

de Dyck est un mot  $w \in \{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}^*$  tel que  $w$  privé des lettres  $x$  et  $\bar{x}$  est un facteur gauche de Dyck sur l'alphabet  $\{y, \bar{y}\}$ , et  $w$  privé des lettres  $y$  et  $\bar{y}$  est un facteur gauche de Dyck sur l'alphabet  $\{x, \bar{x}\}$ . Un tel mot code un chemin du plan comportant des pas élémentaires Nord, Est, Sud et Ouest, débutant à l'origine et se développant exclusivement dans le premier quadrant du plan. On montre que  $l_n \sim \frac{2}{\pi} n^{-1} 4^n$ , donc la méthode 0 s'effectue en temps moyen  $C_0(n) \sim \frac{2}{\pi} n^2$ , et la méthode 1 en temps  $C_1(n) \sim n \log n$ , occasionnant un gain sensible.

#### Remerciements

Merci à Jean Berstel et Jean-Guy Penaud pour leurs précieux conseils et suggestions lors de la réalisation de ce travail.

#### Bibliographie

- [1] D. B. Arnold, M. R. Sleep, *Uniform random generation of balanced parenthesis strings*, ACM Trans. Programming Languages and Systems 2 (1980) 122-128.
- [2] E. Barucci, R. Pinzani, R. Sprugnoli, *Génération aléatoire des animaux dirigés*, actes de l'Atelier Franco-Québécois de Combinatoire, Bordeaux 1991, eds. J. Labelle et J. G. Penaud, publi LaCIM 10, Université du Québec à Montréal (1992).
- [3] E. Barucci, R. Pinzani, R. Sprugnoli, *Génération aléatoire de chemins sous-diagonaux*, actes du 4<sup>ème</sup> Colloque Séries Formelles et Combinatoire Algébrique, Montréal 1992, eds. P. Leroux et C. Reutenauer, publi LaCIM 11, Université du Québec à Montréal (1992).
- [4] J. Berstel, D. Perrin, *Theory of Codes*, Academic Press Inc. (1985).
- [5] S. Dulucq, D. Gouyou-Beauchamp, *Sur les facteurs de suites de Sturm*, Theoretical Computer Science 71 (1990) 381-400.
- [6] Ph. Flajolet, B. Salvy, P. Zimmermann, *Automatic average-case analysis of algorithms*, Theoretical Computer Science 79 (1991) 37-109.
- [7] Ph. Flajolet, P. Zimmermann, B. Van Cutsem, *A Calculus for the Random Generation of Combinatorial Structures*, prépublication, Janvier 1993.
- [8] T. Hickey, J. Cohen, *Uniform Random Generation of Strings in a Context-Free Language*, SIAM. J. Comput 4 (1983) 645-655.
- [9] F. Mignosi, *Sturmian words and ambiguous context-free languages*, Internat. J. Found. Comput. Sci 1 (1990) 3 309-323.
- [10] A. Nijenhuis, H.S. Wilf, *Combinatorial algorithms*, Academic Press Inc. (1975).
- [11] J. G. Penaud, *Une nouvelle bijection pour les animaux dirigés*, actes du 22<sup>ème</sup> Séminaire Lotharingien de Combinatoire, publi IRMA, Université Strasbourg I (1989).
- [12] J. L. Rémy, *Un procédé itératif de dénombrement d'arbres binaires et son application à leur génération aléatoire*, R. AI. R. O Informatique Théorique, 19, 2 (1985) 179-195.
- [13] M. P. Schützenberger, *Context-free languages and pushdown automata*, Information and Control 6 (1963) 246-261.
- [14] L. Wacrenier, *Génération aléatoire et uniforme de mots d'un langage*, rapport de stage effectué au LRI, Paris (1992).

## Permutations à motifs exclus et cartes planaires non séparables

S. Dulucq, S. Gire et J. West \*

LaBRI, Université Bordeaux I  
URA CNRS 1304

De nombreux auteurs se sont intéressés à l'énumération des permutations dont certains motifs (sous-suites) sont exclus. En particulier, Knuth [7], considérant l'ensemble des permutations triables par passage dans une pile, appelé parfois permutations de Catalan, a montré qu'elles correspondaient à l'ensemble des permutations ne possédant pas de sous-suite de type 231 noté  $S_n(231)$ . Des travaux plus récents [12, 13] ont eu pour but d'énumérer les permutations ne possédant pas divers types de motifs.

West [16] s'est intéressé au problème des permutations triables par deux passages dans une pile en imposant une règle du jeu du type "tour de Hanoi" pour les empilements, problème différent de la généralisation considérée par Knuth [7] qui n'imposait aucun type de contrainte. West a caractérisé ces permutations en termes de motifs exclus; les motifs interdits sont 2341 et 3241, ce dernier étant autorisé dans le cas où il est lui-même sous-suite du motif 35241 dans la permutation. L'ensemble  $S_n(2341, 3\bar{5}241)$  désigne ces permutations sur  $[n]$ .

West a conjecturé que le nombre de ces permutations est  $2(3n)!/((n+1)!(2n+1)!)$ , conjecture démontrée par Zeilberger [18] de manière analytique (preuve faisant intervenir une équation en trois variables de degrés respectifs 6, 8 et 9 résolue en utilisant le logiciel de calcul formel Maple). Zeilberger [18] souligne le fait qu'il avait vainement cherché une preuve combinatoire de ce résultat.

En effet, il apparaît que ces nombres énumèrent les cartes planaires pointées non séparables suivant le nombre d'arêtes (travaux de Tutte [14]).

L'objectif du présent travail est de relier combinatoirement cette famille de cartes à une famille de permutations à motifs exclus, ceci constituant une étape dans la preuve combinatoire de la conjecture de West que nous donnons dans [5].

La première partie de ce travail est consacrée à l'obtention d'un arbre de génération des cartes planaires pointées non séparables, arbre que nous caractérisons par un jeu de règles permettant de le construire, ces règles étant liées à certains paramètres sur les cartes (nombre de sommets, degré du sommet pointé, degré de la face pointée).

Dans la deuxième partie, nous montrons que cet arbre est exactement l'arbre de génération de la famille de permutations  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$  pour lequel les règles de construction s'interprètent suivant des paramètres sur ces permutations (nombre de descentes, nombre d'éléments saillants à droite, nombre d'éléments saillants à gauche).

Nous déduisons de ces faits que les permutations de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$  sont énumérées par  $2(3n)!/((n+1)!(2n+1)!)$  et obtenons plusieurs formules donnant les distributions de ces permutations suivant divers paramètres. Elles sont déduites des formules donnant le nombre de cartes planaires pointées non séparables à  $n$  arêtes suivant le nombre de sommets (travaux de Brown et Tutte [2]), ou relativement au degré de la face pointée (travaux de Brown [1]).

\*E-mail : name@labri.u-bordeaux.fr

Nous terminons ce travail en donnant les différentes étapes conduisant à la preuve combinatoire de la conjecture de West, le chemin emprunté faisant apparaître plusieurs familles de permutations à motifs exclus qui sont en bijection. Les deux extrémités de ce chemin correspondent d'un côté aux permutations de  $S_n(2341, 3\bar{5}241)$ , c'est à dire aux permutations triables par deux passages dans une pile, et de l'autre aux cartes planaires pointées non séparables, et celui-ci passe par la famille  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$  considérée dans ce travail.

## 1 Définitions et notations

### 1.1 Permutations à motifs exclus.

Soit  $S_n$  l'ensemble des  $n!$  permutations sur  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Définition 1** Une permutation  $\pi$  de  $S_n$  contient une sous-suite de type  $\tau \in S_k$  si et seulement si il existe  $1 \leq i_{\tau(1)} < i_{\tau(2)} < \dots < i_{\tau(k)} \leq n$  telle que  $\pi(i_1) < \pi(i_2) < \dots < \pi(i_k)$ . On note  $S_n(\tau)$  l'ensemble des permutations de  $S_n$  qui ne contiennent pas de sous-suite de type  $\tau$ .

Exemple. La permutation  $\pi = 614753$  appartient à  $S_7(2413)$  mais pas à  $S_7(3142)$  car la sous-suite  $(\pi(1), \pi(2), \pi(4), \pi(6)) = 6173$  est de type 3142.

