général tout sommet x peut faire partie de plusiers m−gones de h. Cependant, si x n'est pas la racine de h, il n'y a qu'un seul de ces m−gones contenant x pour lequel x n'est pas à distance minimale de $\rho(h)$ relativement aux autres sommets du m−gone. Nous dénotons ce m−gone par G_x. De plus, pour tout autre m−gone G contenant x, nous dirons que G *se ferme* sur x et que x ferme G. Si G est un m−gone de h et si G se ferme sur x alors l'arbre de longueur $m-2$ (sur $m-1$ points) que l'on obtient de G en y enlevant x et les arêtes adjacentes à x est appelé un m−gone *ouvert*.

Un sommet $x \neq \rho(h)$ est, en général, adjacent, à deux sommets de G_x que l'on dénote $p_1(x)$ et $p_2(x)$. Il y a toujours un de ces deux sommets, disons $p_1(x)$ qui est tel que $d(p_1(x), \rho(h)) < d(x, \rho(h))$. Si m est pair, alors on a soit $d(p_2(x), \rho(h)) < d(x, \rho(h))$ soit $d(p_2(x), \rho(h)) > d(x, \rho(h))$. Dans le cas où $d(p_2(x), \rho(h)) < d(x, \rho(h))$ nous dirons que le point x est la *crête* de G_x.Par contre, si m est impair, on a forcément $d(p_2(x), \rho(h)) \geq d(x, \rho(h))$. Si $d(p_2(x), \rho(h)) = d(x, \rho(h))$ la crête de G_x est alors définie comme étant l'arête $\{x, p_2(x)\}$.

Examinons maintenant la structure des couples $(h/\beta, \Delta_\beta^h)$ que nous pouvons obtenir à partir de $h \in Fix(Hup_m[\beta])$. Nous commençons par répertorier les diverses structures quotients que peuvent induire les m−gones consituant h, via (3).

a. Le cas m = 2k + 1, k ≥ 1. Soit $\{x, y\}$ la crête de G_x, $x \in C_1$ et $y \in C_2$, où $C_i \in \mathbb{C}(\beta), i = 1, 2$.

Si $C_1 = C_2$ alors $|C_1|$ doit être pair et les points x et y sont antipodaux dans le cycle C_1, c'est-à-dire que $\beta^{|c_1|/2}(x) = y$. De plus, si $p_1(x)$ (tel que défini plus haut) est dans un cycle C et que $p_1(x)$ ne ferme pas G_x alors $p_1(y)$ est lui aussi l'antipode de $p_1(x)$ dans C et on a forcément $|C_1| = |C|$.

En continuant de la sorte, on induit de G_x une structure particulière G_x/β dans h/β qui n'est rien d'autre qu'un ordre linéaire de longueur k (la structure $\mathbf{A_2}$ de la figure 2). Le plus petit élément de cet ordre total est un cycle de longueur paire, disons $2j$, contenant les sommets de la crête de G_x comme points antipodaux et les $k-1$ points autres points de cet ordre doivent tous être des cycles de longueur $2j$.De plus si G_x se ferme sur $z \in C_z$ alors $|C_z|$ divise j.

Si $C_1 \neq C_2$ alors on doit avoir $|C_1| = |C_2| = i$, pour un certain entier i arbitraire. La structure quotient G_x/β que l'on obtient de (3) à partir du m−gone G_x est alors, elle aussi, un m−gone (les structures $\mathbf{A_1}$ et $\mathbf{A_3}$ de la figure 2). Le m−gone quotient G_x/β peut être fermé dans tout cycle de longueur divisant i qui ne fait pas partie de G_x/β.

