Énumération des polyominos convexes suivant l'aire : exemple de résolution d'un système de q-équations différentielles

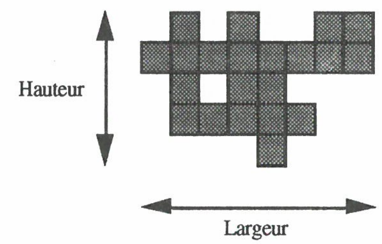
Mireille Bousquet-Mélou, Jean-Marc Fédou
LaBRI, Université Bordeaux 1
351, Cours de la Libération 33405 Talence-Cédex France

Introduction

Les *polyominos* sont des objets connus et étudiés depuis longtemps en combinatoire. Ils interviennent également dans l'étude de certains modèles de physique statistique, le plus souvent sous la forme équivalente d'*animaux*.

Considérons le plan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Une *cellule élémentaire* est un carré $[i, i+1]\times[j, j+1]$, où i et j sont des entiers. On appelle *polyomino* toute union finie de cellules élémentaires, d'intérieur connexe, définie à translation près (Fig.1). Un polyomino est *verticalement* (resp. *horizontalement*) *convexe* lorsque toutes ses intersections avec les colonnes (resp. lignes) du plan sont convexes. Un polyomino qui est à la fois verticalement et horizontalement convexe sera dit *convexe*.

Fig.1.
Un polyomino.



On peut distinguer, par généralité croissante, plusieurs sous-classes de polyominos convexes : les *rectangles* (...), les *diagrammes de Ferrers* (Fig.2.1), les polyominos *parallélogrammes* (Fig.2.2), les polyominos *convexes dirigés* (Fig.2.3) et les polyominos convexes généraux (Fig.2.4).

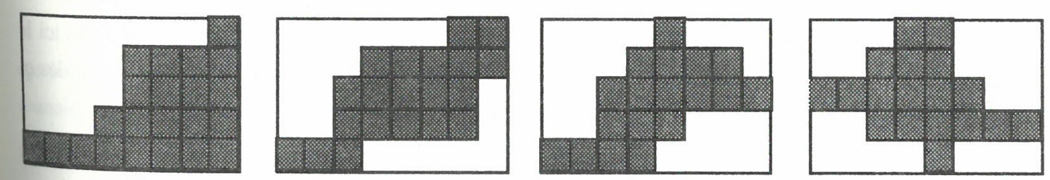


Fig.2. Différentes sous-classes de polyominos convexes.

Nous nous intéressons ici à l'énumération de ces objets. Plusieurs paramètres peuvent être pris en compte : le périmètre, la hauteur, la largeur, l'aire... Remarquons que dans le cas des polyominos convexes, l'énumération suivant hauteur et largeur raffine l'énumération selon le périmètre.

Soit $\mathcal{P}$ une famille de polyominos ; sa *série génératrice* est $P(x,y,q)=\sum P_{n,m,a}\, x^n\, y^m\, q^a$, où $P_{n,m,a}$ désigne le nombre d'éléments de $\mathcal{P}$ de largeur n, de hauteur m et d'aire a. Dans les cinq familles décrites ci-dessus, les paramètres hauteur et largeur ont même distribution, ce qui implique que les séries génératrices correspondantes seront symétriques en x et y.

L'objet de ce papier est de présenter une nouvelle expression (il en existe déjà trois...) pour la série génératrice des polyominos convexes, comptés selon la largeur, la hauteur et l'aire, en insistant sur la technique de calcul qui nous y a conduits. En effet, notre méthode constitue un exemple non trivial de résolution d'un système de *q-équations différentielles*.

Toutefois, l'expression finalement obtenue est assez complexe, voire de nature à rebuter le lecteur. Afin d'expliquer en quoi elle est plus satisfaisante que celles qui l'ont précédée, et peut-être même ce que l'on peut souhaiter de mieux, nous proposons le petit historique qui suit : on y trouvera les séries génératrices de classes moins générales de polyominos, ainsi que deux des trois autres formules déjà obtenues pour les polyominos convexes. En comparant ces différentes formules, nous justifierons les mérites de notre nouvelle expression.

1. A la recherche d'une "belle" formule pour l'énumération suivant l'aire des polyominos convexes

Rappelons tout d'abord que l'énumération suivant hauteur et largeur des différentes sous-classes de polyominos convexes évoquées plus haut mène à des séries génératrices algébriques, ou même rationnelles dans les cas les plus simples. Le problème le plus complexe dans cette gamme est bien sûr l'énumération des polyominos convexes, dont la série génératrice suivant largeur et hauteur est :

$$Z(x,y,1)=\frac{xy}{\Delta^2}\left(1-3x-3y+3x^2+3y^2+5xy-x^3-y^3-x^2y-xy^2-xy(x-y)^2\right) - \frac{4x^2y^2}{\Delta^{3/2}},$$

avec $\Delta = 1-2x-2y-2xy+x^2+y^2$.