**Définition 2** Une permutation barrée  $\bar{\tau}$  sur  $[k]$  est une permutation de  $S_k$  dont on distingue un élément. On note  $\tau$  la permutation sur  $[k]$  identique à  $\bar{\tau}$  mais sans distinguer l'élément, et  $\hat{\tau}$  la permutation sur  $[k-1]$  constituée des  $k-1$  éléments non distingués de  $\bar{\tau}$  ramenés à une permutation.

Exemple.  $\bar{\tau} = 41\bar{3}54$  est une permutation barrée sur  $[5]$ ,  $\tau = 41352$  et  $\hat{\tau} = 3142$ .

**Définition 3** Une permutation  $\pi$  de  $S_n$  contient une sous-suite de type  $\bar{\tau}$  de  $S_k$  si et seulement si  $\pi$  contient une sous-suite de type  $\hat{\tau}$  qui n'est pas elle même sous-suite d'une suite de type  $\tau$ .

Exemple.  $\bar{\tau} = 41\bar{3}52$ .  $\pi = 614753 \in S_7(\bar{\tau})$  car la sous-suite  $(\pi(1), \pi(2), \pi(4), \pi(6)) = 6173$  qui est de type  $\hat{\tau} = 3142$  est sous-suite de  $(\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4), \pi(6)) = 61473$  qui est de type  $\tau = 41352$ .

**Définition 4** Pour toutes permutations  $\tau_1, \dots, \tau_p$ , barrées ou non, sur, respectivement  $[k_1], \dots, [k_p]$ , on note  $S_n(\tau_1, \dots, \tau_p) = S_n(\tau_1) \cap \dots \cap S_n(\tau_p)$ .

**Définition 5** Pour toute permutation  $\pi$  de  $S_n$ , on considère

**saillg**( $\pi$ ) le nombre d'éléments saillants gauches de  $\pi$ , c'est à dire  $\text{saillg}(\pi) = |\{i \in [1, n], \text{ tel que } \pi(i) > \pi(j) \forall j \in [1, i]\}|$

**sailld**( $\pi$ ) le nombre d'éléments saillants droits de  $\pi$ , c'est à dire  $\text{sailld}(\pi) = |\{i \in [1, n], \text{ tel que } \pi(i) > \pi(j) \forall j \in [i, n]\}|$

**desc**( $\pi$ ) le nombre de descentes de  $\pi$ , c'est à dire  $\text{desc}(\pi) = |\{i \in [1, n], \text{ tel que } \pi(i) > \pi(i+1)\}|$

**mont**( $\pi$ ) le nombre de montées de  $\pi$ , c'est à dire  $\text{mont}(\pi) = |\{i \in [1, n], \text{ tel que } \pi(i) < \pi(i+1)\}|$

### 1.2 Cartes planaires pointées non séparables.

Les cartes et en particulier les cartes planaires sont des objets combinatoires sur lesquels de nombreux travaux ont été réalisés depuis ceux de Tutte dans les années 60. Ainsi, Cori [3] en a donné une représentation par un couple de permutations  $(\sigma, \alpha)$ , où  $\alpha$  est une involution dans le cas des cartes et de nombreux travaux ont porté sur l'énumération de familles de cartes : Tutte [14, 15], Brown [1, 2], Mullin [11], Walsh [9, 10], Cori et Vauquelin [4], ...

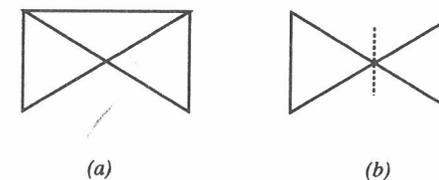


Figure 1: une carte planaire (a) non séparable (b) séparable.

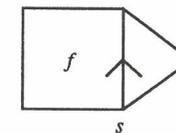
Notre propos portera ici sur les cartes planaires pointées non séparables, c'est à dire les cartes planaires pour lesquelles un brin est distingué, et qui ne possèdent pas de point d'articulation c'est à dire de sommet pour lequel il existe une face passant au moins deux fois par ce sommet. Intuitivement, cela correspond au fait que la carte ne peut être séparée en deux parties connexes en "coupant" en deux un sommet (voir figure 1). Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à l'exposé sur les cartes de Cori [3] ou aux travaux de Tutte [14] sur les cartes non séparables.

On note  $NS_n$  l'ensemble des cartes planaires pointées non séparables à  $n$  arêtes. L'énumération de ces cartes a été obtenue par Tutte [14] qui a montré que  $|NS_{n+1}| = \frac{2}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n}$ .

Etant donnée une carte  $c$  de  $NS_n$ , le sommet distingué de  $c$  est le sommet contenant le brin distingué (sommet dont est issue l'arête pointée) et la face distinguée est la face située "à gauche" de l'arête pointée (cycle  $\alpha\sigma$  contenant le brin distingué dans la représentation de la carte par un couple de permutations  $(\alpha, \sigma)$  [3]).

**Définition 6** Pour une carte  $c$  de  $NS_n$ , on définit  $ds(c)$  le degré du sommet distingué,  $df(c)$  le degré de la face distinguée,  $s(c)$  le nombre de sommets de la carte  $c$ , et  $f(c)$  le nombre de faces de la carte  $c$ .

Exemple.



Cette carte planaire pointée  $c$  a pour sommet distingué le sommet  $s$  et pour face distinguée la face  $f$ ; de plus, elle possède 6 arêtes et  $ds(c) = 3$ ,  $df(c) = 4$ ,  $s(c) = 5$ ,  $f(c) = 3$  (y compris la face infinie).

## 2 Énumération des permutations de $S_n(2413, 41\bar{3}52)$

**Théorème 7** L'ensemble des permutations de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$  est en bijection avec l'ensemble des cartes planaires pointées non séparables à  $n+1$  arêtes.

Ainsi,  $|S_n(2413, 41\bar{3}52)| = \frac{2}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n}$

Pour démontrer ce théorème, nous exhibons dans un premier temps un arbre de génération des cartes planaires pointées non séparables, arbre qui contiendra au niveau  $n$  l'ensemble complet des cartes de  $NS_{n+1}$ . Nous montrerons ensuite que ce même arbre permet d'engendrer l'ensemble des permutations de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$  qui se trouveront toutes au niveau  $n$ . De plus, une analyse plus fine des règles de construction de cet arbre nous permettra d'obtenir les distributions suivantes sur  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ .

**Théorème 8**

$$|\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : \text{desc}(\pi) = k\}| = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \binom{k+1}{2}^{-1} \binom{2n-k-1}{k-1} \binom{n+k}{2k+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$|\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : \text{sailld}(\pi) = k\}| = |\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : \text{sailld}(\pi) = k\}| = \frac{k+1}{(2n-k+1)!} \sum_{j=k+1}^{\min(n+1, 2k+2)} \frac{(3k-2j+2)(2j-k-1)(j-2)!(3n-j-k+1)!}{(n-j+1)!(j-k-1)!(j-k)!(2k-j+2)!}$$

$$|\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : \text{sailld}(\pi) = k+1, \text{desc}(\pi) = k\}| = |\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : \text{sailld}(\pi) = k+1, \text{mont}(\pi) = k\}| = \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k}$$

**2.1 Arbre de génération des cartes planaires pointées non séparables**

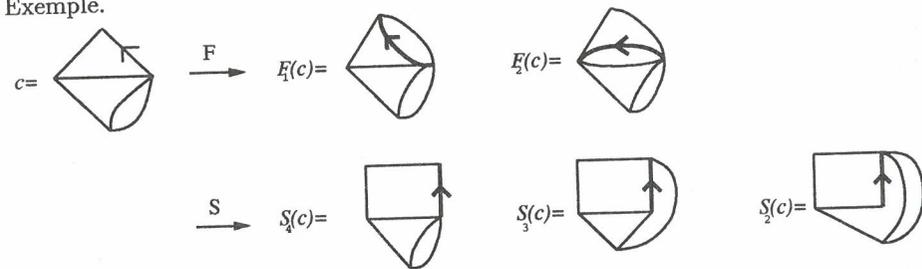
Etant donnée une carte  $c$  de  $NS_n$ , on considère les deux opérations suivantes permettant de construire un certain nombre de cartes de  $NS_{n+1}$  par ajout d'une arête à  $c$ .