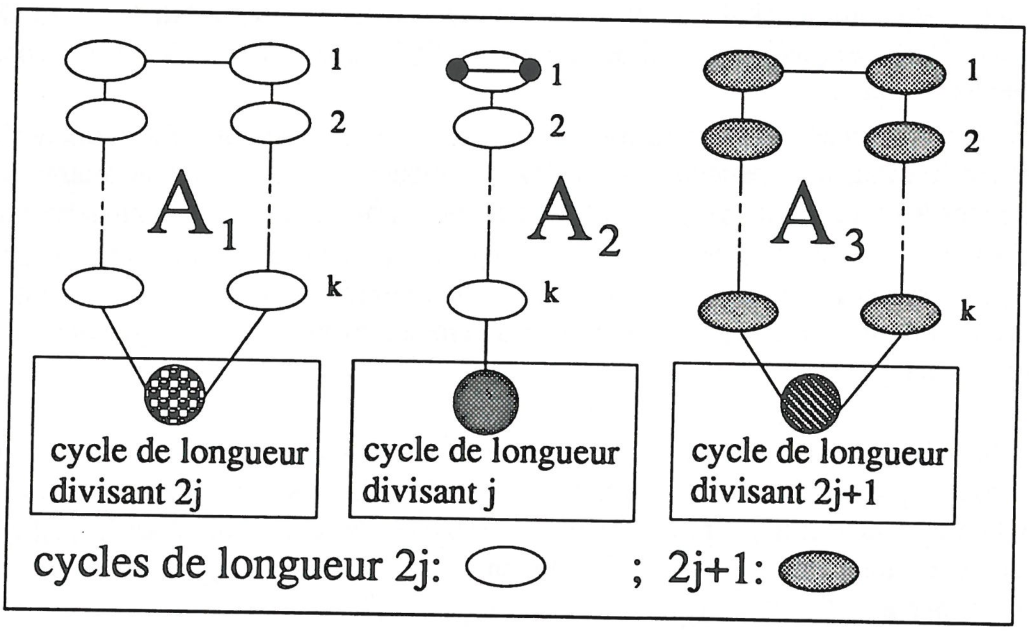

Figure 2. m-gones quotients, m=2k+1

b. Le cas m = 2k, k ≥ 2. Soit x la crête de G_x, $x \in C$ et $p_i(x) \in C_i$, $i = 1, 2$. Encore une fois la structure de G_x/β est déterminée par le fait que $C_1 = C_2$ ou non.

Si $C_1 = C_2$, alors $|C_1| = 2|C|$ et $p_1(x)$ doit être aux antipodes de $p_2(x)$ dans C_1. La structure quotient G_x/β est un ordre linéaire de longueur k ayant comme minimum un cycle de longueur arbitraire i. Les $k-1$ éléments qui restent doivent être des cycles de longueur $2i$. Cet ordre linéaire doit se fermer dans un cycle de longueur i.

Si $C_1 \neq C_2$ alors la structure G_x/β est un $m-$gone constitué de cycles d'une même longueur i, qui se ferme dans un cycle de longueur divisant i.

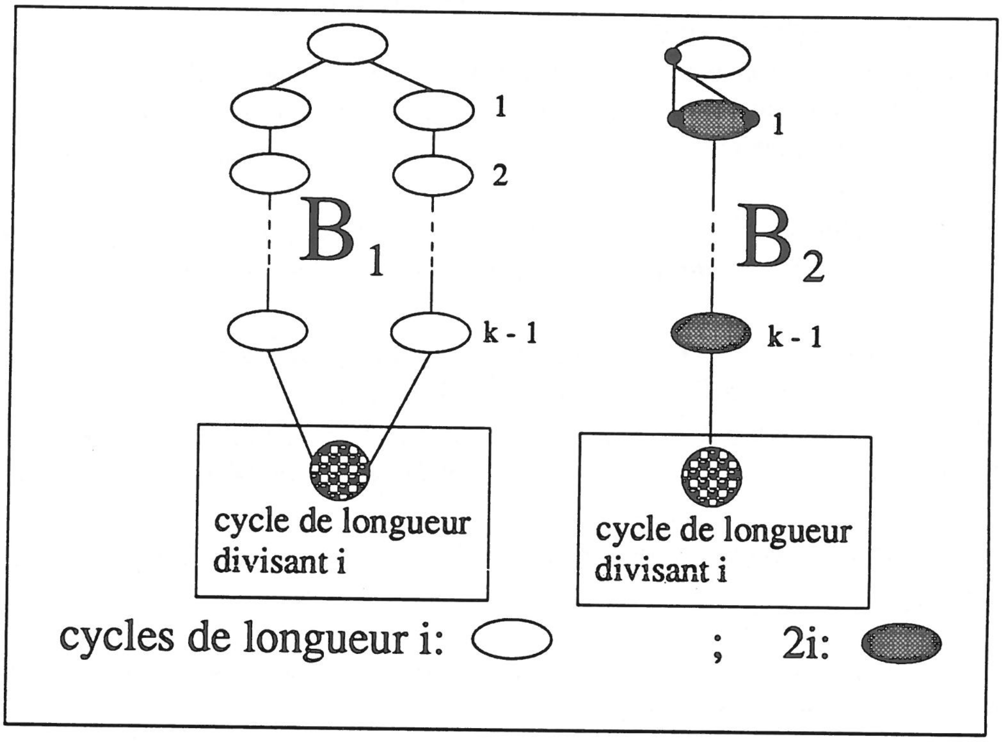

Figure 3. m-gones quotients, m=2k

La structure de h/β est une arborescence à laquelle on substitue aux arêtes les $m-$gones et ordres linéaires quotients G/β que nous venons d'examiner en prenant ceux de forme $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ lorsque $m = 2k+1$ et ceux de forme $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ lorsque $m = 2k$. Bien entendu chacun de ces $m-$gones quotients est fermé (tel que nous l'avons indiqué) dans un cycle de longueur convenable.