Cette formule, due à Lin et Chang [13], raffine un résultat plus ancien de Delest et Viennot [8], qui fournissait l'énumération suivant le périmètre.

La nature des séries génératrices change dès que l'on s'intéresse à l'aire, qui semble ici le paramètre le plus difficile à étudier. L'énumération des classes les plus simples fait intervenir des *q-séries*. Par exemple, la série génératrice des diagrammes de Ferrers est

$$y\sum_{n\geq 1}\frac{x^n q^n}{(yq)_n}, \tag{1}$$

ce qui fournit une excellente occasion pour introduire certaines notations classiques dans l'étude des q-séries.

Notations. Pour $n\geq 1$, $(y)_n=\prod_{i=0}^{n-1}\left(1-y\,q^i\right)$. On convient par ailleurs que $(y)_0=1$, et on pose $(y)_\infty=\prod_{i=0}^{\infty}\left(1-y\,q^i\right)$.

Enfin, on utilisera les coefficients q-binômiaux, définis par $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \frac{(q)_n}{(q)_p (q)_{n-p}}$.

Cette apparition des q-séries est bien typique des polyominos convexes : par exemple, la série génératrice suivant l'aire des polyominos seulement *verticalement* convexes est rationnelle (Polya [15], Klarner [11], Delest [6]...).

Nous rappelons maintenant quelques résultats relatifs aux polyominos parallélogrammes et convexes dirigés, afin d'examiner les caractéristiques des séries génératrices qui leur sont associées.

La série génératrice des polyominos parallélogrammes est le quotient de deux q-analogues de fonctions de Bessel :

$$X(x,y,q)=y\frac{J_1}{J_0}, \tag{2}$$

avec $J_1=-\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1}(yq)_n}$ et $J_0=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_n}$.

Le premier cas particulier de cette formule est dû à Klarner et Rivest [12] (énumération selon l'aire). Plus tard, Delest et Fédou [7] ont donné la série génératrice suivant l'aire et la largeur, puis Brak et Guttmann [5] suivant le périmètre et l'aire, puis Bousquet-Mélou et Viennot [4] suivant l'aire, la largeur et la hauteur. Laurent Habsieger a par ailleurs remarqué qu'en multipliant numérateur et dénominateur par $(yq)_\infty$, on parvenait à la formulation suivante, qui met bien en valeur la symétrie de X en x et y :

$$X = xyq\,\frac{L(xq,yq)}{L(x,y)}, \tag{3}$$

avec $L(x,y)=\sum_{n\geq 0, m\geq 0}\frac{(-1)^{n+m}\, x^n\, y^m\, q^{\binom{n+m+1}{2}}}{(q)_n (q)_m}$.

Passons à une classe de polyominos un peu plus générale; la série génératrice des polyominos convexes dirigés est le quotient d'un q-analogue de la partie impaire d'une fonction de Bessel par le q-analogue d'une autre fonction de Bessel (Bousquet-Mélou et Viennot [4]) :

$$Y(x,y,q)=y\frac{M_1}{J_0}, \tag{4}$$

avec $M_1=\sum_{n\geq 1}\left[\frac{x^n q^n}{(yq)_{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{(q)_k\left(yq^{k+1}\right)_{n-k}}\right]$ et $J_0=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_n}$.

Ces fonctions génératrices, bien qu'assez imposantes, présentent les deux caractéristiques intéressantes suivantes :

(*i*) elles ne font intervenir que des séries parfaitement développées en x; c'est-à-dire que dans M_1, comme dans J_1 ou J_0, on sait exactement quelle fraction rationnelle en y et q est le coefficient de x^n ;

(*ii*) elles s'obtiennent par un nombre *fini* d'opérations élémentaires (ici des quotients) sur ces séries.

La première de ces caractéristiques autorise notamment des développements limités en x, fournissant la série génératrice des polyominos de largeur donnée.

Les expressions (2) et (4) peuvent s'obtenir par différentes techniques. Quelle que soit la méthode utilisée, les calculs se réduisent harmonieusement pour aboutir à ces formules. Il était donc tentant d'essayer de généraliser ces techniques aux cas des polyominos convexes... C'est ainsi que Bousquet-Mélou [1] [2] [3] a obtenu deux expressions différentes pour la série génératrice des polyominos convexes. Malheureusement, aucune d'entre elles ne présente les caractéristiques (*i*) et (*ii*).

