

inverse  $n$ -cycles in  $Auto(\lambda, m, n)$ . Moreover since  $H$  is fixed, we must choose either  $\alpha_j$  or  $\alpha_j^{-1}$  but not both for any given  $j$ . Hence

$$\bar{\omega}_q(H\sigma_\pi) = \bar{\omega}_q(H\sigma_{\alpha_{j_1}^{\pm 1}}\sigma_{\alpha_{j_2}^{\pm 1}}\cdots\sigma_{\alpha_{j_k}^{\pm 1}}) = (-1)^k \bar{\omega}_q(H)$$

and finally, by Theorem 1.3, the coefficient

$$\begin{aligned} \langle S_\lambda(x), \prod_i \frac{1-x_i^n}{1-x_i^m} \rangle &= \sum_{H \in SRHT(\lambda)} \bar{\omega}_q(H) \\ &= \sum_{\pi \in Auto(\lambda, m, n)^+} \bar{\omega}_q(H\sigma_\pi) \\ &= \bar{\omega}_q(H) + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k; 1 \leq k \leq c} \bar{\omega}_q(H\sigma_{\alpha_{j_1}^{\pm 1}}\alpha_{j_2}^{\pm 1}\dots\alpha_{j_k}^{\pm 1}) \\ &= \sum_{k=0}^c (-1)^k \binom{c}{k} \bar{\omega}_q(H) \\ &= (1-1)^c \bar{\omega}_q(H) = 0 \end{aligned}$$

So, if there are more than one element in  $SRHT(\lambda, m, n)$ , then the weights will cancel out. We have thus shown that the series is multiplicity-free.

The series  $\prod_i \frac{1-x_i^n}{1+x_i^m}$ ,  $\prod_i \frac{1+x_i^n}{1+x_i^m}$ , and  $\prod_i \frac{1+x_i^n}{1-x_i^m}$  can be analyzed in similar manner.

## References

- [1] A. Berele and J.B. Remmel, *Hook flag characters and their combinatorics*, J. of Pure and Applied Algebra, **35**, 225-245 (1985).
- [2] O. Eggecioglu and J.B. Remmel, *A Combinatorial Interpretation of the Inverse Kostka Matrix*, Linear and Multilinear Algebra, **26**, 59-84 (1990).
- [3] D. E. Littlewood, *The Theory of Group Characters*, 2nd edition, Oxford University Press, Oxford (1950).
- [4] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Clarendon Press, Oxford (1979).
- [5] J.B. Remmel and M. Yang, *Special Rim Hook Tabloids and Some New Multiplicity-free S-series*, SIAM J. Disc. Math. **4**, pp. 253-274, 1991

# THÉORIE COMBINATOIRE DES T-FRACTIONS ET APPROXIMANTS DE PADE EN DEUX POINTS

Emmanuel ROBLET et Xavier Gérard VIENNOT<sup>1</sup>

LaBRI, Université Bordeaux-I  
F-33405 Talence cedex, France.

## INTRODUCTION

Nous présentons un modèle combinatoire pour les fractions continues de Thron [Th], ou T-fractions, qui s'écrivent sous la forme

$$\frac{1}{1-b_1t-} \frac{\lambda_1 t}{1-b_2t-} \cdots \frac{\lambda_k t}{1-b_{k+1}t-} \cdots \quad (1)$$

Ces fractions sont moins connues que les fractions continues de Jacobi ou de Stieltjes, dont les formes générales sont respectivement

$$J(t) = \frac{1}{1-b_0t-} \frac{\lambda_1 t^2}{1-b_1t-} \cdots \frac{\lambda_k t^2}{1-b_kt-} \cdots \quad \text{et} \quad S(t) = \frac{1}{1-} \frac{\lambda_1 t}{1-} \cdots \frac{\lambda_k t}{1-} \cdots \quad (2)$$

L'interprétation combinatoire des fractions de Jacobi et de Stieltjes a été initiée par Flajolet [Fl] avec des chemins valués dans le plan discret  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  (respectivement appelés chemins de Motzkin et chemins de Dyck) et est devenue un sujet classique (voir par exemple [Fr-Vi], [Go-Ja], [Vi]).