Il reste maintenant à examiner les fonctions Δ_β^h telles que décrites par (4) que l'on peut obtenir des structures $h \in Fix(Hup_m[\beta])$. On peut procéder en remarquant d'abord qu'on peut considérer les 5 types de $m-$gones (ouverts) quotients $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ comme des ordres linéaires. C'est déjà le cas pour $\mathbf{A}_2$ et $\mathbf{B}_2$ mais ça l'est aussi, implicitement, pour les types qui restent.

En effet si, pour un certain $m-$gone quotient G/β de type $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3$ ou $\mathbf{B}_1$, C_1 et C_2 sont les deux cycles de $\mathbb{C}(\beta)$ les plus rapprochés de $\rho(h/\beta)$ et si un troisième cycle D ferme G/β alors $\Delta_\beta^h(C_1) \cap D$ détermine entièrement $\Delta_\beta^h(C_2) \cap D$ (il n'y a qu'une seule façon de définir $\Delta_\beta^h(C_2)$, une fois $\Delta_\beta^h(C_1)$ choisie, de manière à fermer et obtenir les $m-$gones de h qui induisent cette structure quotient). Ainsi, on peut convenir qu'un des deux cycles C_1 ou C_2 (par exemple, celui des deux qui contient le plus petit élément des deux cycles) est le minimum (dans G/β) d'un ordre linéaire de longueur $2k-2$, si $m = 2k$ et de longueur $2k-1$ si $m = 2k+1$.

Il suffit donc, pour définir la fonction Δ_β^h sur l'ensemble des cycles constituant G/β, de donner, pour tout cycle C dans l'ordre total G/β, l'image $\Delta_\beta^h(C)$ dans le *successeur* de C (le successeur du maximum de G/β est le cycle qui ferme G/β) que nous dénotons $succ(C)$.

La description que nous venons de faire des couples $(h/\beta, \Delta_\beta^h)$ qu'il est possible d'obtenir des arborescences $m-$Husimis $h \in Fix(Hup_m[\beta])$ est maintenant complète et nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème 4. *Soit $\beta \in S_n$. L'ensemble $Sim(Hup_m, \beta)$ (décrit dans la définition 2) est isomorphe à l'ensemble des couples (δ, Δ) où δ est une arborescence dont chacune des "flèches" peut être envisagée comme un ordre linéaire constitué de cycles de $\mathbb{C}(\beta)$.*

Si $m = 2k+1$, chacun de ces ordres est construit avec des cycles d'une même longueur (i.e. à chaque ordre est associée une longueur particulière de cycles). Ces ordres linéaires sont soit de longueur $2k-1$, soit de longueur $k-1$, le dernier cas ne devant se produire que si la longueur des cycles utilisés pour construire l'ordre est paire.

Si ω est un ordre de longueur $2k-1$ et si M est son cycle maximal alors $succ(M)$ n'est pas dans ω et $|succ(M)|$ divise $|M|$. Si ω est un ordre de longueur $k-1$ alors on doit plutôt avoir $|succ(M)|$ divise $|M|/2$.

Si $m = 2k$ les ordres sont de longueur $2k-2$ ou $k-1$. Encore une fois le cycle maximum M d'un ordre linéaire de longueur $2k-2$ doit être tel que $|succ(M)|$ divise $|M|$.

Pour les ordres de longueur $k-1$, si m est le minimum d'un tel ordre, alors la longueur des $k-2$ autres cycles le constituant est de $2|m|$. Dans ce cas, on doit avoir, si M est le maximum de l'ordre, que $|succ(M)|$ divise $|m|$.

Finalement Δ est une fonction qui assigne à tout cycle $C \in \mathbb{C}(\beta)$ un point arbitraire dans le successeur de C dans δ. □

A l'aide de ce théorème, nous passons maintenant à l'énumération des structures de $Sim(Hup_m, \beta)$. Nous distinguons les cas où m est pair et impair.