Voici la première : pour $n \geq 0$, considérons les polynômes

$$T_n = 1 + \sum_{1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \left(x^k q^{k^2} \sum_{m=k}^{n-k} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-m-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \right)$$

et

$$N_m = N_m(x) = \sum_{\substack{h \geq 0,\, k \geq 0 \\ h+k \leq m-1}} (-x)^h y^k q^{\binom{h+1}{2}} \begin{bmatrix} h+k \\ h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m-k-1 \\ h \end{bmatrix}.$$

On appelle par ailleurs N_m^n les polynômes construits comme suit :

$$N_n^n = -x y^{n-1} q^n,$$

et

$$N_m^n = x^2 y^{n-1} q^{n+m} N_{m-n}(x q^n) \quad \text{si} \quad m > n.$$

Alors la série génératrice des polyominos convexes est (5)

$$Z(x,y,q) = 2y \frac{M_1 U}{J_0} - 2yV - W,$$

avec $U = \sum_{m \geq 0} x q^{m+1} \frac{T_m N_{m+1}}{(xq)_m}$, $V = \sum_{0 \leq n \leq m} N_{m+1}^{n+1} \frac{T_m T_n}{(xq)_m (xq)_n}$, et $W = \sum_{n \geq 1} \frac{x y^n q^n (T_n)^2}{(xq)_{n-1}(xq)_n}$.

(Les séries M_1 et J_0 sont données ci-dessus. De manière générale, on se référera à l'annexe pour les valeurs des différentes q-séries utilisées, lorsqu'elles ne sont pas explicitées immédiatement).

La seconde expression s'écrit : (6)

$$Z = 2 \sum_{m \geq 1} \frac{y^{m+2} \left(T_{m+1} M_0(x q^m) - y T_m M_0(x q^{m+1}) \right)^2}{(xq)_m{}^2 J_0(x q^{m-1}) J_0(x q^m)} + \sum_{m \geq 1} \frac{x y^m q^m (T_m)^2}{(xq)_{m-1}(xq)_m}.$$

Ces deux solutions ont une forme beaucoup moins "convaincante" que celle des deux séries X et Y. En particulier, aucune d'elles ne satisfait les deux critères (*i*) et (*ii*). En fait, dans les deux cas,

un observateur avisé repérerait sur la formule le découpage sous-jacent des polyominos convexes en polyominos parallélogrammes et polyominos tas.

Il existe une troisième expression, due à Lin [14], que l'on pourra contempler soit dans son article, soit dans l'article de synthèse de Guttmann [10]. En toute objectivité (?), cette troisième formule est encore bien plus lourde.

Bref : il était permis de rêver à une autre expression... Une autre approche aurait été de résoudre le système de *q-équations différentielles* suivant :

$$X(x) = \frac{xyq}{1-xq} + \frac{y+X}{1-xq} X(xq),$$

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y_1 \end{pmatrix}(x) = \frac{xyq}{1-xq} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{y+X}{1-xq} \begin{pmatrix} 1 & xq \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y_1 \end{pmatrix}(xq), \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} Z \\ Z_1 \\ Z_3 \end{pmatrix}(x) = \frac{xyq}{1-xq} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{y+X} \begin{pmatrix} V^2 \\ VW \\ W^2 \end{pmatrix} + \frac{y}{(1-xq)^2} \begin{pmatrix} 1 & 2xq & x^2 q^2 \\ 1 & 1+xq & xq \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ Z_1 \\ Z_3 \end{pmatrix}(xq),$$

où $V = Y - \frac{xyq}{1-xq}$ et $W = Y_1 - \frac{xyq}{1-xq}$.

En effet, ce système admet une unique solution (en séries formelles), dont l'interprétation combinatoire est la suivante :

- X est la série génératrice des polyominos parallélogrammes,
- Y est la série génératrice des polyominos convexes dirigés,
- Z est la série génératrice des polyominos convexes.

(On note dans ce système et par la suite $S(x)$, ou même parfois S, pour une série de la forme $S(x,y,q)$).

Ces équations, obtenues à l'origine en codant les polyominos par les mots d'un langage algébrique (Bousquet-Mélou [3]), peuvent aussi se lire sur les polyominos eux-mêmes, illustrant ainsi la notion de *grammaire d'objets*. Les séries Y_1, Z_1 et Z_3 énumèrent alors des polyominos dont une ou deux cellules sont marquées. Malheureusement, il n'existe pas de méthode générale pour résoudre les q-équations différentielles. C'est pourtant à cette résolution que nous sommes parvenus, en commençant par traiter un problème plus simple : la résolution du système d'équations différentielles *ordinaires* associé.

2. Résolution du système d'équations différentielles ordinaires associé

Nous allons voir, en prenant l'exemple des polyominos parallélogrammes, comment il est possible d'associer à une q-équation différentielle une équation différentielle ordinaire, et ce que l'on peut attendre de la résolution de cette équation différentielle ordinaire.