**Opération F.** Cette opération consiste en la division en deux faces de la face distinguée de  $c$ , de  $df(c) - 1$  façons différentes, par ajout d'une nouvelle arête issue du sommet distingué de  $c$ , cette arête ajoutée devenant l'arête distinguée de la carte construite. On note  $F_i(c)$ , la  $i^{\text{ème}}$  carte ainsi obtenue,  $c$ 'est à dire celle dont l'extrémité finale de l'arête distinguée est le  $i^{\text{ème}}$  sommet de la face distinguée de  $c$ .

**Opération S.** Cette opération consiste en la division du sommet distingué de  $c$  en deux sommets de degrés  $i$  et  $ds(c) - i + 2$  ( $2 \leq i \leq ds(c)$ ) par ajout d'une arête qui devient l'arête distinguée de la nouvelle carte obtenue. Une telle carte est dite **valide** si et seulement si elle possède un point d'articulation lorsqu'on lui supprime son arête distinguée. On note  $S_i(c)$  la carte ainsi obtenue de sommet distingué de degré  $i$  ( $i \in [2, ds(c)]$ ).

Remarque. Toute carte obtenue par l'application de S ou F à une carte de  $NS_n$  est une carte planaire pointée non séparable de  $NS_{n+1}$ .

Exemple.



Dans cet exemple, la carte  $S_3(c)$  n'est pas valide.

Remarque. Les cartes  $S_i(c)$  non valides sont les cartes planaires pointées non séparables pouvant être obtenues par une opération F sur une carte  $c'$ .

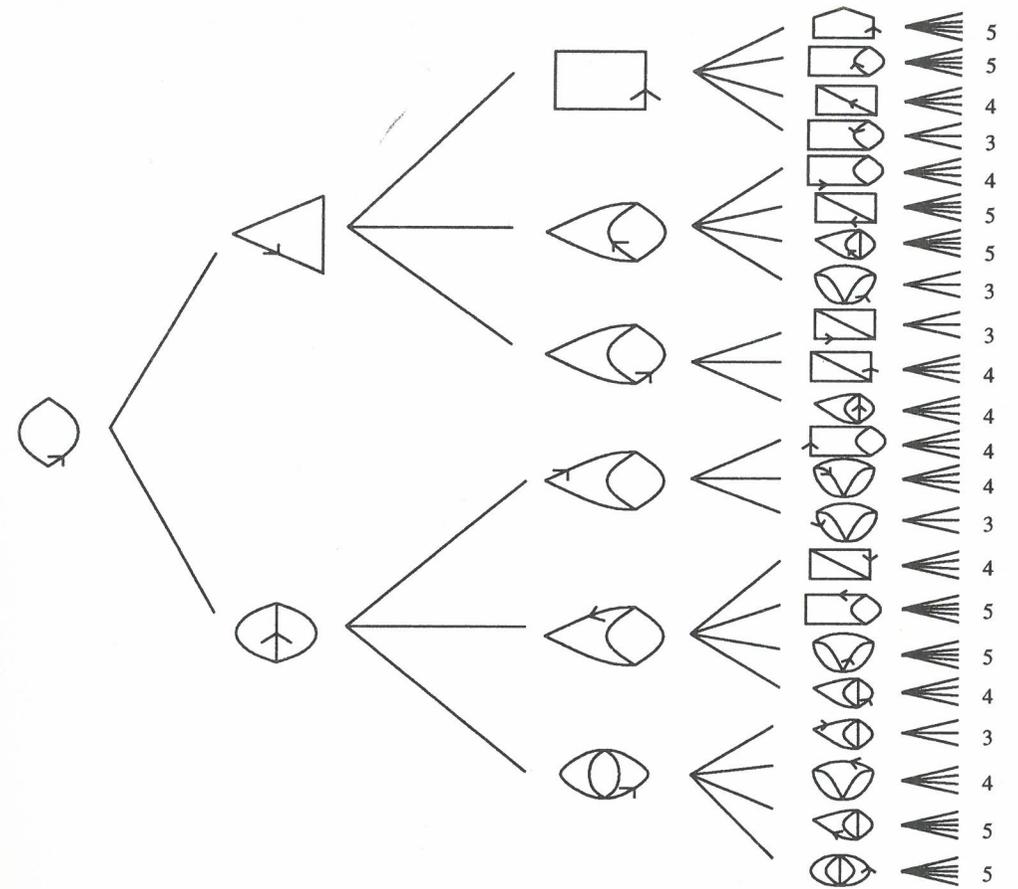
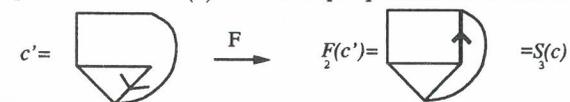


Figure 2: Arbre de génération des cartes planaires pointées non séparables.

Exemple. La carte  $S_3(c)$  de l'exemple précédent est identique à la carte  $F_2(c')$  suivante.



**Définition 9** On considère l'arbre infini  $\mathcal{A}$ , dit **arbre de génération** des cartes planaires pointées non séparables construit de la manière suivante.

$\text{racine}(\mathcal{A}) :=$  la carte planaire pointée non séparable à 2 arêtes,

pour tout sommet  $s$  de  $\mathcal{A}$  correspondant à une carte  $c$ ,

$\text{fils}(s) := \{S_{i_1}(c), \dots, S_{i_p}(c), F_1(c), \dots, F_{df(c)-1}(c) : 2 \leq i_k \leq ds(c) \text{ et } S_{i_k}(c) \text{ valide}\}.$

La figure 2 donne l'arbre de génération  $\mathcal{A}$  jusqu'au niveau 4 et indique la répartition des 91 cartes au niveau 5.

**Proposition 10** L'ensemble des sommets de  $\mathcal{A}$  au niveau  $n$  correspond l'ensemble des cartes planaires pointées non séparables à  $n + 1$  arêtes, chacune apparaissant une fois et une seule.

Preuve.

On suppose qu'au niveau  $n - 1$  toutes les cartes de  $NS_n$  apparaissent une fois et une seule (c'est le cas au niveau 1). Soit  $c$  une carte planaire pointée non séparable de  $NS_{n+1}$ . On enlève l'arête distinguée de  $c$ . Deux cas se présentent.

Si la carte obtenue est non séparable, on distingue l'arête suivant celle otée dans le sens trigonométrique négatif. On obtient une carte planaire pointée non séparable  $c'$  à  $n$  arêtes telle que  $c$  soit obtenue à partir de  $c'$  par application de l'opération F.

Si la carte obtenue est séparable, on réunit en un seul sommet l'origine et l'extrémité de l'arête supprimée en distinguant la seule arête conservant la face et le sommet distingués de la carte initiale. On obtient une carte planaire pointée non séparable  $c'$  à  $n$  arêtes telle que  $c$  soit obtenue à partir de  $c'$  par application de l'opération S.  $\square$

Afin de caractériser l'arbre  $\mathcal{A}$ , nous allons associer à chaque carte non séparable une "étiquette formelle" et définir un jeu de "règles de dérivation" basé sur ces étiquettes et permettant de construire récursivement cet arbre.

**Définition 11** Etant donnée une carte  $c$  de  $\mathcal{A}$ , nous définissons son étiquette par  $\text{label}(c) = (x|df, ds, s, f; D_1, D_2, \dots, D_{df-1})$  où  $x$  est le nombre de fils de  $c$  dans  $\mathcal{A}$ ,  $df = df(c)$ ,  $ds = ds(c)$ ,  $s = s(c)$ ,  $f = f(c)$  et où  $D_i = \{d_1, \dots, d_p\}$  contient les degrés  $d_j$  des sommets distingués des cartes  $S_{d_j}(F_i(c))$  non valides.

Exemple. Soit la carte  $c$  suivante



Cette carte  $c$  a pour étiquette  $(4|3, 3, 3, 3; \emptyset, \{3\})$  car  $F_1(c)$  (figure 3(a)) donne trois cartes par l'opération S qui sont toutes valides (et donc  $D_1 = \emptyset$ ) et  $F_2(c)$  (figure 3(b)) donne trois cartes par S, dont une, ayant 3 pour degré du sommet distingué, qui n'est pas valide (et donc  $D_2 = \{3\}$ ).