2.3 Les arborescences 2k+1–Husimi. Des conditions doivent être imposées sur le type de la permutation β pour que cette dernière puisse fixer un nombre non-nul d'arborescences $m-$Husimis. Dans le cas impair ($m = 2k+1$) elles s'expriment de la manière suivante:

$$\begin{cases} \beta_1 \equiv 1 mod(2k) \\ \beta_{2j+1} \equiv 0 mod(2k), & j > 0 \\ \beta_{2j} \equiv 0 mod(k), & j > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Proposition 5. *Soit $m = 2k+1$, $k \geq 1$. Soit β une permutation de type $(\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n)$. Si, pour tout i, β_i remplit la condition donnée par (5) alors le terme $fix(Hup_m[\beta])$ est donné par l'expression suivante et est nul sinon.*

$$\frac{\beta_1!}{2[(\beta_1 - 1)/2k]!} \left(\frac{(\beta_1 - 1)}{2}\right)^{[(\beta_1-1)/2k]-1} \tag{6.1}$$

$$\prod_{j>1} \frac{\beta_{2j+1}!}{(\beta_{2j+1}/2k)!} \left(\frac{(2j+1)^{2k-1}}{2}\right)^{\frac{\beta_{2j+1}}{2k}} \left(\sum_{d|2j+1} d\beta_d\right)^{\frac{\beta_{2j+1}}{2k}-1} \left(\sum_{d|<2j+1} d\beta_d\right) \tag{6.2}$$

$$\prod_j \sum_{r=0}^{\lfloor \beta_{2j}/2k \rfloor} \frac{\beta_{2j}!(2j)^{\beta_{2j}(1-1/k)}}{r!2^r[(\beta_{2j}/k)-2r]!} \left(\sum_{d|<j} d\beta_d\right)^{\frac{\beta_{2j}}{k}-2r} \left[\left(\sum_{d|2j} d\beta_d\right)^r - 4kjr\left(\sum_{d|2j} d\beta_d\right)^{r-1}\right]. \tag{6.2}$$

où $d|_<$ signifie $d|$ et $d <$.

Preuve. Considérons d'abord le cas des cycles de longueur impaire $2j+1$ avec $j>1$. Comme nous l'avons déjà remarqué , ces cycles ne peuvent être assemblés que pour donner des $(2k+1)-$gones ouverts du type $\mathbf{A_3}$. Il s'agit donc, en premier lieu, pour tout j, de se donner $\beta_{2j+1}/2k$ familles de $2k$ membres chacune, de construire des $2k-$gones ouverts (des arbres) de longueur $2k-1$ avec chacune de ces familles. Cela peut se faire de

$$\left[\frac{\beta_{2j+1}!}{(\beta_{2j+1}/2k)![(2k)!]^{\frac{\beta_{2j+1}}{2k}}}\right] \times \left[\frac{(2k)!}{2}\right]^{\frac{\beta_{2j+1}}{2k}} \tag{7}$$

manières distinctes. Le nombre de façons de définir la fonction Δ sur ces m-gones ouvert est de

$$\left[(2j+1)^{(2k-1)\frac{\beta_{2j+1}}{2k}}\right]. \tag{8}$$

Ainsi, le nombre total de $m-$gones ouverts qu'il est est possible de construire est donné en multipliant (7) et (8), ce qui donne le terme suivant:

$$\frac{\beta_{2j+1}!}{(\beta_{2j+1}/2k)!}\left(\frac{(2j+1)^{2k-1}}{2}\right)^{\frac{\beta_{2j+1}}{2k}} . \tag{9}$$

Pour compléter le calcul il s'agit maintenant de trouver le nombre de manières de fermer ces $m-$gones. Pour y arriver nous procédons comme dans [3] au sujet des arborescences ordinaires. Supposons j fixé.

Commençons par choisir q $m-$gones quotients dans les $\beta_{2j+1}/2k$ que nous venons de construire à qui on impose la condition d'être fermés dans des cycles de longueur $2j+1$ uniquement. Nous les appellons des *m—gones rigides*. Les $[(\beta_{2j+1}/2k)-q]$ $m-$gones qui restent devront, quant à eux, être fermés dans des cycles de longueur strictement plus petite que $2j+1$ (et divisant $2j+1$). Ce sont des *m-gones flexibles*. Pour épuiser toutes les possibilités, le nombre q de $m-$gones rigides doit parcourir les entiers de 0 à $\beta_{2j+1}/2k$.