On effectue tout d'abord un changement de variables destiné à rendre les séries limites convergentes. Posons $\hat{X} = \frac{1}{1-q} X\left(x(1-q)^2, 1, q\right)$.

On déduit facilement de la première équation du q-système (7) que

$$\frac{\hat{X} - \hat{X}(xq)}{x(1-q)} = q + q(1-q)\hat{X} + \frac{\hat{X}\,\hat{X}(xq)}{x},$$

ce qui implique que la série $\hat{X}$ admet une limite $\tilde{X}$ en q=1, laquelle satisfait l'équation différentielle *ordinaire* :

$$\tilde{X}' = 1 + \frac{\tilde{X}^2}{x}.$$

Cette dernière équation se résout en cherchant une solution de la forme $-\frac{x f'}{f}$ et mène à :

$$\tilde{X} = \frac{J_1}{J_0},$$

avec $J_1 = -\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^n}{(n-1)!n!}$ et $J_0 = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{n!^2}$.

(Nous adoptons ici, par abus de notations, les mêmes noms pour les séries et leur q-analogue).

Il ne reste alors plus qu'à trouver le "bon" q-analogue de $\tilde{X}$, ce qui est assez facile dans le cas des polyominos parallélogrammes, mais devient par exemple plus malaisé dans le cas des polyominos convexes dirigés ; en effet, la même méthode, consistant à se ramener à des équations différentielles ordinaires, prouve que :

$$\tilde{Y} = \lim_{q\to 1} \frac{1}{1-q} Y\left(x(1-q)^2, 1, q\right) = \frac{J_1(x) - J_1(-x)}{2J_0}$$

et $\sum_{n\geq 1}\left[\frac{x^n q^n}{(q)_{n-1}(q)_n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k q^{\binom{k}{2}}\right]$ n'est certainement pas le q-analogue le plus naturel de la partie impaire de la fonction J_1.

De façon générale, que peut-on attendre de la résolution du système d'équations différentielles ordinaires associé à un système de q-équations différentielles donné?

Dans les cas les plus favorables, on obtient des indications très précises sur la forme de la solution (exemple des polyominos parallélogrammes). En étant moins optimiste, on peut espérer que la résolution des équations différentielles ordinaires fournisse au moins une trame, ou un début de trame, pour la résolution des q-équations différentielles associées.

Généralisant à tout le q-système l'approche décrite ci-dessus, on montre que les séries

$$\tilde{X} = \lim_{q\to 1} \frac{1}{1-q} X\left(x(1-q)^2, 1, q\right) \qquad \tilde{Z} = \lim_{q\to 1} \frac{1}{1-q} Z\left(x(1-q)^2, 1, q\right)$$

$$\tilde{Y} = \lim_{q\to 1} \frac{1}{1-q} Y\left(x(1-q)^2, 1, q\right) \qquad \tilde{Z}_1 = \lim_{q\to 1} Z_1\left(x(1-q)^2, 1, q\right)$$

$$\tilde{Y}_1 = \lim_{q\to 1} Y_1\left(x(1-q)^2, 1, q\right) \qquad \tilde{Z}_3 = \lim_{q\to 1} (1-q) Z_3\left(x(1-q)^2, 1, q\right)$$

sont bien définies, et vérifient le système d'équations différentielles suivant :

$$\tilde{X}' = 1 + \frac{\tilde{X}^2}{x}, \qquad \tilde{Z}' = 1 + 2\tilde{Z}_1 + 2\frac{\tilde{Y}^2}{x},$$

$$\tilde{Y}' = 1 + \tilde{Y}_1 + \frac{\tilde{X}\tilde{Y}}{x}, \qquad \tilde{Z}_1' = \tilde{Z}_3 + \frac{\tilde{Z} + 2\tilde{Y}\tilde{Y}_1}{x},$$

$$\tilde{Y}_1' = \frac{\tilde{Y} + \tilde{X}\tilde{Y}_1}{x}, \qquad \tilde{Z}_3' = 2\frac{\tilde{Z}_1 + \tilde{Y}_1^2}{x}.$$

Les valeurs de $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ et $\tilde{Y}_1$ étaient déjà connues :

$$\tilde{X} = \frac{J_1}{J_0}, \qquad \tilde{Y} = \frac{J_1 + \overline{J}_1}{2J_0}, \qquad \tilde{Y}_1 = \frac{\overline{J}_0 - J_0}{2J_0},$$

avec $\overline{J}_0(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!^2}$, $\overline{J}_1(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(n-1)!n!}$,

$J_0(x) = \overline{J}_0(-x)$, $J_1(x) = -\overline{J}_1(-x)$.

