Un nuovo algoritmo per la corrispondenza di Robinson-Schensted

L.Cerlienco and M.Mureddu*

1 Definizioni preliminari

Sia $\varepsilon \in \{0,1\}$; in questo lavoro considereremo two-line arrays della forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix} \qquad ((b_i, a_i) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N})$$

dove $b_i \leq b_{i+1}$ e $b_i = b_{i+1} \Rightarrow a_i < a_{i+1} + \varepsilon$. Chiameremo questi oggetti *ε-two-line arrays*. In altri termini, una *ε-two-line array* è una two-line array con elementi ripetuti su entrambe le righe (ma senza ripetizione di colonne quando $\varepsilon = 0$) e dove le colonne sono ordinate in ordine lessicografico non decrescente da sinistra a destra. Nel seguito la lettera σ denoterà sempre la two-line array considerata più sopra. Talvolta i multinsiemi $B := (b_1, \dots, b_m)$ e $A := (a_1, \dots, a_m)$ saranno chiamati *dominio* e *codominio* di σ. L'intero $\#\sigma := m$ denota la lunghezza della two-line array σ. Una two-line array σ la cui lunghezza è uguale a 1 sarà chiamata semplicemente *coppia* o *colonna*; in tal caso useremo spesso la notazione (b,a) invece di $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$.
Il *peso* W_σ di una two line-array σ è l'applicazione $W_\sigma : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}_0$, $\mathbf{N}_0 := \mathbf{N} \cup \{0\}$, che associa a ciascuna coppia $(b,a) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ la cardinalità dell'insieme $\{i | (b_i, a_i) = (b,a)\}$. Diciamo che una two-line array σ' è *contenuta* nella two-line array σ, in simboli $\sigma' \subseteq \sigma$ se $W_{\sigma'}(b,a) \leq W_\sigma(b,a)$. Una *$\varepsilon$-two-line array* τ è la concatenazione di due *ε-two-line arrays* σ e ρ se $W_\tau(b,a) = W_\sigma(b,a) + W_\rho(b,a)$ per ogni $(b,a) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$; in simboli $\tau = \sigma \cdot \rho$. Notiamo cha la concatenazione di due 0-two-line arrays può essere una 1-two-line array. Si verifica facilmente che l'operatore concatenazione è associativo e commutativo.

Definizione 1 *Sia $\varepsilon \in \{0,1\}$. La two-line array σ si dice ε-antimorfismo se $b_i < b_{i+1}$ e $a_i \geq a_{i+1} + \varepsilon$.*

*Presentato dal secondo autore.

Definizione 2 *Sia σ un ε-antimorfismo. Definiamo* contrazione *di σ l'ε-two-line array*

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} b_2 & b_3 & \dots & b_m \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} \end{pmatrix}$$

Definizione 3 *Siano dati gli ε-antimorfismi σ e σ', $\sigma \neq \sigma'$:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix}, \ \sigma' = \begin{pmatrix} b'_1 & b'_2 & \dots & b'_{m'} \\ a'_1 & a'_2 & \dots & a'_{m'} \end{pmatrix}.$$

Posto convenzionalmente $b_{m+1} := \infty$, diciamo che σ ε-precede σ' — in simboli: $\sigma \prec_\varepsilon \sigma'$ — se

i) $b_1 \leq b'_1$,

ii) $(b_i \leq b'_j < b_{i+1}) \Rightarrow (a_i < a'_j + \varepsilon)$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, m'\}$.

La relazione "$\sigma \preceq_\varepsilon \sigma'$" sta per: "$\sigma \prec_\varepsilon \sigma'$ o $\sigma = \sigma'$".

È possibile dimostrare che $\preceq$ è una *relazione di ordine parziale sull'insieme di tutti gli ε-antimorfismi.*

2 Decomposizione di una ε-two-line array in ε-antimorfismi

Proposizione 1 *Ogni* ε-two-line array *σ può essere espressa in maniera unica come concatenazione $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_s$ di ε-antimorfismi $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ tali che, per ogni $i \in \{1, \dots, s-1\}$, sia $\sigma_i \preceq_\varepsilon \sigma_{i+1}$.*

Tale decomposizione sarà detta *ε-decomposizione canonica* di σ. Osserviamo che la concatenazione $\sigma_i \cdot \sigma_j$ di due ε-antimorfismi nella decomposizione precedente non è un ε-antimorfismo. Prima di dimostrare la **Prop.1** è necessario descrivere un algoritmo che decompone una data *ε-two-line array* σ in una concatenazione $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma'$ formata da un ε-antimorfismo σ_1 ed una *ε-two-line array* σ'. Si tratta del seguente

Algoritmo $\mathbf{D}_\varepsilon$

a) Si esaminano le coppie (b_i, a_i) in σ partendo da sinistra;

b) la coppia in esame viene eleminata da σ se soddisfa al criterio di ε—eliminazione *descritto più sotto;*

c) le coppie eliminate, in ordine di eliminazione, formano l'ε-antimorfismo σ_1;

d) σ' è ciò che rimane in σ.

Criterio di ε-eliminazione.

i) la coppia (b_1, a_1) è ε-eliminabile *da σ;*

ii) sia (b_i, a_i) una coppia ε-eliminabile; allora per ogni $j > i$, (b_j, a_j) è ε-eliminabile da σ se a) $b_i < b_j$ e $a_i \geq a_j + \varepsilon$ e b) per ogni h, $i < h < j$, la coppia (b_h, a_h) non è ε-eliminabile da σ.