Il s'agit maintenant de remarquer qu'en procédant de la sorte on obtient en fait une *forêt* de $(\beta_{2j+1}/2k)-q$ arborescences sur un ensemble de $\beta_{2j+1}/2k$ points distincts enracinées aux $m-$gones flexibles. Puisqu'il y a exactement, une fois les racines déterminées,

$$\left[(\beta_{2j+1}/2k)^q - q(\beta_{2j+1}/2k)^{q-1}\right]$$

forêts de ce genre (voir [11]), on obtient que le nombre de manière de fermer les $m-$gones construits sur des cycles de longueur $2j+1$ est de

$$\sum_{q=0}^{\beta_{2j+1}/2k} \binom{\beta_{2j+1}/2k}{q} \left[(\beta_{2j+1}/2k)^q - q(\beta_{2j+1}/2k)^{q-1}\right][2k(2j+1)]^q \left(\sum_{d|_<2j+1} d\beta_d\right)^{\left(\frac{\beta_{2j+1}}{2k}\right)-q} . \tag{10}$$

Ainsi, en multipliant (9) et (10) on obtient (6.2).

Pour ce qui est des cycles de longueur paire, la situation se complique un peu étant donnée le fait qu'il y a deux constructions possibles dans ce cas. Fixons $j \geq 1$.

On commence par choisir r familles de $2k$ points dans les β_{2j} cycles de longueur $2j$ avec lesquels on construit des $2k-$gones ouverts. Avec les $\beta_{2j} - 2rk$ cycles qui restent on construit $\beta_{2j}/k - 2r$ ordres linéaires (ouverts) de k points chacun. Si on tient compte des choix possibles de Δ dans ces constructions, on a

$$\sum_{r=0}^{\lfloor \beta_{2j}/2k \rfloor} \binom{\beta_{2j}}{2rk} \frac{(2rk)!}{r![(2k)!]^r} \frac{(\beta_{2j} - 2rk)!}{(\beta_{2j}/k - 2r)![(k)!]^{\beta_{2j}/k - 2r}} \tag{11}$$

$$(2j)^{(2k-1)r} \left(\frac{(2k)!}{2}\right)^r (2j)^{(k-1)\left(\frac{\beta_{2j}}{k} - 2r\right)} (k!)^{\left(\frac{\beta_{2j}}{k} - 2r\right)}$$

manières de les obtenir. Il ne reste plus qu'à fermer ces $m-$gones et ordres linéaires.

Pour les ordres linéaires on a

$$\left(\sum_{d|<2j} d\beta_d \right)^{\frac{\beta_{2j}}{k} - 2r} \tag{12}$$

choix possibles pour le faire alors que pour les $m-$gones, *qui peuvent être fermés dans les ordres linéaires que nous venons de construire*, on en dénombre plutôt

$$\sum_{q=0}^{r} \binom{r}{q} (r^q - qr^{q-1})(4kj)^q \left(\sum_{d|<2j} d\beta_d + (2kj)\left(\frac{\beta_{2j}}{k} - 2r\right) \right)^{r-q}. \tag{13}$$

En multipliant les résultats trouvés en (11), (12) et (13), on obtient le résultat (6.3).

Une fois la racine choisie, le cas des cycles de longueur 1 se traite de la même manière que celui des cycles de longueur impaire. □

2.4 Les arborescences 2k–Husimi. Lorsque $m = 2k$, $(k > 1)$,, une arborescence quotient ne peut être constituée que de $m-$gones quotient de type $\mathbf{B_1}$ ou $\mathbf{B_2}$ de la figure 3. Les conditions que l'on doit imposer sur β pour que $fix_{Hup}(\beta)$ soit non-nul sont beaucoup plus élaborées que dans le cas impair. Cela tient au fait que les structures quotients de type $\mathbf{B_2}$ sont construites avec des cycles de deux longueurs différentes.

Considérons une permutation $\beta \in S_n$ de type $1^{\beta_1}2^{\beta_2}\ldots n^{\beta_n}$. Cette permutation se décompose de manière unique en une suite de permutations $(\beta_{|1}, \beta_{|3}, \beta_{|5}, \ldots)$, indicée par les entiers impairs où, pour tout j, $\beta_{|j}$ est l'unique sous-permutation de β de type suivant,

$$\beta_{|j} \vdash j^{\beta_j}(2j)^{\beta_{2j}}(2^2 j)^{\beta_{2^2 j}} \ldots (2^{\lambda_j} j)^{\beta_{2^{\lambda_j} j}} \tag{14}$$

où $\lambda_j = \lambda_j(\beta)$ est maximal. Nous appellerons la suite $(\beta_{|1}, \beta_{|3}, \beta_{|5}, \ldots)$ la *décomposition impaire* de β.

Fixons j, un entier impair. Considérons la sous-permutation $\beta_{|j}$ de β telle que nous venons de la définir et examinons les constructions possibles que l'on peut faire avec les cycles de longueur maximale $2^{\lambda_j} j$ dans $\beta_{|j}$.