Restait à résoudre la dernière partie du système. Cette partie est formée de trois équations linéaires. Le système homogène associé admet les trois solutions indépendantes suivantes, dont le Wronskien est 1 :

$$\begin{pmatrix} \overline{Y}_1^2 \\ \overline{Y}_0\overline{Y}_1 \\ \overline{Y}_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\overline{J}_1\overline{Y}_1 \\ \overline{J}_0\overline{Y}_1 + \overline{J}_1\overline{Y}_0 \\ 2\overline{J}_0\overline{Y}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{J}_1^2 \\ \overline{J}_0\overline{J}_1 \\ \overline{J}_0^2 \end{pmatrix},$$

avec $\overline{Y}_0 = \overline{K}_0 + \overline{J}_0\, log(x)$, $\overline{Y}_1 = \overline{K}_1 + \overline{J}_1\, log(x)$,

$$\overline{K_0} = 2\sum_{n\geq 1}\left[\frac{x^n}{n!^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right] \quad \text{et} \quad \overline{K_1} = 1 + 2\sum_{n\geq 1}\left[\frac{x^n}{(n-1)!n!}\left(2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right)\right].$$

La méthode dite "de variation de la constante" fournit finalement, à la suite de quelques intégrations dont la simplicité tient du miracle :

$$\tilde{Z} = \frac{J_1 + \overline{J}_1}{2J_0} + \frac{\overline{J}_1}{2J_0}\left(1 + J_0\overline{K}_1 - K_0\overline{J}_1\right)$$

$$\tilde{Z}_1 = \frac{\overline{J}_0}{2J_0}\left(1 + J_0\overline{K}_1 - K_0\overline{J}_1\right)$$

$$\tilde{Z}_3 = \frac{\overline{J}_0}{2J_0}\left(J_0\overline{K}_0 - K_0\overline{J}_0\right),$$

où $K_0(x) = \overline{K}_0(-x)$ et $K_1(x) = -\overline{K}_1(-x)$, les séries $\overline{K}_0$ et $\overline{K}_1$ étant définies ci-dessus.

3. Solution du q-système différentiel. Série génératrice des polyominos convexes.

On disposait déjà des résultats suivants :

$$X = y\frac{J_1}{J_0} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} Y \\ Y_1 \end{pmatrix} = \frac{y}{J_0}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_0 \end{pmatrix}.$$

Première étape.

Nous avons commencé par résoudre le système homogène :

$$\begin{pmatrix} f \\ f_1 \\ f_3 \end{pmatrix}(x) = \frac{1}{(1-xq)^2}\begin{pmatrix} 1 & 2xq & x^2q^2 \\ 1 & 1+xq & xq \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ f_1 \\ f_3 \end{pmatrix}(xq).$$

Trois solutions linéairement indépendantes sont :

$$\begin{pmatrix} \overline{Y}_1^2 \\ \overline{Y}_0\overline{Y}_1 \\ \overline{Y}_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\overline{J}_1\overline{Y}_1 \\ \overline{J}_0\overline{Y}_1 + \overline{J}_1\overline{Y}_0 \\ 2\overline{J}_0\overline{Y}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{J}_1^2 \\ \overline{J}_0\overline{J}_1 \\ \overline{J}_0^2 \end{pmatrix},$$

avec $\overline{Y}_0 = \overline{K}_0 + \overline{J}_0 \log_q(x)$ et $\overline{Y}_1 = \overline{K}_1 + \overline{J}_1 \log_q(x)$, et $\log_q(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(q)}$.

Arrêtons nous quelques instants sur la forme de ces solutions.

C'est une propriété remarquable de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2xq & x^2q^2 \\ 1 & 1+xq & xq \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ qui permet de les obtenir. Étant données des fonctions U_0, V_0, U_1 et V_1, on a en effet l'identité suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2xq & x^2q^2 \\ 1 & 1+xq & xq \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1V_1 \\ \frac{1}{2}(U_0V_1 + U_1V_0) \\ U_0V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_1\tilde{V}_1 \\ \frac{1}{2}(\tilde{U}_0\tilde{V}_1 + \tilde{U}_1\tilde{V}_0) \\ \tilde{U}_0\tilde{V}_0 \end{pmatrix},$$

avec $\begin{cases} \tilde{U}_0 = U_1 + U_0 \\ \tilde{U}_1 = U_1 + xqU_0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \tilde{V}_0 = V_1 + V_0 \\ \tilde{V}_1 = V_1 + xqV_0 \end{cases}$.

Cette propriété permet de ramener la solution du système initial d'ordre trois à celle de deux systèmes plus simples d'ordre deux.

Quelques mots maintenant sur cet étrange logarithme à base q : on peut considérer cette fonction comme un intermédiaire purement formel. La seule requête est qu'elle vérifie $f(xq) - f(x) = 1$. On pourrait se dispenser de ce passage par des fonctions qui ne sont plus des séries formelles. (On aboutit alors en fin de calcul à un système d'équations triangulaire plutôt que diagonal).