Dans le modèle développé en section 1 pour les T-fractions, nous utilisons à nouveau des chemins de Dyck valués, mais avec une règle de valuation différente de celle correspondant aux fractions de Stieltjes.

Si les réduites successives des fractions continues de Jacobi ou de Stieltjes fournissent des approximants de Padé "classiques", celles des T-fractions conduisent à des *approximants de Padé en deux points*, auxquels est consacrée la section 2. La notion de T-fraction *duale* d'une T-fraction apparaît alors naturellement et soulève de nouveaux problèmes combinatoires. Un exemple de cette dualité est donné à la section 4, qui conduit à de surprenants rapprochements relatifs à l'énumération de figures planaires appelés *polyominoes*.

Enfin, en section 3, nous interprétons combinatoirement des développements en T-fraction relatifs à certaines séries hypergéométriques et à leurs  $q$ -analogues. Nous retrouvons ainsi des résultats de Dumont, Kreweras [Du-Kr] et Zeng [Ze]. L'interprétation repose sur une bijection entre permutations et certaines *histoires* combinatoires. Cette nouvelle bijection, exposée au paragraphe 3.1, joue pour les T-fractions le même rôle que celle de Françon et Viennot [Fr-Vi] pour les fractions de Jacobi et que celle de Foata et Zeilberger [Fo-Ze] pour les fractions de Stieltjes (voir [dM-Vi]).

Nous adoptons pour les fractions continues la notation "horizontale" utilisée par Jones et Thron dans [Jo-Th] : ainsi, l'écriture

$$\frac{a_0}{b_1+} \frac{a_1}{b_2+} \cdots \frac{a_{n-1}}{b_n+} (\cdots) \quad (3)$$

désigne la fraction continue (finie ou infinie)

<sup>1</sup>Travail rédigé lors d'un séjour au LACIM, Université du Québec à Montréal, grâce à une bourse de la coopération franco-québécoise.

$$\frac{a_0}{b_1 + \frac{a_1}{b_2 + \frac{a_2}{\dots + \frac{a_{n-1}}{b_n + (\dots)}}}} \quad (4)$$

## 1 CHEMINS DE DYCK ET T-FRACTIONS.

### 1.1 Le modèle combinatoire.

Un chemin de Dyck est un chemin sur  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  d'origine  $(0,0)$ , de fin  $(2n,0)$  où  $n$  est un entier positif et dont les pas sont de deux sortes : *pas montants* ou *nord-est* et *pas descendants* ou *sud-est* comme l'indique la figure 1. La quantité  $2n$  est la *longueur* de  $\omega$  et nous la notons  $|\omega|$ . Un chemin de Dyck *premier* est un chemin de Dyck de longueur strictement positive dont les seuls sommets d'ordonnée nulle sont ses extrémités. Un *pic* d'un chemin de Dyck  $\omega$  est un sommet de  $\omega$  commun à un pas montant et un pas descendant consécutifs.

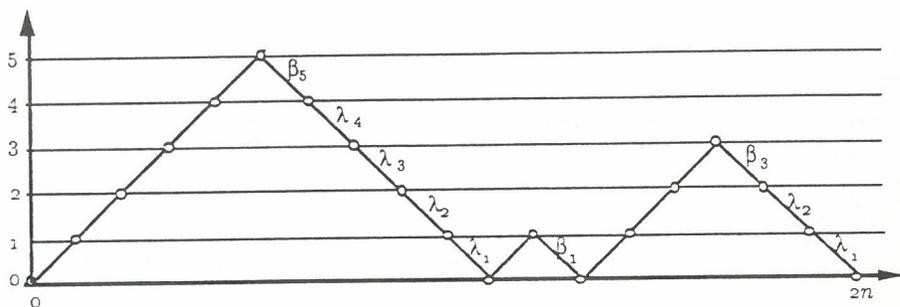


Figure 1 : un chemin de Dyck valué par  $\lambda$  et  $\beta$ .