Supposons que l'on veuille construire, avec ces cycles de longueur maximale, i_{j,λ_j} $2k-$gones du genre représenté par la structure $\mathbf{B}_1$. Alors on choisit $i_{j,\lambda_j}(2k-1)$ cycles dans l'ensemble des $\beta_{2^{\lambda_j}j}$ de longueur $2^{\lambda_j}j$. Ce choix n'est possible, évidemment, que si la condition suivante est respectée,

$$\beta_{2^{\lambda_j}j} \geq i_{j,\lambda_j}(2k-1). \tag{15}$$

Les $\beta_{2^{\lambda_j}j} - i_{j,\lambda_j}(2k-1)$cycles qui restent devront servir à la construction d'ordres linéaires de longueur $k-2$ (de type $\mathbf{B}_2$). On obtient alors une seconde condition sur i_{j,λ_j} relativement à$\beta_{2^{\lambda_j}j}$, à savoir

$$\beta_{2^{\lambda_j}j} \equiv i_{j,\lambda_j}(2k-1) mod(k-2). \tag{16}$$

Posons maintenant

$$R_{j,\lambda_j} = \frac{\beta_{2^{\lambda_j}} - i_{j,\lambda_j}(2k-1)}{k-2}.$$

Le nombre R_{j,λ_j} est le nombre d'ordres linéaires du genre $\mathbf{B}_2$, tous faits de $k-2$ cycles de longueur $2^{\lambda_j}j$ et d'un seul cycle de longueur $2^{\lambda_j-1}j$. Une troisième condition apparaît clairement:

$$\beta_{2^{\lambda_j-1}j} \geq R_{j,\lambda_j}. \tag{17}$$

Nous venons d'obtenir trois conditions (15),(16) et (17) sur la permutation β nécessaires pour obtenir un nombre non-nul d'arborescences $2k-$Husimi fixées par β.

Posons maintenant $\beta^*_{2^{\lambda_j-1}j} = \beta_{2^{\lambda_j-1}j} - R_{j,\lambda_j}$. On se trouve maintenant, relativement à (14), aux prises avec une permutation de type

$$\beta^*_{|j} \vdash j^{\beta_j}(2j)^{\beta_{2j}}(2^2j)^{\beta_{2^2j}}\ldots(2^{\lambda_j-1}j)^{\beta^*_{2^{\lambda_j-1}j}},$$

avec laquelle on doit recommencer la construction que nous venons de faire et obtenir des conditions analogues à celles que nous avons obtenues. En continuant de la sorte on obtient le lemme suivant.

Lemme 6. *Soit β une permutation de $[n]$ de décomposition impaire $(\beta_{|1}, \beta_{|3}, \beta_{|5}, \ldots)$ où, pour tout entier j impair, le type de $\beta_{|j}$ est donné par (14). Pour tout $\rho, 0 \leq \rho \leq \lambda_j$, soit $(i_{j,\lambda_j-\rho})$ le nombre de cycles choisis dans l'ensemble de cycles de longueur $2^{\lambda_j-\rho}j$ pour constituer des $2k-$gones quotients de type $\mathbf{B}_1$. Posons $\beta^*_{2^{\lambda_j}j} = \beta_{2^{\lambda_j}j}$. Alors, pour tout ρ, $0 \leq \rho \leq \lambda_j - 1$, si on veut obtenir un nombre non nul de $Hup_{2k}-$structures sur $[n]$ laissées fixes par β, alors on doit avoir les conditions suivantes*

$$\beta^*_{2^{\lambda_j-\rho}j} \geq i_{j,\lambda_j-\rho}(2k-1),$$

$$\beta^*_{2^{\lambda_j-\rho}j} \equiv i_{j,\lambda_j-\rho}(2k-1) mod(k-2),$$

et

$$\beta_{2^{\lambda_j-\rho-1}j} \geq R_{j,\lambda_j-\rho},$$

où $\beta^*_{2^{\lambda_j-\rho}j}$ et $R_{j,\lambda_j-\rho}$ sont définis (récursivement) par les règles suivantes:

$$R_{j,\lambda_j-\rho} = \frac{\beta^*_{2^{\lambda_j-\rho}j} - i_{j,\lambda_j-\rho}(2k-1)}{k-2}$$

et

$$\beta^*_{2^{\lambda_j-\rho-1}j} = \beta_{2^{\lambda_j-\rho-1}j} - R_{j,\lambda_j-\rho}.$$