Dernière surprise : le Wronskien de ces solutions est ... un q-analogue de l'exponentielle, à savoir :

$$E = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n q^n}{(q)_n}.$$

Deuxième étape.

A partir de là, il n'est plus possible de calquer la solution sur celle du cas où q=1, pour deux raisons (principalement) : d'une part les q-analogues qui interviennent ne sont pas les plus naturels, d'autre part il apparaît des termes de l'ordre de $(1-q)$, $(1-q)^2$, etc...

On peut toutefois adapter la technique de "variation de la constante" au cas des q-équations. On est alors ramené à intégrer des équations de la forme $f(x) - yf(xq) = g$, où g est une série donnée. Notons que ce type d'équation se résout immédiatement lorsque la série g est développée en x :

si $g = \sum_{n\geq 0} g_n x^n$, alors $f = \sum_{n\geq 0} \dfrac{g_n}{1 - yq^n} x^n$.

Hélas, les trois équations de degré un que l'on obtient ici s'écrivent, typiquement :

$$f(x) - yf(xq) = -xq(1-xq)\hat{J}_0(xq)\hat{Y}_0(xq) - 2\frac{S(xq)T(xq)}{J_0\,J_0(xq)},$$

où $\hat{J}_0$, $\hat{Y}_0$, J_0, S et T sont des séries développées en x.

Si le dénominateur en $J_0\,J_0(xq)$ est plutôt de bon augure, le numérateur $S(xq)T(xq)$ est moins engageant. Il s'avère pourtant possible de faire apparaître des J_0 et des $J_0(xq)$ au numérateur aussi, et d'intégrer ces trois équations.

Après réduction des calculs, on parvient à la solution ...

$$\begin{pmatrix} Z \\ Z_1 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \frac{y^2}{J_0}\begin{pmatrix} 2M_1(\overline{J_1}\beta - \overline{K_1}\alpha) \\ M_0(\overline{J_1}\beta - \overline{K_1}\alpha) + M_1(\overline{J_0}\beta - \overline{K_0}\alpha) \\ 2M_0(\overline{J_0}\beta - \overline{K_0}\alpha) \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} \overline{J_1}b_1 - \overline{K_1}a_1 \\ \frac{1}{2}(\overline{J_1}b_0 - \overline{K_1}a_0 + \overline{J_0}b_1 - \overline{K_0}a_1) \\ \overline{J_0}b_0 - \overline{K_0}a_0 \end{pmatrix}$$

Il est intéressant de remarquer que chacun de ces deux termes est de la forme "typique"

$$\begin{pmatrix} U_1V_1 \\ \frac{1}{2}(U_0V_1 + U_1V_0) \\ U_0V_0 \end{pmatrix},$$

laquelle est étroitement liée aux propriétés de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2xq & x^2q^2 \\ 1 & 1+xq & xq \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion.

La série génératrice des polyominos convexes s'écrit donc :

$$Z = 2y^2\frac{M_1(\overline{J_1}\beta - \overline{K_1}\alpha)}{J_0} - y\overline{J_1}b_1 + y\overline{K_1}a_1. \qquad (8)$$

Les valeurs des différentes séries intervenant dans cette expression sont données en annexe. Toutes ces séries sont parfaitement développées en x, et cette expression de Z satisfait ainsi les deux critères (i) et (ii) énoncés plus haut. Elle s'apparente plutôt à la formule (5) qu'à la formule (6), et laisse entendre que les séries U, V et W pouvaient s'écrire avec des produits de deux séries développées en x. Enfin, cette formule, si elle est du même type que les expressions (2) et (4), est quand même nettement plus complexe, et cette complexité explique peut-être que les autres méthodes aient échoué...

Références.

[1] M. BOUSQUET-MÉLOU, "q-Énumération de polyominos convexes", Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 1991.

[2] M. BOUSQUET-MÉLOU, q-Énumération de polyominos convexes, à paraître dans *J. Comb. Theor. A.*

[3] M. BOUSQUET-MÉLOU, Codage des polyominos convexes et équations pour l'énumération suivant l'aire, à paraître dans *Discr. Applied Math.*

[4] M. BOUSQUET-MÉLOU, X.G. VIENNOT, Empilements de segments et q-énumération de polyominos convexes dirigés, *J. Comb. Theor. A*, vol. **60** n°2 (1992) 196-224.

[5] R. BRAK, A. J. GUTTMANN, Exact solution of the staircase and row-convex polygon perimeter and area generating function, *J. Phys. A : Math. Gen.* **23** (1990) 4581-4588.

[6] M.P. DELEST, Generating functions for column-convex polyominoes, *J. Comb. Th. A.* **48** (1988) 12-31.

