Démonstration de logiciel

gfun : un logiciel pour trouver une fonction génératrice.

Simon Plouffe (LACIM, Uqam)
Paul Zimmermann (INRIA, France).

Le logiciel **gfun** est un "package" Maple spécialisé dans la manipulation des suites d'entiers ou de polynômes à coefficients entiers, des séries de puissances, des fonctions génératrices. Il répond, entre autres, à la question suivante: Etant donné les quelques premiers termes d'une suite, quelle en est la fonction génératrice ?

Si **gfun** ne peut trouver un bon candidat pour une forme close de la fonction génératrice, il peut quand même souvent générer un bon candidat pour une équation fonctionnelle ou une équation différentielle satisfaite par la fonction génératrice. D'autres outils permettent également de passer des équations différentielles aux récurrences associées et réciproquement. A titre d'exemple, pour la suite 1, 0, 1, 4, 18, 112, 820, 6912, 66178, 708256, 8372754, ... , **gfun** trouve la fonction génératrice:

$$\frac{\exp\left\{\dfrac{x(x^2-3x-2)}{4(1-x)}\right\}}{(1-x)^{1/2}}.$$

Voir *Handbook of Integers Sequences* de N.J.A. Sloane, Academic Press, New York 1973; suite #1437, Gupta, H., *Enumeration of Symmetric Matrices*, Duke Mathematical Journal, Vol. 35 (1968), pp. 653-659.

Le programme est entièrement contenu dans l'environnement Maple. Les fichiers d'aide sont directement accessibles de Maple et guident l'usager sur la façon d'utiliser celui-ci. L'usager peut lui-même configurer le type d'opérations à essayer ou laisser le programme lui fournir le candidat.

Un autre exemple bien connu nous est fourni par les nombres de Catalan. La suite se lit: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012... Bien qu'on obtienne une forme close facilement avec ces quelques termes le programme trouve immédiatement l'équation

$$1 - f(x) + x\, f(x)^2 = 0\ .$$

En résolvant par rapport à f(x) on trouve évidemment la fonction génératrice des nombres de Catalan:

$$\frac{1-(1-4x)^{1/2}}{2x}\ .$$

Le système nous propose également l'équation de récurrence:

$$(1 - 2\, n)\, c(n) + (1/2 + 1/2\, n)\, c(n + 1) = 0\ .$$

qu'il est en mesure de résoudre directement ou récursivement en fournissant une procédure qui permettra de calculer autant de termes que l'on veut:

```
c:= proc(n)
    options remember;
        if not type(n,nonnegint) then ERROR(`invalid arguments`) fi;
        2*c(n-1)*(-3+2*n)/n
    end;
```

Le type d'objets mathématiques pouvant être traités est évidemment les suites d'entiers mais également les suites de polynômes et mêmes de séries. De cette façon on peut obtenir, par exemple, la fonction génératrice des polynômes de Laguerre. Les premiers polynômes de Laguerre (pour le paramètre 1) sont:

$$1,\ 2 - x,\ 3 - 3\,x + 1/2\,x^2,\ 4 - 6\,x + 2x^2 - 1/6\,x^3,$$
$$5 - 10\,x + 5\,x^2 - 5/6\,x^3 + 1/24\,x^4,$$
$$6 - 15\,x + 10\,x^2 - 5/2\,x^3 + 1/4\,x^4 - 1/120\,x^5,$$
$$7 - 21\,x + 35/2\,x^2 - 35/6\,x^3 + 7/8\,x^4 - 7/120\,x^5 + 1/720\,x^6,$$
$$8 - 28\,x + 28\,x^2 - 35/3\,x^3 + 7/3\,x^4 - 7/30\,x^5 + 1/90\,x^6 - 1/5040\,x^7, \ldots$$

Le programme nous répond alors :

$$\frac{\exp\left(\frac{xz}{z-1}\right)}{1-2z+z^2}\ .$$

En développant cette fonction en série de Taylor par rapport à z, le nième terme de la série est le nième polynôme de Laguerre.

En collaboration avec François Bergeron (LACIM) et Bruno Salvy (INRIA).