Finalement, on a aussi, lorsque $\lambda_j = 0$, les conditions

$$\beta^*_j = \begin{cases} i_{j,0}(2k-1) & ,j>1 \\ i_{j,0}(2k-1)+1 & ,j=1. \end{cases}$$

□

Proposition 7. *Soit $m = 2k$, $k \geq 2$. Soit β une permutation de type $(\beta_1, \beta_2 \dots, \beta_n)$. Alors $fix(Hup_m[\beta])$ est donné par l'expression suivante*

$$\prod_{\substack{j \\ j \text{ impair}}} \sum_{(i_{j,0}, i_{j,1}, \dots, i_{j,\lambda_j})} \prod_{\rho=0}^{\lambda_j} \binom{\beta_{2^{\lambda_j-\rho}j}}{(2k-1)i_{j,\lambda_j-\rho}} \frac{[(2k-1)i_{j,\lambda_j-\rho}]!}{(i_{j,\lambda_j-\rho})![(2k-1)!]^{i_{j,\lambda_j-\rho}}} \left(2^{\lambda_j-\rho}j\right)^{(2k-2)i_{j,\lambda_j-\rho}} \tag{18.1}$$

$$\prod_{\rho=0}^{\lambda_j-1} \binom{\beta_{2^{\lambda_j-\rho-1}j}}{R_{j,\lambda_j}} \frac{\left[\beta_{2^{\lambda_j-\rho}j} - (2k-1)i_{j,\lambda_j}\right]!}{R_{j,\lambda_j}![(k-2)!]^{R_{j,\lambda_j}}} \left[\left(j2^{\lambda_j-\rho}\right)^{k-2}\left(j2^{\lambda_j-\rho-1}\right)\right]^{R_{j,\lambda_j}} \tag{18.2}$$

$$\sum_{v_\rho=0}^{i_{j,\lambda_j-\rho}} \binom{i_{j,\lambda_j-\rho}}{v_\rho} \left[i^{\cdot v_\rho}_{j,\lambda_j-\rho} - v_\rho i^{\cdot v_\rho-1}_{j,\lambda_j-\rho}\right] \left[(2k-1)2^{\lambda_j-\rho}\right]^{v_\rho} \left(R_{j,\lambda_j-\rho}\left(2^{\lambda_j-\rho}j\right)(k-2) + \sum_{d|_< 2^{\lambda_j-\rho}j} d\beta_d\right)^{i_{j,\lambda_j-\rho}-v_\rho} \tag{18.3}$$

$$\sum_{w_\rho=0}^{R_{j,\lambda_j-\rho}} \binom{R_{j,\lambda_j-\rho}}{w_\rho} \left[R^{w_\rho}_{j,\lambda_j-\rho} - w_\rho R^{w_\rho-1}_{j,\lambda_j-\rho}\right] \left[2^{\lambda_j-\rho-1}\right]^{w_\rho} \left(\left(2^{\lambda_j-\rho-1}j\right)\left(\beta_{2^{\lambda_j-\rho-1}j} - R_{j,\lambda_j-\rho}\right) + \sum_{d|_< 2^{\lambda_j-\rho-1}j} d\beta_d\right)^{R_{j,\lambda_j-\rho}-w_\rho}. \tag{18.4}$$

où la somme est sur tous les λ_j−uplets $\left(i_{j,0}, i_{j,1}, \dots, i_{j,\lambda_j}\right)$ satisfaisant les conditions du lemme (6).

Preuve. La preuve de cette proposition est semblable en tous points à celle de la proposition 5. Pour $i = 1, 2$ les équations 18.i donnent le nombre de manières de construire les m−gones respectivement de type $\mathbf{B_i}$. De même, les formules 18.3 et 18.4 sont l'analogue de (10) pour les forêts d'arborescences construites avec des m−gones de type $\mathbf{B_1}$ et $\mathbf{B_2}$, respectivement.

2.5 Les arbres m-Husimi. Nous avons deux cas à traiter pour calculer le nombre d'arbres m−Husimi laissés fixes par une permutation β. Ces cas dépendent de la nature cyclique de β.