[7] M.P. DELEST, J.M. FÉDOU, Enumeration of skew Ferrers diagrams, à paraître dans *Discr. Math.*

[8] M.P. DELEST, G. VIENNOT, Algebraic languages and polyominoes enumeration, *Theor. Comp. Sci.* **34** (1984) 169-206, North-Holland.

[9] J.M. FÉDOU, "Grammaires et q-énumération de polyominos", Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 1989.

[10] A. J. GUTTMANN, Planar polygons : regular, convex, almost convex, staircase and row-convex, Proceedings of the 1991 International Symposium in Statistical Mechanics, American Institute of Physics Published Conference Proceedings, n° 248 (1992) 12-33.

[11] D.A. KLARNER, Some results concerning polyominoes, *Fibonnacci Quart.* **3** (1965) 9-20.

[12] D.A. KLARNER, R.L. RIVEST, Asymptotic bounds for the number of convex n-ominoes, *Discr. Math.* **8** (1974) 31-40.

[13] K.Y. LIN, S.J. CHANG, Rigourous results for the number of convex polygons on the square and honeycomb lattices, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21** (1988) 2635-2642.

[14] K.Y. LIN, Exact solution of the convex polygon perimeter and area generating function, *J. Phys. A : Math. Gen.* **24** (1991) 2411-2417.

[15] G. POLYA, On the number of certain lattice polygons, *J. Comb. Th. A.* **6** (1969) 102-105.

ANNEXE : Valeurs des différentes q-séries

- $$J_0 = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_n},$$

- $$M_0 = \sum_{n\geq 1}\left[\frac{x^n q^n}{(yq)_n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{(q)_k \left(yq^{k+1}\right)_{n-k}}\right],$$

- $$J_1 = -\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1} (yq)_n},$$

- $$M_1 = \sum_{n\geq 1}\left[\frac{x^n q^n}{(yq)_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{(q)_k \left(yq^{k+1}\right)_{n-k}}\right],$$

- $$\overline{J_0} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n q^n}{(q)_n^{\,2}},$$

- $$\overline{K_0} = 2\sum_{n\geq 1}\left[\frac{x^n q^n}{(q)_n^{\,2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{q^k}{1-q^k}\right],$$

- $$\overline{J_1} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n q^n}{(q)_{n-1} (q)_n},$$

- $$\overline{K_1} = -1 + \sum_{n\geq 1}\left[\frac{x^n q^n}{(q)_{n-1}(q)_n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2q^k}{1-q^k} - \frac{q^n}{1-q^n}\right)\right],$$

- $$\alpha = \sum_{n\geq 1}\left[\frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}}}{(q)_{k-1}\left(yq^k\right)_{n-k+1}}\right],$$

- $$\beta = \sum_{n\geq 1}\left[\frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}}}{(q)_{k-1}\left(yq^k\right)_{n-k+1}}\left\{k + \sum_{m=1}^{k-1}\frac{1+q^m}{1-q^m} + \sum_{m=k}^{n}\left(\frac{1}{1-yq^m} + \frac{q^m}{1-q^m}\right)\right\}\right)\right],$$

- $$a_0 = \sum_{n\geq 1}\left[x^n q^n \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{q^{\binom{k}{2}}}{(q)_k \left(yq^{k+1}\right)_{n-k}^{\,2}}\left\{\frac{q^{\binom{k}{2}}\left(1-2q^k\right)}{(q)_k} + 2y(-1)^k \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^m q^{\binom{m+1}{2}}}{(q)_{m-1}\left(yq^m\right)_{k-m+1}}\right\}\right)\right],$$

- $$a_1 = \sum_{n\geq 1}\left[x^n q^n \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{q^{\binom{k}{2}}}{(q)_k \left(yq^{k+1}\right)_{n-k-1}\left(yq^{k+1}\right)_{n-k}}\left\{\frac{q^{\binom{k}{2}}\left(1-2q^k\right)}{(q)_k} + 2y \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{k+m} q^{\binom{m+1}{2}}}{(q)_{m-1}\left(yq^m\right)_{k-m+1}}\right\}\right)\right]$$

$$b_0 = \sum_{n\geq 1}\Bigg[x^n q^n \sum_{k=0}^{n-1}\Bigg[\frac{q^{\binom{k}{2}}}{(q)_k\left(yq^{k+1}\right)_{n-k}^{2}}\Bigg\{q^{\binom{k}{2}}\frac{1-2q^k}{(q)_k}\Bigg\{2k+\sum_{m=1}^{k}\frac{2q^m}{1-q^m}+\sum_{m=k+1}^{n}\frac{2yq^m}{1-yq^m}\Bigg\} - \frac{q^{\binom{k}{2}}}{(q)_k}$$