In altri termini: la coppia (b_j, a_j) è *ε-eliminabile* da σ se (b_j, a_j) è la prima colonna a sinistra oppure, denotata con (b_i, a_i) l'ultima coppia eliminata, vale la disuguaglianza $a_i \geq a_j + \varepsilon$.

Lemma 1 *Sia σ_1 una parte antimorfa di σ. La concatenazione $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma'$ è il risultato dell'***Algoritmo $\mathbf{D}_\varepsilon$** *se e solo se per ogni parte ε-antimorfa $\sigma_2 \neq \sigma_1$ di σ' si ha $\sigma_1 \prec_\varepsilon \sigma_2$.*

Dimostrazione Sia B il dominio di σ. Supponiamo che l'ε-decomposizione $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma'$ sia stata ottenuta mediante l'**Algoritmo $\mathbf{D}_\varepsilon$** e notiamo che, posto

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & d_r \\ c_1 & \dots & c_r \end{pmatrix},$$

si ha $d_1 = b_1 = \min(B)$. La i) di **Def.3** è pertanto verificata. Per quanto riguarda ii) è sufficiente accertarsi che nessuna coppia $(b, a) \subseteq \sigma'$ verifichi le condizioni $d_i \leq b < d_{i+1}$ e $c_i \geq a + \varepsilon$ con $i \in \{1, \dots, r\}$. In effetti, se $d_i < b$, le disuguaglianze precedendi renderebbero la coppia (b, a) ε-eliminabile e quindi parte di σ_1. D'altra parte, da $d_i = b$ e $c_i \geq a + \varepsilon$ si deduce che la coppia (b, a) precede (d_i, c_i) in σ, in contraddizione con le ipotesi $(b, a) \subseteq \sigma'$ e $(d_i, c_i) \subseteq \sigma_1$.

Viceversa, sia

$$\sigma'_1 = \begin{pmatrix} d'_1 & \dots & d'_t \\ c'_1 & \dots & c'_t \end{pmatrix}$$

una parte ε-antimorfa di σ che soddisfa le proprietà indicate. Supponiamo, per assurdo, che σ'_1 non coincida con l'ε-antimorfismo σ_1 ottenuto tramite l'**Algoritmo $\mathbf{D}_\varepsilon$**. Innanzi tutto proviamo $(d_1, c_1) = (d'_1, c'_1) \subseteq \sigma'_1$; infatti se $(d_1, c_1) \not\subseteq \sigma'_1$ allora σ'_1 precede l'ε-antimorfismo (d_1, c_1); essendo $d_1 = \min(B)$, da i) di **Def.3** si deduce $d'_1 = d_1$. Da ciò, per ii) di **Def.3** abbiamo $c'_1 < c_1$, in contraddizione col fatto che $(b_1, a_1) = (d_1, c_1)$ sia la prima colonna di σ. Indichiamo ora con p il più piccolo indice per cui $(d_p, c_p) \neq (d'_p, c'_p)$ e dimostriamo dapprima che se $d_p < d'_p$, allora σ'_1 non precede l'ε-antimorfismo $\sigma_2 := (d_p, c_p)$ (in contraddizione col fatto che, sotto la stessa ipotesi, abbiamo $\sigma_2 = (d_p, c_p) \not\subseteq \sigma'_1$). Infatti da $(d_{p-1}, c_{p-1}) = (d'_{p-1}, c'_{p-1})$ deduciamo $d'_{p-1} < d_p < d'_p$ e $c'_{p-1} \geq c_p + \varepsilon$; quindi ii) di **Def.3** non è soddisfatta. D'altra parte, se $d'_p < d_p$, un ragionamento simile mostra che σ_1 non precede l'ε-antimorfismo $\sigma'_2 := (d'_p, c'_p) \not\subseteq \sigma_1$, contro la prima parte della presente dimostrazione. Segue $d_p = d'_p$. Da $d_p = d'_p$ e $(d_p, c_p) \neq (d'_p, c'_p)$ deduciamo $(d_p, c_p) \not\subseteq \sigma'_1$; quindi $\sigma'_1 \prec (d_p, c_p)$ e, per ii) di **Def.3**, $c'_p < c_p$. D'altra parte, il fatto che (d_p, c_p), piuttosto che (d'_p, c'_p), appartenga a σ_1, implica $c_p < c'_p$. La contraddizione prova che $\sigma'_1 = \sigma_1$. $\square$

Dimostrazione della Prop.1 Usando il **Lemma 1** è immediato verificare che la concatenazione postulata è il risultato di applicazioni ripetute dell'**Algorithm** $\mathbf{D}_\varepsilon$. □

Definizione 4 *Sia* $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_s$ *l'ε-decomposizione canonica di* σ *e sia* $\hat{\sigma}_i$ *la contrazione di* σ_i. *L'ε-*contrazione *di* σ *è la two-line array* $\hat{\sigma} := \hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2 \cdot \ldots \cdot \hat{\sigma}_s$.