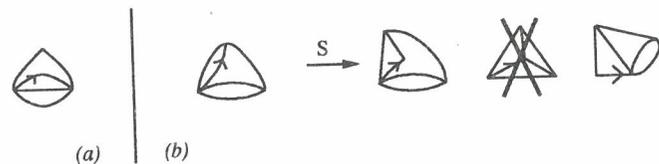


Figure 3: (a)  $F_1(c)$  (b)  $F_2(c)$

**Remarque 12** Pour toute carte planaire pointée non séparable  $c$ ,  $S_2(c)$  et  $S_{ds(c)}(c)$  sont valides.

En effet, la carte  $S_2(c)$  privée de son arête distinguée a pour point d'articulation le sommet origine de la seule arête qui reste accrochée au sommet distingué. De même, la carte  $S_{ds(c)}(c)$  privée de son arête distinguée a pour point d'articulation l'extrémité finale de l'arête qui était distinguée dans  $c$ .

**Remarque 13** L'ensemble  $D_1$  pour une carte  $c$  est aussi l'ensemble des degrés des sommets distingués des cartes  $S_i(c)$  non valides. Ainsi, on a  $x = df + ds - 2 - |D_1|$ .

En effet, pour toute carte  $c$ , la carte  $S_i(c)$  privée de son arête distinguée possède un point d'articulation si et seulement si  $S_i(F_1(c))$  privée de son arête distinguée possède un point d'articulation.

**Lemme 14** L'arbre  $\mathcal{A}$  de génération des cartes planaires pointées non séparables est isomorphe à l'arbre ayant pour racine l'étiquette  $(2|2, 2, 2, 2; \emptyset)$  et obtenu par application récursive des règles de dérivation suivantes

$$(x|df, ds, s, f; D_1, \dots, D_{df-1}) \rightarrow (df+i|df+1, ds_i, s+1, f; D_1^i, D_1^i, D_2^i, \dots, D_{df-1}^i)$$

pour tout  $i \in [1, x - df + 1]$

$$\text{où } \begin{cases} ds_1 = 2 \\ ds_i = \min\{k : k > ds_{i-1} \text{ et } k \notin D_1\} \text{ pour } i > 1 \\ \text{et } D_j^i = D_j \cap \{k : k \leq ds_i\} \end{cases}$$

$$\rightarrow (x+2-i-(|D_i| - |D_1|)|df-i+1, ds+1, s, f+1; D_i, D_{i+1} \cup \{ds+1\}, \dots, D_{df-1} \cup \{ds+1\}), \text{ pour } i \in [1, df-1]$$

La figure 4 donne l'arbre obtenu à partir de ces règles de dérivation jusqu'au niveau 4.

Idée de la preuve. Soit une carte  $c$  d'étiquette  $(x|df, ds, s, f; D_1, \dots, D_{df-1})$ . On cherche les étiquettes des  $x$  fils de  $c$  dans  $\mathcal{A}$ . Deux cas se présentent suivant que ces fils sont obtenus par application de l'opération S ou F.

**Cas 1.** Soit  $b_i$  la  $i^{\text{ème}}$  carte valide obtenue par S à partir de  $c$  ( $i \in [1, x - df + 1]$ ). Des remarques 12 et 13, on déduit que  $b_i = S_p(c)$  avec  $p = 2$  pour  $i = 1$  et  $p = \min\{k : k > ds(b_{i-1}) \text{ et } k \notin D_1\}$  pour  $i > 1$ .

On a  $df(b_i) = df(c) + 1$  et donc  $b_i$  donne  $df(c)$  cartes par F. La carte  $S_{ds(b_i)}(b_i)$  est valide (remarque 12). Une carte  $S_j(b_i)$  pour  $j < ds(b_i)$  est valide si et seulement si la carte  $S_j(c)$  est valide. Ainsi, le nombre de cartes valides obtenues par S à partir de  $b_i$  est  $1 + (i - 1)$ . On en déduit alors que  $b_i$  possède  $df + i$  fils dans  $\mathcal{A}$ .

On a  $ds(b_i) = p$ ,  $f(b_i) = f(c)$  et  $s(b_i) = s(c) + 1$ .

Pour  $k \leq ds(F_1(b_i))$ ,  $S_k(F_1(b_i))$  est valide si et seulement si  $S_k(F_1(c))$  l'est.  $S_{ds(F_1(b_i))}(F_1(b_i))$  est valide (remarque 12). Donc l'ensemble des degrés des sommets distingués des cartes non valides obtenues par S à partir de  $F_1(b_i)$  est  $D_1 \cap \{l : l \leq ds(b_i)\}$ . De même, pour  $k \leq ds(F_j(b_i))$  et  $j > 1$ ,  $S_k(F_j(b_i))$  est valide si et seulement si  $S_k(F_{j-1}(c))$  l'est.  $S_{ds(F_j(b_i))}(F_j(b_i))$  est valide (remarque 12). Donc l'ensemble des degrés des sommets distingués des cartes non valides obtenues par S à partir de  $F_j(b_i)$  est  $D_{j-1} \cap \{l : l \leq ds(b_i)\}$ .

Donc  $b_i$  a pour étiquette  $(df+i|df+1, ds_i, s+1, f; D_1^i, D_1^i, D_2^i, \dots, D_{df-1}^i)$  avec  $D_j^i = D_j \cap \{k : k \leq ds_i\}$  et  $\begin{cases} ds_1 = 2 \\ ds_i = \min\{k : k > ds_{i-1} \text{ et } k \notin D_1\} \text{ pour } i > 1 \end{cases}$

**Cas 2.** On s'intéresse à la carte  $b = F_i(c)$ , pour  $i \in [1, df - 1]$ .

Par définitions, le nombre de fils de  $b$  est  $ds + df - i - |D_i|$ . De la remarque 13, on déduit  $ds + df - i - |D_i| = x + 2 - i - (|D_i| - |D_1|)$ .

On a  $df(b) = df(c) - i + 1$ ,  $ds(b) = ds(c) + 1$ ,  $f(b) = f(c) + 1$  et  $s(b) = s(c)$ .

Pour  $k < ds(b) - 1$ ,  $S_k(F_j(b))$  est valide si et seulement si  $S_k(F_{i+j-1}(c))$  l'est.  $S_{ds(b)}(F_j(b))$  est valide (remarque 12), ainsi que  $S_{ds(b)-1}(F_1(b))$  puisque le  $i^{\text{ème}}$  sommet de la face distinguée de  $c$  est un point d'articulation pour  $S_{ds(b)-1}(F_1(b))$  privée de son arête distinguée. On déduit alors que l'ensemble des degrés des sommets distingués des cartes non valides obtenues par S à partir de  $F_1(b)$  est  $D_i$ . Par contre, pour  $j > 1$ ,  $S_{ds(b)-1}(F_j(b))$  n'est pas valide, et donc l'ensemble des degrés des sommets distingués des cartes non valides obtenues par S à partir de  $F_j(b)$  est  $D_{i+j-1} \cup \{ds(b)\}$ . Ainsi,  $b$  a pour étiquette  $(x+2-i-(|D_i| - |D_1|)|df-i+1, ds+1, s, f+1; D_i, D_{i+1} \cup \{ds+1\}, \dots, D_{df-1} \cup \{ds+1\})$ .  $\square$

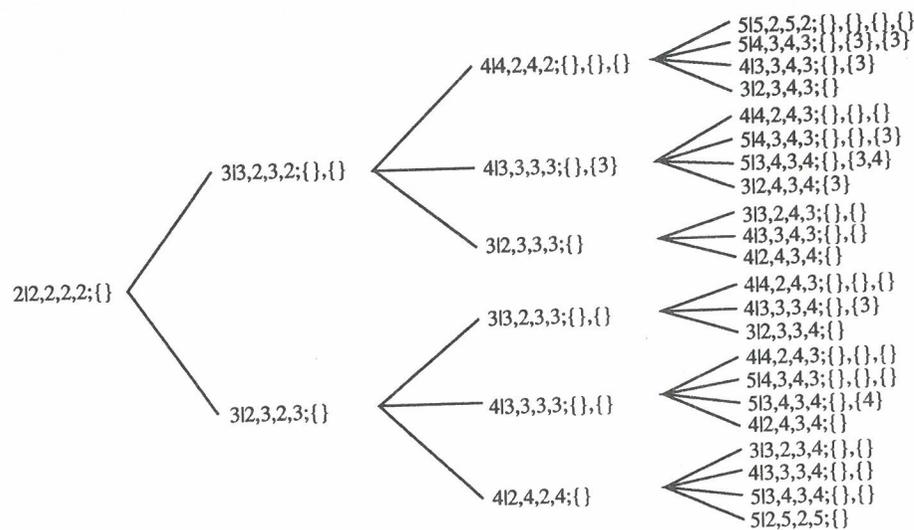


Figure 4: Arbre obtenu par dérivations formelles.