$$+2y\sum_{m=1}^{k}\Bigg\{\frac{(-1)^{k+m}q^{\binom{m+1}{2}}}{(q)_{m-1}\left(yq^m\right)_{k-m+1}}\Bigg(k+m+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{2q^i}{1-q^i}+\sum_{i=m}^{k}\left(\frac{q^i}{1-q^i}+\frac{yq^i}{1-yq^i}\right)+\sum_{i=k+1}^{n}\frac{2yq^i}{1-yq^i}\Bigg)\Bigg\}\Bigg\}\Bigg]\Bigg],$$

$$b_1 = \sum_{n\geq 1}\Bigg[x^n q^n \sum_{k=0}^{n-1}\Bigg[\frac{q^{\binom{k}{2}}}{(q)_k\left(yq^{k+1}\right)_{n-k-1}\left(yq^{k+1}\right)_{n-k}}$$

$$\Bigg\{q^{\binom{k}{2}}\frac{1-2q^k}{(q)_k}\Bigg\{2k+\sum_{m=1}^{k}\frac{2q^m}{1-q^m}+\sum_{m=k+1}^{n}\frac{2yq^m}{1-yq^m}-\frac{yq^n}{1-yq^n}\Bigg\} - \frac{q^{\binom{k}{2}}}{(q)_k}$$

$$+\sum_{m=1}^{k}\Bigg\{\frac{2y(-1)^{k+m}q^{\binom{m+1}{2}}}{(q)_{m-1}\left(yq^m\right)_{k-m+1}}\Bigg(k+m+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{2q^i}{1-q^i}+\sum_{i=m}^{k}\left(\frac{q^i}{1-q^i}+\frac{yq^i}{1-yq^i}\right)+\sum_{i=k+1}^{n}\frac{2yq^i}{1-yq^i}-\frac{yq^n}{1-yq^n}\Bigg)\Bigg\}\Bigg\}\Bigg]\Bigg].$$

Combinatorial Properties of the Kazhdan-Lusztig and R-polynomials for S_n

Francesco Brenti[1]
Dipartimento di Matematica
Universita' di Perugia
Via Vanvitelli, 1
I-06123 Perugia, Italy

Extended Abstract

In their fundamental paper [3] Kazhdan and Lusztig defined, for every Coxeter group W, a family of polynomials, indexed by pairs of elements of W, which have become known as the Kazhdan-Lusztig polynomials of W (see, e.g., [2], Chap. 7). These polynomials are intimately related to the Bruhat order of W and to the algebraic geometry of Schubert varieties, and have proven to be of fundamental importance in representation theory.

In order to prove the existence of these polynomials Kazhdan and Lusztig defined another family of polynomials (see [3], §2) which are intimately related to the multiplicative structure of the Hecke algebra associated to W. These polynomials are now known as the R-polynomials of W (see, e.g., [2], §7.5) and their importance stems mainly from the fact that their knowledge is equivalent to that of the Kazhdan-Lusztig polynomials.

Given a set T we will let $S(T)$ be the set of all bijections $\pi : T \to T$, and $S_n \stackrel{\text{def}}{=} S([n])$. If $\sigma \in S(T)$ and $T \stackrel{\text{def}}{=} \{t_1, \ldots, t_r\}_< \subseteq \mathbf{P}$ then we write $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_r$ to mean that $\sigma(t_i) = \sigma_i$, for $i = 1, \ldots, r$. If $\sigma \in S_n$ then we will also write σ in *disjoint cycle form* (see, e.g., [5], p.17) and we will usually omit to write the 1-cycles of σ. For example, if $\sigma = 365492187$ then we also write $\sigma = (9,7,1,3,5)(2,6)$. Given $\sigma, \tau \in S_n$ we let $\sigma\tau \stackrel{\text{def}}{=} \sigma \circ \tau$ (composition of functions) so that, for example, $(1,2)(2,3) = (1,2,3)$.

We will follow [5], Chap. 3, for notation and terminology concerning partially ordered sets. In particular, we say that a finite graded poset P with $\hat{0}$ and $\hat{1}$ is *Eulerian* if $\mu(x,y) = (-1)^{\rho(y)-\rho(x)}$ for all $x, y \in P$, $x \leq y$, where $\rho : P \to \mathbf{N}$ is the rank function of P. Recall (see, e.g., [5], §3.14, p. 138, or [6], §2, p. 190) that to any Eulerian poset P as above there are associated two polynomials, denoted $f(P;q)$ and $g(P;q)$, defined inductively as follows:

i) if $|P| = 1$ then $f(P;q) \stackrel{\text{def}}{=} g(P;q) \stackrel{\text{def}}{=} 1$;

[1]Part of this work was carried out while the author was visiting the Mittag-Leffler Institute and the Institute of Mathematics of the Hebrew University of Jerusalem