Soient  $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 1}$  et  $\beta = (\beta_k)_{k \geq 1}$  deux suites d'éléments d'un corps commutatif  $K$ . Nous posons  $b_k = \beta_k - \lambda_k$ , définissant ainsi la suite  $b$ . Au cours de ce paragraphe, nous supposons que les  $\lambda_k$  et les  $\beta_k$  sont des indéterminées, c'est-à-dire que  $K$  est le corps des fractions  $\mathbb{Q}((\lambda_k)_{k \geq 1}, (\beta_k)_{k \geq 1})$ . Soit  $\xi$  un pas d'un chemin de Dyck  $\omega$  dont l'ordonnée de l'origine est  $k$ ; nous définissons la valuation de  $\xi$  comme suit :

$$v(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \text{ est un pas montant,} \\ \beta_k & \text{si } \xi \text{ est un pas descendant et est adjacent à un pic,} \\ \lambda_k & \text{si } \xi \text{ est un pas descendant et n'est pas adjacent à un pic.} \end{cases} \quad (5)$$

La valuation de  $\omega$ , notée  $v(\omega)$ , est par définition le produit des valuations de ses pas; nous convenons que la valuation du chemin de longueur nulle est 1. La série génératrice des chemins de Dyck ainsi valués est

$$D(\lambda, \beta; t) = \sum v(\omega) t^{|\omega|/2}, \quad (6)$$

où la somme porte sur tous les chemins de Dyck. Nous abrègerons parfois  $D(\lambda, \beta; t)$  en  $D(t)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Nous appelons  $\delta$  la *translation à gauche* définie sur l'ensemble des suites : si  $a = (a_n)_{n \geq 1}$  est une suite, le  $n$ -ième terme de la suite  $\delta a$  est  $a_{n+1}$ . Nous notons  $\delta v$  la valuation associée aux suites  $\delta \lambda$  et  $\delta \beta$  et  $\delta D(\lambda, \beta; t)$  ou  $\delta D(t)$  la série formelle  $D(\delta \lambda, \delta \beta; t)$ . Enfin, pour un nombre entier  $k$ , nous désignons par  $D_k(\lambda, \beta; t)$  la série génératrice des chemins de Dyck dont tous les sommets ont une ordonnée inférieure ou égale à  $k$ ; nous dirons que ces chemins sont *bornés au niveau  $k$* .

**Proposition 1.** — 1) La série  $D_k(t)$  est une fraction rationnelle et elle vaut :

$$D_k(t) = \frac{1}{1 - (\beta_1 - \lambda_1)t} \frac{\lambda_1 t}{1 - (\beta_2 - \lambda_2)t} \dots \frac{\lambda_{k-1} t}{1 - (\beta_k - \lambda_k)t - \lambda_k t}. \quad (7)$$

Le degré du numérateur de  $D_k(t)$  est  $k-1$  et celui de son dénominateur est  $k$ .

2) L'approximation suivante est vérifiée en  $t=0$  :

$$D(t) = D_k(t) + o(t^k), \quad (8)$$

c'est-à-dire que les premiers termes des séries  $D(t)$  et  $D_k(t)$  coïncident jusqu'au degré  $k$ .

3) La série  $D(t)$  admet le développement en *T-fraction* :

$$D(t) = \frac{1}{1 - b_1 t} \frac{\lambda_1 t}{1 - b_2 t} \dots \frac{\lambda_{k-1} t}{1 - b_k t} \dots \quad (9)$$

**Démonstration :** 1) tout chemin de Dyck se décompose de façon unique en produit de chemins de Dyck premiers. Nous en déduisons l'égalité

$$D(t) = \frac{1}{1 - u(t)}, \quad (10)$$

où  $u(t)$  est la série génératrice des chemins de Dyck premiers. Examinons la structure de ces derniers. Si  $\omega$  est premier, on a l'alternative suivante :