## 2.2 Arbre de génération des permutations à motifs exclus $S_n(2413, 41\bar{3}52)$

**Définition 15** On considère l'arbre infini  $\mathcal{T}$  construit de la manière suivante.

$\text{racine}(\mathcal{T}) :=$  la permutation 1 de  $S_1(2413, 41\bar{3}52)$ .

pour tout sommet  $s$  de  $\mathcal{T}$  correspondant à une permutation  $\sigma$  de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ ,

$\text{fils}(s) := \{\pi : \pi \text{ est dans } S_{n+1}(2413, 41\bar{3}52) \text{ et } \pi \text{ donne } \sigma \text{ par suppression de l'entier } n+1\}$ .

**Propriété 16** A l'ensemble des sommets de  $\mathcal{T}$  au niveau  $n$  correspond l'ensemble des permutations à motifs exclus de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ , chacune apparaissant une fois et une seule.

Preuve. On suppose qu'au niveau  $n-1$  toutes les permutations de  $S_{n-1}(2413, 41\bar{3}52)$  apparaissent une fois et une seule (c'est le cas au niveau 1). Soit une permutation  $\pi$  de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ . Considérons la permutation  $\tau$  obtenue à partir de  $\pi$  en enlevant l'entier  $n$ . Puisque  $\pi$  ne contient pas de sous-suite de type 2413, ni de type 41 $\bar{3}$ 52,  $\tau$  n'en contient pas non plus et est donc une permutation de  $S_{n-1}(2413, 41\bar{3}52)$ .  $\square$

La figure 5 donne l'arbre de génération  $\mathcal{T}$  jusqu'au niveau 4 et indique la répartition des 91 permutations au niveau 5.

Afin de caractériser l'arbre  $\mathcal{T}$ , nous associons à chaque permutation une "étiquette" et définissons un jeu de "règles de dérivation" basé sur ces étiquettes qui permet de construire récursivement cet arbre.

**Définition 17** Un élément  $\pi(i)$  d'une permutation  $\pi$  de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$  est actif si et seulement si il vérifie l'une des conditions suivantes

(i)  $i \leq \pi^{-1}(n)$  et  $\pi(1) \dots \pi(i-1)n + 1\pi(i) \dots \pi(n) \in S_{n+1}(2413, 41\bar{3}52)$ ,

(ii)  $i \geq \pi^{-1}(n)$  et  $\pi(1) \dots \pi(i)n + 1\pi(i+1) \dots \pi(n) \in S_{n+1}(2413, 41\bar{3}52)$ .

Par la suite, nous parlerons d'élément actif gauche lorsque l'élément vérifie la condition (i) et d'élément actif droit lorsqu'il vérifie la condition (ii).

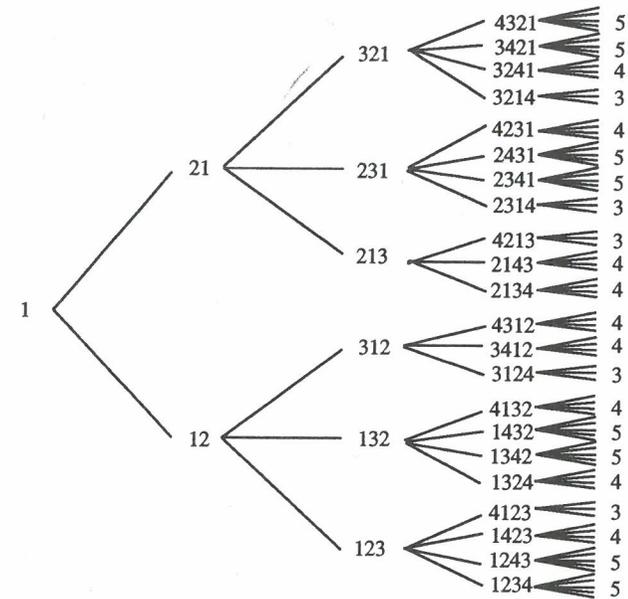


Figure 5: Arbre de génération de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ .

Exemple. La permutation 514623 de  $S_6(2413, 41\bar{3}52)$  possède deux éléments actifs gauches qui sont 5 (la permutation 7514623 étant dans  $S_7(2413, 41\bar{3}52)$ ) et 6 (la permutation 5147623 étant dans  $S_7(2413, 41\bar{3}52)$ ) et deux éléments actifs droits qui sont 6 (la permutation 5146723 étant dans  $S_7(2413, 41\bar{3}52)$ ) et 3 (la permutation 5146237 étant dans  $S_7(2413, 41\bar{3}52)$ ).

**Propriété 18** L'élément  $n$  d'une permutation de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$  est actif gauche et actif droit.

En effet, la permutation obtenue en insérant  $n+1$  à gauche [resp. droite] de  $n$  dans une permutation  $\pi$  de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$  ne peut contenir de sous-suite de type 2413 ni 41 $\bar{3}$ 52.  $\square$

**Définition 19** Etant donné un sommet  $s$  de  $\mathcal{T}$  correspondant à une permutation  $\pi$  de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ , nous définissons son étiquette par  $\text{label}(s) = (x \mid sd, sg, d, m; G_1, G_2, \dots, G_{sd-1})$  où  $x$  est le nombre de fils de  $s$  dans  $\mathcal{T}$ ,  $sd=1+\text{sailld}(\pi)$ ,  $sg=1+\text{saillg}(\pi)$ ,  $d=2+\text{desc}(\pi)$ ,  $m=2+\text{mont}(\pi)$  et  $G_i = \{1+p_1, \dots, 1+p_q\}$  où  $p_j$  est le  $j^{\text{ème}}$  élément saillant gauche de  $\pi$  et n'est pas actif gauche dans la permutation obtenue en insérant  $n+1$  à droite du  $i^{\text{ème}}$  élément saillant droit de  $\pi$ .

Exemple. La permutation 14352 a pour étiquette  $(5 \mid 3, 4, 4, 4; \emptyset, \{4\})$  car elle a 5 fils dans  $\mathcal{T}$ , 2 éléments saillants droits, 3 éléments saillants gauches, 2 descentes et 2 montées. Lorsque l'on insère 6 à droite du premier élément saillant droit, on obtient 143562, permutation dont tous les éléments saillants gauches sont actifs (et donc  $G_1 = \emptyset$ ). Lorsque l'on insère 6 à droite du deuxième élément saillant droit, on obtient 143526, permutation dont le 3 $^{\text{ème}}$  élément saillant gauche (5) est non actif (et donc  $G_2 = \{4\}$ ).

Remarque.

Pour toute permutation  $\pi$  de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ ,  $\text{mont}(\pi) + \text{desc}(\pi) = n - 1$ . La longueur de  $\pi$  n'apparaissant pas dans l'étiquette qui lui est associée, on conserve dans l'étiquette les deux paramètres  $\text{mont}(\pi)$  et  $\text{desc}(\pi)$ .