Lemma 2 *Siano* $\sigma = \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_s$ *e* $\sigma' = \sigma'_1 \cdot \ldots \cdot \sigma'_{s'}$ *le ε-decomposizioni canoniche di* σ *e* σ', *con*

$$\sigma_h = \begin{pmatrix} b_{h,1} & \ldots & b_{h,m_h} \\ a_{h,1} & \ldots & a_{h,m_h} \end{pmatrix} \quad e \quad \sigma'_h = \begin{pmatrix} b'_{h,1} & \ldots & b'_{h,m'_h} \\ a'_{h,1} & \ldots & a'_{h,m'_h} \end{pmatrix}.$$

Se a) $s = s'$, *b)* $b_{h,1} = b'_{h,1}$ *e* $a_{h,m_h} = a'_{h,m'_h}$ *per ogni* $h = 1, \ldots, s$ *e c)* σ *e* σ' *hanno la stessa ε-contrazione* $\tau := \hat{\sigma} = \hat{\sigma}'$, *allora* $\sigma = \sigma'$.

Dimostrazione Sia

$$\tau = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_t \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_t \end{pmatrix}.$$

Per ogni $i = 1, \ldots, t$, ci sono indici $\tilde{\imath}$, $k_{\tilde{\imath}}$, $\tilde{\imath}'$, $k'_{\tilde{\imath}'}$ (dove $1 \le \tilde{\imath}, \tilde{\imath}' \le s = s'$, $1 < k_{\tilde{\imath}} \le m_{\tilde{\imath}}$, $1 < k'_{\tilde{\imath}'} \le m'_{\tilde{\imath}'}$) tali che

$$d_i = b_{\tilde{\imath},k_{\tilde{\imath}}} = b'_{\tilde{\imath}',k'_{\tilde{\imath}'}} \qquad e \qquad c_i = a_{\tilde{\imath},k_{\tilde{\imath}}-1} = a'_{\tilde{\imath}',k'_{\tilde{\imath}'}-1}.$$

Ragionando per assurdo supponiamo $\sigma \neq \sigma'$; sia $r \in \{1, \ldots, t\}$ il più grande indice tale che o i) $\tilde{r} = \tilde{r}'$ e $k_{\tilde{r}} \neq k'_{\tilde{r}'}$ oppure ii) $\tilde{r} \neq \tilde{r}'$. La prima eventualità deve essere esclusa. Infatti, denotate con 'd_p, c_p' e con 'd_q, c_q' le coppie di elementi che si presentano in $\sigma'_{\tilde{r}}$ e $\sigma_{\tilde{r}}$ nel posto occupato da 'd_r, c_r' in $\sigma_{\tilde{r}}$ e $\sigma'_{\tilde{r}}$ rispettivamente, abbiamo che o 'd_p, c_p' segue 'd_r, c_r' in $\sigma'_{\tilde{r}}$ oppure 'd_q, c_q' segue 'd_r, c_r' in $\sigma_{\tilde{r}}$; quindi, o $r < p$ oppure $r < q$, in contraddizione con la definizione di r.

Rimane da esaminare il caso $\tilde{r} \neq \tilde{r}'$. Senza ledere la generalità possiamo assumere $\tilde{r} < \tilde{r}'$; arriveremo ad una contraddizione dall'analisi di $\sigma_{\tilde{r}}$, $\sigma'_{\tilde{r}'}$ e $\sigma_{\tilde{r}'}$. Abbiamo

$$\sigma_{\tilde{r}} = \begin{pmatrix} b_{\tilde{r},1} & \ldots & b_{\tilde{r},k-1} & b_{\tilde{r},k} = d_r & \ldots & b_{\tilde{r},m_{\tilde{r}}} \\ a_{\tilde{r},1} & \ldots & a_{\tilde{r},k-1} = c_r & a_{\tilde{r},k} & \ldots & a_{\tilde{r},m_{\tilde{r}}} \end{pmatrix},$$

$$\sigma'_{\tilde{r}'} = \begin{pmatrix} b'_{\tilde{r}',1} & \ldots & b'_{\tilde{r}',k'-1} & b'_{\tilde{r}',k'} = d_r & b'_{\tilde{r}',k'+1} & \ldots & b'_{\tilde{r}',m'_{\tilde{r}'}} \\ a'_{\tilde{r}',1} & \ldots & a'_{\tilde{r}',k'-1} = c_r & a'_{\tilde{r}',k'} & a'_{\tilde{r}',k'+1} & \ldots & a'_{\tilde{r}',m'_{\tilde{r}'}} \end{pmatrix}.$$

(dove $k := k_{\tilde{r}}$ e $k' := k'_{\tilde{r}'}$). Per ogni $j = 1, \ldots, m'_{\tilde{r}'} - k'$, c'è un indice u tale che

$$b'_{\tilde{r}',k'+j} = d_u \qquad a'_{\tilde{r}',k'+j-1} = c_u;$$

poiché $d_r = b'_{\tilde{r}',k'} < b'_{\tilde{r}',k'+j} = d_u$, abbiamo $r < u$. Da ciò e dalla definizione di r deduciamo che ogni coppia (d_u, c_u) occupa in $\sigma_{\tilde{r}'}$ ed in $\sigma'_{\tilde{r}'}$ lo stesso posto. Denotando quindi con v l'indice per cui $d_v = b_{\tilde{r}',k'}$, $c_v = a_{\tilde{r}',k'-1}$, abbiamo