Si $\beta_1 \geq 1$ et si $\alpha \in fix(Hus_m[\beta])$ alors le centre de α (que ce soit un $m - gone$ ou un point) est fixé ponctuellement. On obtient alors l'expression suivante, qui est, à un détail près, la même que celle obtenue dans [4] pour les arbres de Cayley,

$$\beta_1 fix(Hus_m[\beta]) = fix(Hup_m[\beta]).$$

Proposition 8. *Soit m et k des entiers tels que $k|m$. Soit $m/k = d$ et β une permutation de type $k^{\beta_k}2k^{\beta_{2k}}\cdots sk^{\beta_{sk}}$ telle que $\beta_k \geq m/k$.*

Si $k = 1$ alors on a

$$fix(Hus_m[\beta]) = \frac{1}{\beta_1} fix(Hup_m[\beta]).$$

Si $k > 1$, alors $fix(Hus_m(\beta))$ est donné par l'expression suivante:

$$\sum_{[r_{ij}]} \frac{\varphi(k)}{2d} \frac{\beta_k!}{(\beta_k - d)!} k^{|\beta|-1} \prod_{i=1}^{s} \binom{\beta^*_{ik}}{r_{i,1}, r_{i,2}, \ldots, r_{i,d}} \prod_{j=1}^{d} fix(Hup_m[1^{r_{1,j}}2^{r_{2,j}}\cdots s^{r_{s,j}}]) \qquad (19)$$

où la somme est indicée par la matrice d'entiers $r_{ij} \geq 0, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq d$, φ est la fonction d'Euler, $|\beta| = \sum_{i=1}^{s} \beta_{ik}$, $\beta^*_{ik} = \begin{cases} \beta_{ik} - d & , i = 1 \\ \beta_{ik} & , autrement. \end{cases}$

Preuve. Le cas $k = 1$ a été démontré plus haut.

Soit $k > 1$. Pour fabriquer un arbre $\alpha \in Fix(Hus_m[\beta])$ on choisit d'abord d cycles dans les β_k cycles de longueur k pour constituer le centre de α. Il y a

$$\binom{\beta_k}{d} \frac{(d-1)!}{2} \varphi(k) k^{d-1}$$

manières de construire ce m-gone central.

Puis on partitionne les cycles qui restent en d familles (possiblement vides) qu'on associe aux d cycles du centre. C'est la raison pour laquelle apparaît un produit de multinomiaux dans (19).

Pour chacune des d sous-permutations que nous avons ainsi déterminées, on construit ensuite une arborescence $m-$Husimi laissée fixe par cette sous-permutation.

En considérant la $k-$ième itérée de β, on obtient alors (avec les r_{ij} fixés),

$$k^{\left(\sum_{i=1}^{s} \beta^*_{ik}\right)} \prod_{j=1}^{d} fix(Hup_m[1^{r_{1,j}}2^{r_{2,j}}\cdots s^{r_{s,j}}])$$

manières de construire ces arborescences $m-$Husimi. □

Bibliographie.

[1.] I.Constantineau, *Auto-similarité dans la combinatoire des polynômes orthogonaux*, Actes du Colloque "Séries Formelles et Combinatoire Algébrique", Bordeaux, 2–4 Mai 1991, à paraître.

[2.] I.Constantineau, *Sur le nombre de graphes connexes fixés par l'action d'une permutation donnée.* Prépublication.

[3.] I.Constantineau, J.Labelle. *Calcul combinatoire du nombre d'endofonctions et d'arborescenecs laissées fixes par une permutation.* Ann. sc. Math. Québec, 13 (2), 1989, 33–38.

[4.] I.Constantineau, J. Labelle. *On Combinatorial Structures Kept Fixed by the Action of a Given Permutation.* Studies in Applied Maths., 84, 105–118 (1991).

[5.] G.W.Ford, G.E.Uhlenbeck. *Combinatorial Problems in the Theory of Graphs. I*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol.42, 122–128 (1956).

[6.] G.W.Ford, R.Z.Norman, G.E.Uhlenbeck. *Combinatorial Problems in the Theory of Graphs. II*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol.42, 203–208 (1956).

[7.] F.Harary, E.M.Palmer. *Graphical Enumeration*, Academic Press, 1973.

[8.] F.Harary, G.E. Uhlenbeck. *On some generalizations of rooted trees.* Am. Math. Soc., p. 168, March 1952. (résumé).

[9.] F.Harary, G.E. Uhlenbeck. *On the Number of Husimi Trees,I*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol.39, 315–322 (1953).

[10.] A.Joyal. *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Maths, (42):1–82,1981.

[11.] G.Labelle. *Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange*, Adv. in Math. 42:217–247 (1981).

[12.] J.Labelle. *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de strucutres.* Ann.Sc.Math.Québec, 7(1):59–94, 1983.

[13.] P.Leroux, Communication personnelle.

[14.] P.Leroux, B. Miloudi, *Généralisations de la formule d'Otter*, Ann. sc. Math. Québec, à paraître.

[15.] K.A. Zaretskii. *Husimi Trees*, Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR, 9, 1971; trad. Matematicheskie Zametki, Vol.9, No.3, pp.253–262, Mars 1971.