**Lemme 20** L'arbre  $\mathcal{T}$  de génération des permutations de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$  est isomorphe à l'arbre ayant pour racine l'étiquette  $(2|2, 2, 2; \emptyset)$  et obtenu par application récursive des règles de dérivation suivantes :

$$(x|sd, sg, d, m; G_1, \dots, G_{sd-1}) \longrightarrow (sd+i|sd+1, sg_i, d+1, m; G_1^i, G_2^i, \dots, G_{sd-1}^i)$$

pour tout  $i \in [1, x - sd + 1]$

où  $\begin{cases} sg_1 = 2 \\ sg_i = \min\{k : k > sg_{i-1} \text{ et } k \notin G_1\} \text{ pour } i > 1 \end{cases}$

et  $G_j^i = G_j \cap \{k : k \leq sg_i\}$

$$\longrightarrow (x+2-i - (|G_i| - |G_1|)|sd-i+1, sg+1, d, m+1; G_i, G_{i+1} \cup \{sg+1\}, \dots, G_{sd-1} \cup \{sg+1\}) \text{ , pour } i \in [1, sd-1]$$

La figure 4 donne l'arbre obtenu à partir de ces règles de dérivation jusqu'au niveau 4. La preuve de ce lemme s'appuie sur plusieurs propriétés.

**Propriété 21** *Lorsqu'un élément n'est pas actif pour une permutation  $\pi$  de  $\mathcal{T}$ , il reste inactif pour tout fils de  $\pi$  dans  $\mathcal{T}$ .*

En effet, si l'insertion de  $n+1$  dans une position de la permutation  $\pi$  de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$  introduit une sous-suite de type 2413 ou  $41\bar{3}52$ , alors l'insertion de  $n+2$  à cette même place dans toute permutation  $\sigma$  obtenue à partir de  $\pi$  par insertion de l'entier  $n+1$  introduit aussi une sous-suite de ce type.  $\square$

**Propriété 22** *Pour toute permutation  $\pi$  de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$*

- (i)  $\pi(i)$  est un élément actif droit pour  $\pi$  si et seulement si  $\pi(i)$  est un élément saillant droit de  $\pi$ .
- (ii) Si  $\pi(i)$  est un élément actif gauche pour  $\pi$  alors  $\pi(i)$  est un élément saillant gauche de  $\pi$ .

Preuve.

(i) Soit  $\pi(i)$  un élément actif droit de  $\pi$ . Supposons que  $\pi(i)$  n'est pas saillant droit. Alors il existe  $\pi(j)$ ,  $j > i$ , tel que  $\pi(i) < \pi(j)$ . La sous-suite formée des éléments  $n, \pi(i), n+1, \pi(j)$  est de type  $41\bar{3}52$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $\pi(i)$  est actif.

Réciproquement, soit  $\pi(i)$  un élément saillant droit de  $\pi$ . Montrons que  $\pi(i)$  est actif droit. Si l'insertion de  $n+1$  à droite de  $\pi(i)$  crée une sous-suite  $\pi(i_1), n+1, \pi(i_2), \pi(i_3)$  de type 2413, comme  $\pi(i)$  est un élément saillant droit, la sous-suite  $\pi(i_1), \pi(i), \pi(i_2), \pi(i_3)$  est de type 2413, ce qui est impossible puisque  $\pi$  est dans  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ . Si cette insertion crée une sous-suite  $\pi(i_1), \pi(i_2), n+1, \pi(i_3)$  de type 3142, deux cas se présentent. Si  $\pi(i_1) > \pi(i)$ , alors la sous-suite  $\pi(i_1), \pi(i_2), \pi(i), n+1, \pi(i_3)$  est de type  $41\bar{3}52$ . Sinon, la sous-suite  $\pi(i_1), \pi(i_2), \pi(i), \pi(i_3)$  de  $\pi$  est de type 3142. Comme  $\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52)$ , il existe  $\pi(i_4)$  tel que  $\pi(i_1), \pi(i_2), \pi(i), \pi(i_3)$  soit sous-suite de  $\pi(i_1), \pi(i_2), \pi(i_4), \pi(i), \pi(i_3)$  de type  $41\bar{3}52$ . Dans les deux cas, la sous-suite  $\pi(i_1), \pi(i_2), n+1, \pi(i_3)$  est sous-suite d'une sous-suite de type  $41\bar{3}52$ . Donc  $\pi(i)$  est actif.  $\square$

(ii) Soit  $\pi(i)$  un élément actif gauche de  $\pi$ . Supposons que  $\pi(i)$  n'est pas saillant gauche. Alors il existe  $\pi(j)$ ,  $j < i$ , tel que  $\pi(i) < \pi(j)$ . La sous-suite formée des éléments  $\pi(j), n+1, \pi(i), n$  est de type 2413, ce qui est en contradiction avec le fait que  $\pi(i)$  est actif.  $\square$

**Propriété 23** *Soit  $\pi(i)$  un élément actif gauche [resp. droit] d'une permutation  $\pi$  de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ . Lorsque l'on insère l'entier  $n+1$  entre  $\pi(i-1)$  et  $\pi(i)$  [resp.  $\pi(i)$  et  $\pi(i+1)$ ], les éléments actifs  $\pi(j)$  tels que  $j < i$  [resp.  $j > i$ ] restent actifs.*

Preuve. Soit  $\pi(i)$  un élément actif gauche [resp. droit] de  $\pi$  dans  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ . Soit  $\pi(j)$  un élément actif gauche [resp. droite], avec  $j < i$  [resp.  $j > i$ ]. Comme  $\pi(j)$  est saillant gauche [resp. droit] et  $\pi$  n'a pas de sous-suite de type 2413 ni  $41\bar{3}52$ , la permutation  $\pi(1) \dots \pi(j-1)n+1 \dots \pi(j)n+1 \dots \pi(i-1)n+1 \dots \pi(i) \dots \pi(n)$  [resp.  $\pi(1) \dots \pi(i)n+1 \dots \pi(j)n+1 \dots \pi(j+1) \dots \pi(n)$ ] ne contient pas de sous-suite de ce type.  $\square$

**Remarque 24** *Les positions  $p_i$  de l'ensemble  $G_1 = \{1 + p_1, \dots, 1 + p_q\}$  sont les positions des éléments saillants gauches non actifs pour  $\pi$  dans  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ . Ainsi,  $x = sd - 2 + sg - |G_1|$ .*

**Preuve du lemme 20.**

Soit  $\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52)$  d'étiquette  $(x|sd, sg, d, m; G_1, \dots, G_{sd-1})$ . On cherche les étiquettes des  $x$  fils de  $\pi$  dans  $\mathcal{T}$ . Deux cas se présentent suivant que ces fils sont obtenus en insérant  $n+1$  à gauche d'un actif gauche ou à droite d'un élément actif droit.

*Cas 1.* Soit  $\pi(g)$  le  $i^{\text{ème}}$  élément actif gauche de  $\pi$  ( $i \in [1, x - sd + 1]$ ). Soit  $\tau$  la permutation de  $S_{n+1}(2413, 41\bar{3}52)$  obtenue à partir de  $\pi$  en insérant  $n+1$  à gauche de  $\pi(g)$ , c'est à dire  $\tau = \pi(1) \dots \pi(g-1)(n+1)\pi(g) \dots \pi(n)$ .

$\tau$  possède  $i$  éléments actifs gauches (propriétés 18, 21 et 23) et  $sd$  éléments actifs droits qui sont aussi les éléments saillants droits (propriété 22), donc  $sd+i$  fils dans  $\mathcal{T}$ . On note  $sg_i = 1 + \text{saillg}(\tau)$ . Le premier élément d'une permutation de  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$  étant toujours actif, le premier élément actif gauche est le premier élément saillant gauche, et donc  $sg_1 = 2$ . Des propriétés 18, 21 et 23 et de la remarque 24, on déduit que, pour  $i > 1$ , le  $i^{\text{ème}}$  et dernier élément actif gauche est le  $(l-1)^{\text{ème}}$  saillant gauche, avec  $l = \min\{k : k \notin G_1 \text{ et } k > sg_{i-1}\}$ . De la propriété 22, on déduit que  $\text{desc}(\tau) = \text{desc}(\pi) + 1$  et  $\text{mont}(\tau) = \text{mont}(\pi)$ . Enfin, soit  $\sigma$  la permutation obtenue à partir de  $\tau$  en insérant  $n+2$  à droite de  $\pi(d)$ , le  $j^{\text{ème}}$  élément actif droit, pour  $j \in [1, sd]$ , c'est à dire  $\sigma = \pi(1) \dots \pi(g-1)n+1\pi(g) \dots \pi(d)n+2\pi(d+1) \dots \pi(n)$ . Les éléments saillants gauches de  $\sigma$  qui créent une sous-suite de type 2413 ou  $42\bar{3}52$  lorsque l'on insère  $n+3$  à leur gauche sont les éléments saillants gauches  $\pi(s)$  tels que  $s < g$  qui créent une sous-suite de type 2413 ou  $42\bar{3}52$  lorsque l'on insère  $n+2$  à leur gauche dans la permutation obtenue à partir de  $\pi$  en insérant  $n+1$  à droite du  $(j-1)^{\text{ème}}$  élément actif droit de  $\pi$  (le premier pour  $j = 1$ ), c'est à dire ceux de  $G_{j-1} \cap \{k : k \leq sg_i\}$  ( $G_1 \cap \{k : k \leq sg_i\}$  pour  $j = 1$ ). Donc l'étiquette de  $\tau$  est  $(sd+i|sd+1, sg_i, d+1, m; G_1^i, G_2^i, \dots, G_{sd-1}^i)$  avec