$$\sigma_{\tilde{r}'} = \begin{pmatrix} b_{\tilde{r}',1} & \ldots & b_{\tilde{r}',k'-1} & b_{\tilde{r}',k'} = d_v & b_{\tilde{r}',k'+1} = b'_{\tilde{r}',k'+1} & \ldots \\ a_{\tilde{r}',1} & \ldots & a_{\tilde{r}',k'-1} = c_v & a_{\tilde{r}',k'} = a'_{\tilde{r}',k'} & a_{\tilde{r}',k'+1} = a'_{\tilde{r}',k'+1} & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ldots & b_{\tilde{r}',m_{\tilde{r}'}} = b'_{\tilde{r}',m'_{\tilde{r}'}} \\ \ldots & a_{\tilde{r}',m_{\tilde{r}'}} = a'_{\tilde{r}',m'_{\tilde{r}'}} \end{pmatrix}.$$

Poiché $v < r$, si ha $d_v \le d_r$. Se $d_v < d_r$, allora da $\sigma_{\tilde{r}} \prec \sigma_{\tilde{r}'}$ deduciamo $a_{\tilde{r}',k'} + \varepsilon = a'_{\tilde{r}',k'} + \varepsilon > a_{\tilde{r},k-1} = c_r$; questo è in contaddizione col fatto che $\sigma'_{\tilde{r}'}$ è un ε-antimorfismo, cioè $a'_{\tilde{r}',k'} + \varepsilon \le c_r = a'_{\tilde{r}',k'-1}$. Se invece $d_v = d_r$, poiché $v < r$ abbiamo $c_v < c_r$ (la possibilità $c_v = c_r$, che può manifestarsi quando $\varepsilon = 1$, è irrilevante per la nostra analisi); d'altra parte, da $b_{\tilde{r}',k'-1} < d_v = d_r = b_{\tilde{r},k}$ per la **Def.3** deduciamo $c_r = a_{\tilde{r},k-1} \le a_{\tilde{r}',k'-1} = c_v$; contraddizione. □

3 Un nuovo algoritmo per la corrispondenza di Robinson-Schensted

La nozione di "tableau di Young" che adottiamo qui è leggermente diversa da quelle che si trovano di solito in letteratura. Sia $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, $\lambda_i \in \mathbf{N}$, $\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_r$, una partizione dell'intero $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r$. Con *tableau di Young di tipo* $(\le, <)$ (risp.: *di tipo* $(<, \le)$) *e di shape* λ intendiamo un "tableau" $T = (t_{ij})$, dove $i \in \{1, \ldots, r\}$, $1 \le j \le \lambda_i$, $t_{ij} \le t_{i,j+1}$ e $t_{ij} < t_{i+1,j}$ (risp.: $t_{ij} < t_{i,j+1}$ e $t_{ij} \le t_{i+1,j}$). Nel seguito per semplicità chiameremo una coppia (T_1, T_2) di tableaux di Young dello stesso shape ed entrambi di tipo $(\le, <)$ una 1-*coppia di tableaux di Young*, mentre useremo la frase 0-*coppia di tableaux di Young* quando T_1 è di tipo $(<, \le)$ e T_2 è di tipo $(\le, <)$.

Algoritmo $\mathbf{B}_\varepsilon$ **Costruzione dell'ε-coppia** $(T_1, T_2) = \mathbf{B}_\varepsilon(\sigma)$ **di tableaux di Young associata ad una data ε-two-line array** σ.

Step 1. *Si trovi l'ε-decomposizione canonica di* σ:

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_s =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,m_1} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m_1} \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} b_{s,1} & b_{s,2} & \ldots & b_{s,m_s} \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \ldots & a_{s,m_s} \end{pmatrix}$$

$(\sigma_1 \prec_\varepsilon \sigma_2 \prec_\varepsilon \ldots \prec_\varepsilon \sigma_s)$.

Step 2. *Si determini l'ε-contrazione di* σ:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2 \cdot \ldots \cdot \hat{\sigma}_s =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{1,2} & b_{1,3} & \ldots & b_{1,m_1} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m_1-1} \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} b_{s,2} & b_{s,3} & \ldots & b_{s,m_s} \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \ldots & a_{s,m_s-1} \end{pmatrix}$$

e si mettano gli elementi $a_{1,m_1}, a_{2,m_2}, \ldots a_{s,m_s}$ *e* $b_{1,1}, b_{2,1}, \ldots b_{s,1}$ *(eliminati durante il passaggio da* σ *a* $\hat{\sigma}$*) ordinatamente nella prima riga di* T_1 *e* T_2*, rispettivamente.*

<u>*Step*</u> *3. Si proceda iterativamente — partendo da Step 1 — su* $\hat{\sigma}$ *per costruire le righe successive dei tableaux di Young.*

Vogliamo dimostrare l'equivalenza tra l'**Algorithm** $\mathbf{B}_\varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$, e le due diverse generalizzazioni dovute a Knuth dell'algoritmo di Schensted classico. Per semplicità denotiamo con $\mathbf{KS}_1$ e $\mathbf{KS}_0$ gli algoritmi descritti in [2],§2 e in [2],§5, rispettivamente.

Proposizione 2 *L'***Algoritmo** $\mathbf{B}_\varepsilon$ *è equivalente all'* **Algorithm** $\mathbf{KS}_\varepsilon$.