$$G_j^i = G_j \cap \{k : k \leq sg_i\} \text{ et } \begin{cases} sg_1 = 2 \\ sg_i = \min\{k : k > sg_{i-1} \text{ et } k \notin G_1\} \text{ pour } i > 1. \end{cases}$$

*Cas 2.* Soit  $\tau \in S_{n+1}(2413, 41\bar{3}52)$  obtenue à partir de  $\pi$  en insérant  $n+1$  à droite du  $i^{\text{ème}}$  élément actif droit de  $\pi$  ( $i \in [1, sd-1]$ ).

$\tau$  possède  $sd-i$  éléments actifs droits qui sont aussi saillants droits (propriétés 23 et 22),  $sg$  éléments saillants gauches dont  $sg - |G_i|$  actifs, et donc  $x+2+|G_1| - |G_i| - i$  fils dans  $\mathcal{T}$  (remarque 24). De la propriété 22, on déduit que  $\text{desc}(\tau) = \text{desc}(\pi)$  et  $\text{mont}(\tau) = \text{mont}(\pi) + 1$ . Enfin, soit  $\tau(d)$  le  $j^{\text{ème}}$  actif droit de  $\tau$  et  $\sigma$  la permutation obtenue en insérant  $n+2$  à droite de  $\tau(d)$  dans  $\tau$ , pour  $j \in [1, sd-i]$ . Pour  $j = 1$  (donc  $\tau(d) = n+1$  (propriété 18)), les éléments saillants gauches non actifs de  $\tau$  sont exactement les saillants gauches non actifs de  $\sigma$ . Pour  $j > 1$  (donc  $\tau(d) = \pi(d-1)$  (propriété 23)), l'élément  $n+1$  (le  $sg^{\text{ème}}$ ) devient inactif car la sous-suite  $n, n+3, \tau(d), n+2$  est de type 2413. Les autres éléments saillants gauches de  $\tau$  sont actifs si et seulement si ils sont actifs pour la permutation obtenue à partir de  $\pi$  en insérant  $n+1$  à droite de  $\pi(d-1)$ , c'est à dire si et seulement si ils ne sont pas dans  $G_{i+j-1}$ . Ainsi, l'étiquette de  $\pi$  est  $(x+2+|G_1| - |G_i| - i|sd-i+1, sg+1, d, m+1; G_i, G_{i+1} \cup \{sg+1\}, \dots, G_{sd-1} \cup \{sg+1\})$ .  $\square$

### 2.3 Preuve des formules d'énumération .

**Preuve du théorème 7.**

Des lemmes 14 et 20, on déduit que les arbres  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{T}$  sont isomorphes et donc que  $|S_n(2413, 41\bar{3}52)| = \frac{2}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n}$  d'après les résultats de Tutte [14].  $\square$

**Preuve du théorème 8.**

Des "règles de dérivation" établies dans les lemmes 14 et 20, on déduit  $|\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : \text{sailld}(\pi) = i, \text{saillg}(\pi) = j, \text{desc}(\pi) = k, \text{mont}(\pi) = l\}|$

$$= |\{c \in NS_{n+1} : df(c) = i+1, ds(c) = j+1, s(c) = k+2, f(c) = l+2\}|.$$

Plus précisément, on a  $|\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : desc(\pi) = k\}| = |\{c \in NS_{n+1} : s(c) = k+2\}|$ .

Brown et Tutte [2] ont montré que  $|\{c \in NS_n : s(c) = 1+j\}| = \frac{(j+n-2)!(2n-j-2)!}{j!(n-j)!(2j-1)!(2n-2j-1)!}$ .

On obtient ainsi le résultat annoncé, à savoir

$$|\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : desc(\pi) = k\}| = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \binom{k+1}{2}^{-1} \binom{2n-k-1}{k-1} \binom{n+k}{2k+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, on a  $|\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : sailld(\pi) = k\}| = |\{c \in NS_{n+1} : df(c) = k+1\}|$  et  $|\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : saillg(\pi) = k\}| = |\{c \in NS_{n+1} : ds(c) = k+1\}|$ . Brown [1] a montré que  $|\{c \in NS_{n+1} : df(c) = k+1\}| = \frac{k+1}{(2n-k+1)!} \sum_{j=k+1}^{\min(n+1, 2k+2)} \frac{(3k-2j+2)(2j-k-1)(j-2)!(3n-j-k+1)!}{(n-j+1)!(j-k-1)!(j-k)!(2k-j+2)!}$ . Par dualité, cette opération conservant la propriété de non séparabilité des cartes [14], on a  $|\{c \in NS_{n+1} : df(c) = k+1\}| = |\{c \in NS_{n+1} : ds(c) = k+1\}|$ . On obtient ainsi le résultat annoncé, à savoir

$$|\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : sailld(\pi) = k\}| = |\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : saillg(\pi) = k\}| = \frac{k+1}{(2n-k+1)!} \sum_{j=k+1}^{\min(n+1, 2k+2)} \frac{(3k-2j+2)(2j-k-1)(j-2)!(3n-j-k+1)!}{(n-j+1)!(j-k-1)!(j-k)!(2k-j+2)!}$$

Enfin, on a  $|\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : sailld(\pi) = k+1, desc(\pi) = k\}| = |\{c \in NS_{n+1} : df(c) = k+2, s(c) = k+2\}|$  et  $|\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : saillg(\pi) = k+1, mont(\pi) = k\}| = |\{c \in NS_{n+1} : ds(c) = k+2, f(c) = k+2\}|$ . Enumérer les cartes planaires pointées non séparables de  $NS_{n+1}$  qui ont  $k+2$  sommets et dont la face distinguée est de degré  $k+2$  revient à énumérer les polygones à  $k+2$  sommets et possédant  $(n+1) - (k+2)$  arêtes intérieures ne se coupant pas. Ces objets sont en bijection avec les arbres planaires à  $n$  arêtes ( $n+1$  sommets) ayant  $k+1$  feuilles, donnant ainsi la distribution  $\beta$  sur les nombres de Catalan [8], soit  $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k}$ .

Par dualité, on a  $|\{c \in NS_{n+1} : df(c) = k+2, s(c) = k+2\}| = |\{c \in NS_{n+1} : ds(c) = k+2, f(c) = k+2\}|$ . On obtient ainsi le résultat annoncé, à savoir

$$|\{\pi \in S_n(2413, 41\bar{3}52) : sailld(\pi) = k+1, desc(\pi) = k\}| = \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k} \quad \square$$

### 3 Preuve de la conjecture de West

Dans cette partie, nous indiquons les différentes étapes qui constituent la preuve combinatoire de la conjecture de West sur l'énumération de la famille  $S_n(2341, 3\bar{5}241)$  des permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile.

Pour cette preuve, nous sommes amenés à considérer une suite de sept familles de permutations à motifs exclus qui permettent de relier combinatoirement les cartes planaires pointées non séparables à la famille  $S_n(2341, 3\bar{5}241)$  des permutations triables par deux passages dans une pile. Ces familles sont en bijection, soit parce qu'elles possèdent des arbres de génération isomorphes, soit parce qu'elles sont reliées par des bijections classiques sur les permutations comme le miroir (pour une permutation  $\pi$  de  $S_n$ , la permutation miroir de  $\pi$  est la permutation  $\pi^*$  telle que  $\pi^*(i) = \pi(n+1-i)$ ),

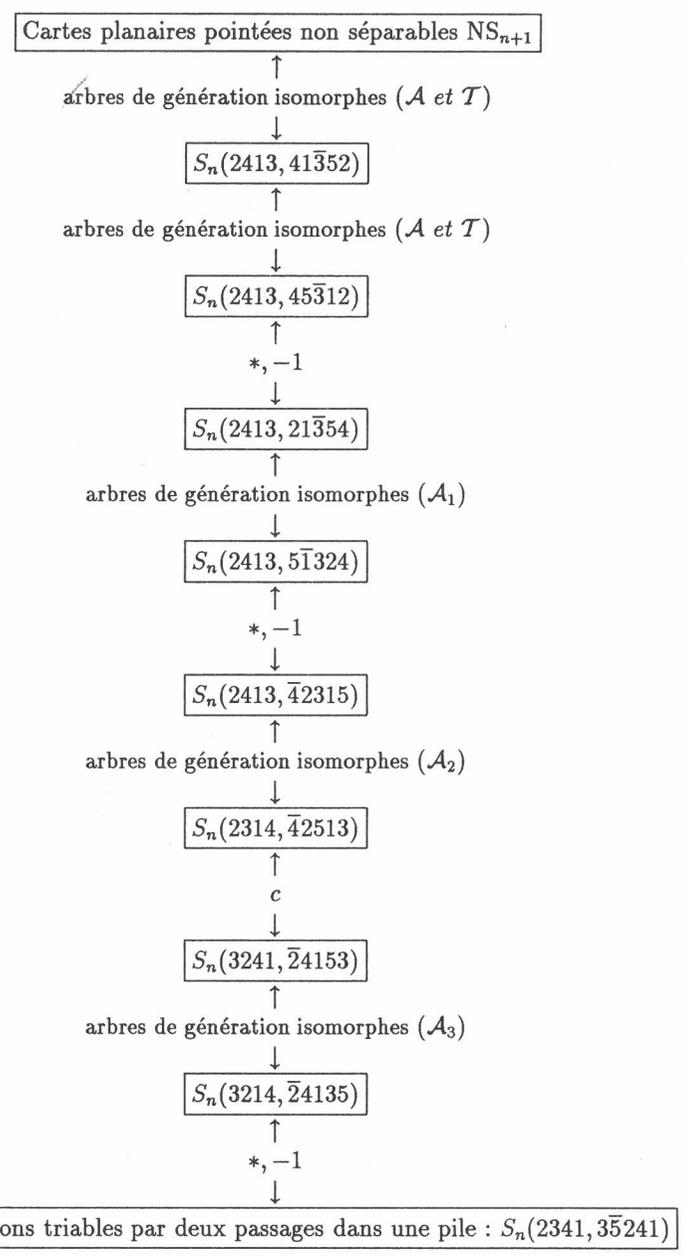


Figure 6: Des cartes planaires pointées non séparables aux permutations triables par deux passages dans une pile  $S_n(2341, 3\bar{5}241)$

le complémentaire ( $\pi^c(i) = n + 1 - \pi(i)$ ) ou l'inverse ( $\pi^{-1}(i) = j$  si et seulement si  $\pi(j) = i$ ). Le chemin conduisant à cette preuve est composé de quatre arbres de génération dont deux seulement sont identiques et passe par la famille  $S_n(2413, 41\bar{3}52)$  considérée dans ce travail (voir figure 6).

Une analyse des règles de construction de ces quatre arbres nous permet d'obtenir des formules analogues à celles obtenues ici et donnant les distributions de ces permutations suivant divers paramètres.

## Bibliographie

- [1] **W.G. Brown.** Enumeration of non separable planar maps, Can. J. Math. 15(1963), 526-545.
- [2] **W.G. Brown, W.T. Tutte.** On the enumeration of rooted non separable planar maps, Can. J. Math. 16(1964), 572-577.
- [3] **R. Cori.** Un code pour les graphes planaires et ses applications, Astérisque 27, Soc. Math. de France, 1975.
- [4] **R. Cori, B. Vauquelin.** Planar maps are well labeled trees, Can. J. Math. 33(1981), 1023-1042.
- [5] **S. Dulucq, S. Gire, O. Guibert.** Une preuve combinatoire de la conjecture de J. West, en préparation.
- [6] **P. Flajolet.** The evolution of two stacks in bounded space and random walks in a triangle, in "MFCS'86", J. Gruska, B. Rován, J. Wiedermann eds., Lecture Notes in Mathematics, num. 233, Springer Verlag 1986.
- [7] **D.E. Knuth.** The art of computer programming, vol 1, Addison-Wesley, Reading, 1973, 238-239.
- [8] **G. Kreweras.** Sur les éventails de segments, Cahiers du BURO, Paris n° 15 (1970), 1-41.
- [9] **A.B. Lehman, T.S. Walsh.** Counting rooted maps by genus I and II, J. Comb. Theory 13B(1972), 192-218 and 122-141.
- [10] **A.B. Lehman, T.S. Walsh.** Counting rooted maps by genus III : nonseparable maps, J. Comb. Theory 18B(1975), 222-259.
- [11] **R.C. Mullin.** The enumeration of Hamiltonian polygons in triangular maps, Pacific J. Math. 16(1966), 139-145.
- [12] **R. Simion, F. Schmidt.** Restricted permutations, Eur. J. of Combinatorics 6(1985), 383-406.
- [13] **Z. Stankova.** Forbidden subsequences, 1992, à paraître.
- [14] **W.T. Tutte.** A census of planar maps, Can. J. Math. 15(1963), 249-271.
- [15] **W.T. Tutte.** On the enumeration of planar maps, Bull. Amer. Math. Soc. 74(1968), 249-271.
- [16] **J. West.** Permutations with restricted subsequences and stack-sortable permutations, Ph.D. thesis, M.I.T. (1990)
- [17] **J. West.** Sorting twice through a stack, proc. of 3rd conf. on Formal power series and algebraic combinatorics, Bordeaux 1991, submitted to Theor. Comp. Sci.
- [18] **D. Zeilberger.** A proof of Julian West's conjecture that the number of two-stack-sortable permutations of length  $n$  is  $2(3n)!/((n+1)!(2n+1)!)$ , submitted to Disc. Math.

## Rat Races and the Hook Length Formula

HENRIK ERIKSSON

Department of Computing Science  
Royal Institute of Technology  
S-100 44 Stockholm, Sweden  
henrik@nada.kth.se

April 8, 1993

### Abstract

A bijective proof of the hook length formula is presented. This is the famous expression for the number of standard Young tableaux of a given shape. A variant of the Vandermonde determinant proves that the formula can be written as an alternating sum of multinomial coefficients that enumerate certain tableaux. An interpretation of these as describing rat races suggests a bijection that proves the formula.

**Key words.** Young tableau, hook length, Vandermonde, bijection.

## 1 Introduction

The well-known *hook length formula* by Frame, Robinson and Thrall [1] gives an extremely simple expression for the number of standard Young tableaux of a given shape  $\lambda \vdash n$ , namely  $n! / \prod h_{ij}$ , where the hook-length  $h_{ij}$  is the number of squares in the hook with lower left corner in square  $i, j$  (using Latin diagrammatic conventions). No really attractive combinatorial explanation of this formula is known. The proof presented in this note uses a rewriting of the formula as an alternating sum of multinomial coefficients. For the shape  $\lambda = (2, 2, 3)$  we get

$$\frac{7!}{(2 \cdot 1)(3 \cdot 2)(5 \cdot 4 \cdot 1)} = \binom{7}{2, 2, 3} - \binom{7}{1, 3, 3} + \binom{7}{0, 3, 4} - \binom{7}{2, 1, 4} + \binom{7}{1, 1, 5} - \binom{7}{0, 2, 5}$$

$$21 = 210 - 140 + 35 - 105 + 42 - 21$$

Here we interpret the multinomial coefficients as enumerating more general tableaux called *rat races* and we define an involution on rat races whose fixed points are precisely the standard Young tableaux.