Dimostrazione Sia (T_1, T_2) l'ε-coppia di tableaux di Young associata a σ da $\mathbf{KS}_\varepsilon$. Denotiamo con (T_1', T_2') l'ε-coppia di tableaux di Young ottenuta eliminando la prima riga di T_1 e T_2 e sia τ l'ε-two-line array associata a (T_1', T_2') dall'algoritmo inverso di $\mathbf{KS}_\varepsilon$.

Sia $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ l'insieme (eventualmente vuoto) di indici tali che $i \in I$ sse a_i non compare nella prima riga di T_1. Ad ogni $i \in I$ associamo un indice $j_i \in \{1, \ldots, m\}$, definito come quello dell'elemento a_{j_i} che, per effetto dell'applicazione dell'**Algorithm** $\mathbf{KS}_\varepsilon$ a σ, toglie a_i dalla prima riga di T_1. Affermiamo che τ è formato da tutte le coppie (b_{j_i}, a_i), per $i \in I$. Per dimostrarlo, consideriamo l'applicazione ϕ_σ (risp.: ϕ_τ) che associa ad ogni elemento $i \in \{1, \ldots, m\}$ (risp.: $i \in I$) le coordinate dell'ultimo posto di T_1 (risp.: T_1') occupato per effetto dell'inserimento di a_i in T_1 (risp.: T_1'). Se $\phi_\sigma(j_i) = (r, s)$ e $\phi_\tau(i) = (r', s')$, allora abbbiamo ovviamente $r' = r - 1$, $s' = s$. Poiché b_{j_i} occupa in T_2 il posto $\phi_\sigma(j_i) = (r, s)$, occuperà in T_2' il posto $(r-1, s) = \phi_\tau(i) = (r', s')$. Quindi $(b_{j_i}, a_i) \subseteq \tau$.

D'altra parte, è chiaro che l'ε-decomposizione canonica di σ è della forma

$$\ldots \cdot \begin{pmatrix} \ldots & b_i & b_{j_i} & \ldots \\ \ldots & a_i & a_{j_i} & \ldots \end{pmatrix} \cdot \ldots;$$

ne consegue che la coppia (b_{j_i}, a_i) appartiene anche all'ε-contrazione di σ. Ciò prova che τ è l'ε-contrazione di σ; quindi gli algoritmi $\mathbf{B}_\varepsilon$ e $\mathbf{KS}_\varepsilon$ sono equivalenti. □

4 Ulteriori definizioni

Per descrivere l'algoritmo inverso dell' **Algoritmo** $\mathbf{B}_\varepsilon$, abbiamo bisogno di ulteriori definizioni e proprietà.

Definizione 5 *Diciamo che la coppia* $\rho = (b, a)$ *è* ε-inseribile *nell'*ε*-antimorfismo* σ *se per qualche* j, $1 < j \leq m$, *abbiamo*

$$b_j < b < b_{j+1} \quad \text{e} \quad a_{j-1} - \varepsilon \geq a \geq a_j + \varepsilon$$

(dove per convenzione $b_{m+1} = a_0 = +\infty$*). Se ciò accade l'*ε*-antimorfismo*

$$\sigma^\rho := \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_j & b & \ldots & b_m \\ a_1 & \ldots & a & a_j & \ldots & a_m \end{pmatrix}$$

sarà chiamato ε-espansione *di* σ *con* ρ.

Definizione 6 *Diciamo che la coppia* $\rho = (b, a)$ *è* ε*-inseribile in una* ε*-two-line array* σ *se, considerata l'*ε*-decomposizione canonica* $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_s$ *di* σ*, la coppia* (b, a) *è* ε*-inseribile in almeno uno degli* ε*-antimorfismi* σ_i*, diciamo* σ_r*, in modo tale che la concatenazione* $\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_r^\rho \cdot \ldots \cdot \sigma_s$ *soddisfi* $\sigma_1 \prec_\varepsilon \ldots \prec_\varepsilon \sigma_r^\rho \prec_\varepsilon \ldots \prec_\varepsilon \sigma_s$ *. Se ciò accade, allora l'*ε*-two-line array* $\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_r^\rho \cdot \ldots \cdot \sigma_s$ *si dirà l'*ε-espansione *di* σ *con* $\rho = (b, a)$ *e sarà denotata con* σ^ρ.

È possibile provare che, se l'ε-espansione σ^ρ esiste, allora $r \in \{1, \ldots, s\}$ è necessariamente l'indice più grande per cui $\rho = (b, a)$ è ε-inseribile in σ_r. La seconda parte di **Def.6** si basa su questa proprietà. Inoltre, **Prop.1** assicura che questa concatenazione $\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_r^\rho \cdot \ldots \cdot \sigma_s$ è l'ε-decomposizione canonica di σ^ρ in ε-antimorfismi.

Definizione 7 *Siano date le* ε*-two-line arrays* σ *e* τ*. La nozione di* ε-inseribilità di τ in σ *e la corrispondente nozione di* ε-espansione σ^τ di σ con τ *sono definite per induzione sulla lunghezza* $\#\tau$ *di* τ *nel modo seguente.*

1. Se $\#\tau = 1$*, abbiamo* $\tau = (d, c)$ *e si ricade nella* **Def.6***; l'*ε-espansione σ^τ di σ con τ *è definita come l'*ε*-espansione di* σ *con la coppia* $\tau = (d, c)$.

2. Diciamo che l'ε*-two-line array* $\tau = \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & \ldots & d_n \\ c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix}$ è ε-inseribile in σ *se i)* $\tau' = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix}$ *è* ε*-inseribile in* σ*, e ii)* (d_0, c_0) *è* ε*-inseribile in* $\sigma^{\tau'}$*; se ciò accade, l'*ε-espansione σ^τ di σ con τ *è definita come l'*ε*-espansione di* $\sigma^{\tau'}$ *con* (d_0, c_0).

5 L' Algoritmo $\mathbf{T}_\varepsilon$ inverso dell'Algoritmo $\mathbf{B}_\varepsilon$.

Diamo una descrizione induttiva, sul numero delle righe dei tableaux, della costruzione dell'ε-two-line array $\sigma := \mathbf{T}_\varepsilon(T_1, T_2)$ associata ad una ε-coppia (T_1, T_2) di tableaux di Young.

Algoritmo $\mathbf{T}_\varepsilon$

1. Se i tableaux hanno solo una riga, cioè

$$T_1 = [a_1, a_2, \ldots, a_s \quad \text{e} \quad T_2 = [b_1, b_2, \ldots, b_s,$$

poniamo

$$\sigma = \mathbf{T}_\varepsilon(T_1, T_2) := \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_s \\ a_1 & a_2 & \dots & a_s \end{pmatrix}.$$

2. Se

$$T_1 = \begin{bmatrix} a_{0,1} & \dots & \dots & \dots & a_{0,s_0} \\ a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,s_1} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{t,1} & \dots & a_{t,s_t} & & \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} b_{0,1} & \dots & \dots & \dots & b_{0,s_0} \\ b_{1,1} & \dots & \dots & b_{1,s_1} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ b_{t,1} & \dots & b_{t,s_t} & & \end{bmatrix},$$

poniamo

$$T_1' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,s_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{t,1} & a_{t,2} & \dots & a_{t,s_t} & \end{bmatrix}, T_2' = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & \dots & b_{1,s_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{t,1} & b_{t,2} & \dots & b_{t,s_t} & \end{bmatrix},$$

e sia $\sigma' = \mathbf{T}_\varepsilon(T_1', T_2')$; *allora l'*$\varepsilon$*-two-line array* $\sigma = \mathbf{T}_\varepsilon(T_1, T_2)$ *è definita come l'*ε*-espansione* $\theta^{\sigma'}$ *dell'*ε*-two-line array*

$$\theta = \begin{pmatrix} b_{0,1} \\ a_{0,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{0,2} \\ a_{0,2} \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} b_{0,s_0} \\ a_{0,s_0} \end{pmatrix}$$

con $\sigma' = \mathbf{T}_\varepsilon(T_1', T_2')$.

In altri termini, la costruzione dell'ε-two-line array σ associata all'ε-coppia (T_1, T_2) di tableaux di Young si realizza con successive eliminazioni di coppie di righe dai tableaux (partendo dalle ultime righe), formando una ε-two-line array θ con le coppie di righe eliminate ed inserendo in θ l'ε-two-line array già ottenuta (quella formata dalle righe eliminate in precedenza). In pratica si richiedono i passi seguenti:

<u>Step</u> *0.* *Si considerano gli elementi* $a_{t,1}, a_{t,2}, \dots, a_{t,s_t}$ *e* $b_{t,1}, b_{t,2}, \dots, b_{t,s_t}$ *dell'ultima riga di* T_1 *e* T_2 *rispettivamente. Questi si eliminano da* T_1 *e* T_2 *e si costruisce l'*ε*-two-line array*

$$\begin{pmatrix} b_{t,1} \\ a_{t,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{t,2} \\ a_{t,2} \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} b_{t,s_t} \\ a_{t,s_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{t,1} & b_{t,2} & \dots & b_{t,t_s} \\ a_{t,1} & a_{t,2} & \dots & a_{t,t_s} \end{pmatrix}.$$

<u>Step</u> *1.* *Sia*

$$\sigma' = \begin{pmatrix} b_1' & b_2' & \dots & b_m' \\ a_1' & a_2' & \dots & a_m' \end{pmatrix}$$

l'ε*-two-line array già ottenuta e siano* $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ *e* $\beta_1, \dots, \beta_s$ *gli elementi della riga più in basso non ancora eliminata da* T_1 *e* T_2*, rispettivamente. Si costruisce la nuova* ε*-two-line array* σ' *come la concatenazione* $\sigma_1' \cdot \sigma_2' \cdot \dots \cdot \sigma_s'$ *per mezzo della seguente*

subroutine:

1. Si pone:

$$\tau_{1,0} := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \tau_{2,0} := \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \tau_{s,0} := \begin{pmatrix} \beta_s \\ \alpha_s \end{pmatrix};$$

$$\rho_1 := \begin{pmatrix} b_1' \\ a_1' \end{pmatrix}, \quad \rho_2 := \begin{pmatrix} b_2' \\ a_2' \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \rho_s := \begin{pmatrix} b_m' \\ a_m' \end{pmatrix};$$

2. Per $i = m, m-1, \dots, 2, 1$ *(in quest'ordine) sia:*
$\lambda :=$ *l'indice più grande* $j \in \{1, \dots, s\}$ *tale che* ρ_i *sia* ε*-inseribile in* $\tau_{j,m-i}$*;*
$\tau_{\lambda,m-i+1} := \tau_{\lambda,m-i}^{\rho_i}$ *(l'*ε*-espansione di* $\tau_{\lambda,m-i}$ *con* ρ_i*).*
$\tau_{l,m-i+1} := \tau_{l,m-i}$ *per ogni* $l \neq \lambda$.

3. Si pone $\sigma_j' := \tau_{j,s}$ *e* $\sigma' := \sigma_1' \cdot \sigma_2' \cdot \dots \cdot \sigma_s'$.

<u>Step</u> *2.* *Se i due tableaux di Young* T_1 *e* T_2 *non sono esauriti si torna allo Step 1. Altrimenti, si pone* $\sigma := \sigma'$.

Nel seguito useremo le notazioni introdotte in Step.1. Ricordando la **Def. 6** e da un'analisi puntuale dell'**Algoritmo** $\mathbf{T}_\varepsilon$ deduciamo il seguente lemma.

Lemma 3 *Sia* $i \in \{1, \dots, m+1\}$*; sia* $\tau_{j,m-i+1}$ *come in Step.1; allora,* $\tau_{1,m-i+1} \prec_\varepsilon \dots \prec_\varepsilon \tau_{s,m-i+1}$. □

Proposizione 3 *L'***Algoritmo** $\mathbf{T}_\varepsilon$ *è l'inverso dell'***Algoritmo** $\mathbf{B}_\varepsilon$.

Dimostrazione Sia $(T_1, T_2) = \mathbf{B}_\varepsilon(\tau)$ e $\sigma := \mathbf{T}_\varepsilon(T_1, T_2)$. Ragioniamo per induzione sul numero di righe di T_1 e T_2. Sia $\tau = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_t$, dove $\tau_i = \begin{pmatrix} \beta_i & \dots \\ \dots & \alpha_i \end{pmatrix}$, l'$\varepsilon$-decomposizione canonica di τ. Sia $\sigma = \sigma_1' \cdot \dots \cdot \sigma_t'$ la concatenazione ottenuta dopo aver inserito l'ε-two-line array σ', costruita precedentemente, in $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} \beta_t \\ \alpha_t \end{pmatrix}$ secondo Step.1 dell'**Algorithm** $\mathbf{T}_\varepsilon$. Quindi anche σ_i' è della forma $\begin{pmatrix} \beta_i & \dots \\ \dots & \alpha_i \end{pmatrix}$. Per il **Lemma 3** σ' è l'ε-contrazione di σ. D'altra parte, per l'ipotesi induttiva, σ' è l'ε-contrazione anche di τ. Quindi, per il **Lemma 2**, $\tau = \sigma$. □

Esempi.

1) (**Alg.B$_1$**)

<u>1^a riga.</u>

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{1} & 3 \\ 3 & \cancel{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{2} & 3 & 5 \\ 6 & 2 & \cancel{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{3} & 5 \\ 3 & \cancel{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{3} & 4 \\ 4 & \cancel{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{3} & 4 & 5 \\ 6 & 5 & \cancel{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{6} \\ \cancel{7} \end{pmatrix};$$

<u>2^a riga.</u>

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{3} & 5 \\ 3 & \cancel{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{3} & 4 & 5 \\ 6 & 4 & \cancel{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{4} & 5 \\ 6 & \cancel{5} \end{pmatrix};$$

<u>3^a riga.</u>

$$\hat{\hat{\tau}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{4} & 5 \\ 6 & \cancel{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{5} \\ \cancel{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{5} \\ \cancel{6} \end{pmatrix};$$

<u>4^a riga.</u>

$$\hat{\hat{\hat{\tau}}} = \begin{pmatrix} \cancel{5} \\ \cancel{6} \end{pmatrix}.$$

<u>Risultato finale</u>

$$T_1 = \left[\begin{array}{llllll} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & & & \\ 3 & 4 & 6 & & & \\ 6 & & & & & \end{array}\right. \quad ; \quad T_2 = \left[\begin{array}{llllll} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & & & \\ 4 & 5 & 5 & & & \\ 5 & & & & & \end{array}\right. .$$

2) (**Alg.B$_0$**)

<u>1^a riga.</u>

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{1} & 3 & 5 \\ 3 & 1 & \cancel{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{2} & 3 & 5 \\ 6 & 2 & \cancel{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{3} & 4 \\ 3 & \cancel{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{3} & 5 \\ 4 & \cancel{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{3} & 4 \\ 6 & \cancel{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{6} \\ \cancel{7} \end{pmatrix};$$

<u>2^a riga.</u>

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 3 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{3} & 4 & 5 \\ 3 & 3 & \cancel{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{3} & 4 & 5 \\ 6 & 6 & \cancel{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{5} \\ \cancel{4} \end{pmatrix};$$

<u>3^a riga.</u>

$$\hat{\hat{\tau}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{4} & 5 \\ 3 & \cancel{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{4} & 5 \\ 6 & \cancel{6} \end{pmatrix};$$

<u>4^a riga.</u>

$$\hat{\hat{\hat{\tau}}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{5} \\ \cancel{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{5} \\ \cancel{6} \end{pmatrix}.$$

<u>Risultato finale</u>

$$T_1 = \left[\begin{array}{llllll} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & & & \\ 3 & 6 & & & & \\ 3 & 6 & & & & \end{array}\right. \quad ; \quad T_2 = \left[\begin{array}{llllll} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & & & \\ 4 & 4 & & & & \\ 5 & 5 & & & & \end{array}\right. .$$

3) Nell'esempio seguente **Alg.T$_1$** e **Alg.T$_2$** sono equivalenti giacché i due tableaux non hanno ripetizioni.

<u>Step</u> 0.

$$T_1 = \left[\begin{array}{llll} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & & \\ 4 & 8 & & \end{array}\right. \qquad T_2 = \left[\begin{array}{llll} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & & \\ 4 & 8 & & \end{array}\right.$$

.

<u>Step</u> 1. (Terze righe.)

Abbiamo $\tau_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\tau_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\tau := \tau_1 \cdot \tau_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;
$\rho_1 := \tau_1$, $\rho_2 := \tau_2$;

<u>Step</u> 2.(Seconde righe.)

Abbiamo $\quad \tau_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 := \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$

<u>Step</u> 2.1.

$\rho_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ è inseribile in $\tau_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$; poniamo $\tau_2 := \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

Step 2.2.

$\rho_1 = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ non è inseribile in $\tau_2 = \begin{pmatrix}6&8\\8&5\end{pmatrix}$ bensì in $\tau_1 = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$; poniamo $\tau_1 := \begin{pmatrix}3&4\\4&3\end{pmatrix}$; $\tau := \tau_1 \cdot \tau_2 = \begin{pmatrix}3&4\\4&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}6&8\\8&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&4&6&8\\4&3&8&5\end{pmatrix}$. Poniamo $\rho_1 := \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\rho_2 := \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\rho_3 := \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$, $\rho_4 := \begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}$.

Step 3.(Prime righe.)

Abbiamo $\tau_1 := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\tau_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\tau_3 = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$, $\tau_4 = \begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}$.

Step 3.1.

$\rho_4 = \begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}$ non è inseribile né in $\tau_4 = \begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}$ né in $\tau_3 = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ ma in $\tau_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$; poniamo $\tau_2 := \begin{pmatrix}2&8\\5&2\end{pmatrix}$.

Step 3.2.

$\rho_3 = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ non è inseribile in $\tau_4 = \begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}$; ma è inseribile in $\tau_3 = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$; poniamo $\tau_3 := \begin{pmatrix}5&6\\8&6\end{pmatrix}$.

Step 3.3.

$\rho_2 = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ non è inseribile né in $\tau_4 = \begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}$, né in $\tau_3 = \begin{pmatrix}5&6\\8&6\end{pmatrix}$, né in $\tau_2 = \begin{pmatrix}2&8\\5&2\end{pmatrix}$; ma è in $\tau_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; poniamo $\tau_1 := \begin{pmatrix}1&4\\3&1\end{pmatrix}$.

Step 3.4.

$\rho_1 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ non è inseribile né in $\tau_4 = \begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}$, né in $\tau_3 = \begin{pmatrix}5&6\\8&6\end{pmatrix}$, né in $\tau_2 = \begin{pmatrix}2&8\\5&2\end{pmatrix}$; ma in $\tau_1 = \begin{pmatrix}1&4\\3&1\end{pmatrix}$; poniamo $\tau_1 := \begin{pmatrix}1&3&4\\4&3&1\end{pmatrix}$.

Risultato finale:

$$\tau := \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_4 = \begin{pmatrix}1&3&4\\4&3&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2&8\\5&2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5&6\\8&6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&5&3&1&8&6&7&2\end{pmatrix}.$$

Bibliografia

[1] D. Foata, *A matrix analog for Viennot's construction of the Robinson-Schensted correspondence*, Linear and Multil. Alg., 7 (1979), 281-289.

[2] D. E. Knuth, *Permutations, matrices and generalized Young tableaux*, Pacific J. Math., 34 (1970), 709-727.

[3] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, vol.3, *Sorting and Searching*, Addison-Wesley, Reading, 1973.

[4] P. Moskowski, *An alternative presentation of the Schensted correspondence.* European J. of Combinatorics (to appear)

[5] C. Schensted, *Longest increasing and decreasing subsequences*, Canad. J. Math., 13 (1961), 179-191

[6] M. P. Schützenberger, *Quelques remarques sur une construction de Schensted*, Math. Scand. 12 (1963), 117-128.

[7] M. P. Schützenberger, *La correspondance de Robinson*, in Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique Strasbourg 1976, D. Foata ed., Lecture Notes in Maths. n.579, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New-York (1977), 59-135.

[8] G. Viennot, *Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted*, in Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique Strasbourg 1976, D. Foata ed., Lecture Notes in Maths. n.579, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New-York (1977), 29-58.

Indirizzo degli autori:
Luigi Cerlienco, Marina Mureddu
Dipartimento di Matematica, Via Ospedale 72, I-09124 Cagliari
Tel. 070-2000456/7 — Fax 070-2000467
eMail:
CERLIENCO@VAXCA1.UNICA.IT
MUREDDU@VAXCA1.UNICA.IT