- ou bien  $|\omega| = 2$  et l'on a  $v(\omega) = \beta_1$ ;
  - ou bien  $|\omega| > 2$  et  $\omega = \xi \eta \bar{\xi}$  où  $\xi$  est un pas montant,  $\bar{\xi}$  un pas descendant et  $\eta$  un chemin de Dyck *non vide* translaté verticalement d'une unité; de plus, on a  $|\eta| = |\omega| - 2$  et  $v(\omega) = \lambda_1 \delta v(\eta)$ .
- Par conséquent, la série  $u(t)$  vaut  $\beta_1 t + \lambda_1 t (\delta D(t) - 1)$ . Grâce à l'égalité (10) et à un raisonnement par récurrence, nous obtenons, pour tout nombre entier  $k \geq 1$  :

$$D(t) = \frac{1}{1 - (\beta_1 - \lambda_1)t} \frac{\lambda_1 t}{1 - (\beta_2 - \lambda_2)t} \dots \frac{\lambda_{k-1} t}{1 - (\beta_k - \lambda_k)t - \lambda_k t \delta^k D(t)}. \quad (11)$$

Il suffit ensuite de constater que substituer  $\lambda_{k+1}$  et  $\beta_{k+1}$  par 0 (c'est-à-dire borner les chemins de Dyck au niveau  $k$ ) transforme  $D(t)$  en  $D_k(t)$  et  $\delta^k D(t)$  en 1. Nous en déduisons l'expression (7). Le résultat portant sur les degrés se démontre aisément par récurrence.

2) Il suffit de comparer l'ensemble des chemins de Dyck bornés au niveau  $k$  de longueur inférieure ou égale à  $2k$  à l'ensemble des chemins de Dyck (sans restriction) de longueur inférieure ou égale à  $2k$ . Remarquons que l'approximation (8) est optimale car les coefficients  $\lambda_k$  et  $\beta_k$  sont ici des indéterminées. Par suite, les fractions rationnelles  $D_k(t)$  ne sont pas des approximations de Padé de la série  $D(t)$ . Nous examinerons plus en détail ces propriétés d'approximation à la section 2.

3) Résulte de (7) et (8). La fraction rationnelle  $D_k(t)$  s'appelle la *réduite d'ordre  $k$*  de la fraction continue (9).

## 1.2 L'exemple des histoires d'Hermite restreintes.

Une histoire d'Hermite est un couple  $(\omega, \mathbf{p})$  constitué d'un chemin de Dyck  $\omega$  et d'un  $2n$ -uplet  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2n})$  de nombres entiers, appelés choix. La valeur de  $p_i$  dépend du  $i$ -ème pas  $\xi_i$  de  $\omega$ , de la façon suivante :

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_i \text{ est un pas montant,} \\ 1, 2, \dots, k & \text{si } \xi_i \text{ est un pas descendant dont l'ordonnée de l'origine est } k. \end{cases} \quad (12)$$

La longueur d'une histoire d'Hermite est par définition celle de son chemin de Dyck. Introduite par Flajolet, Françon, Viennot et Vuillemin dans [Fl-Fr-Vu] et [Fr-Vi], la notion d'histoire est utilisée par Viennot dans la théorie combinatoire des polynômes orthogonaux de Sheffer. En particulier (voir [Vi]), le nombre d'histoires d'Hermite de longueur  $2n$  est égal au moment d'ordre  $2n$  des polynômes d'Hermite, c'est-à-dire  $1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)$ , qui est aussi le nombre d'involutions sans points fixes sur  $2n$  éléments. D'après le paragraphe 1.1, ce nombre est aussi égal au coefficient de  $t^n$  dans  $D(\lambda, \beta; t)$ , où les suites sont données par  $\lambda_k = \beta_k = k$  pour tout entier  $k \geq 1$ . Voyons maintenant un cas où  $\lambda$  et  $\beta$  sont deux suites distinctes.

Nous dirons qu'une histoire d'Hermite est *restreinte* si elle vérifie la condition supplémentaire suivante : pour tout pas descendant  $\xi_i$  adjacent à un pic, le choix  $p_i$  vaut 1. Le nombre  $h_n$  d'histoires d'Hermite restreintes de longueur  $2n$  est le coefficient de  $t^n$  dans  $D(\lambda, \beta; t)$ , où  $\lambda_k = k$  et  $\beta_k = 1$  pour tout entier  $k \geq 1$ . La série  $H(t) = \sum_{n \geq 0} h_n t^n$  admet donc le développement en T-fraction suivant :

$$H(t) = \frac{1}{1-0t-} \frac{1t}{1-1t-} \frac{2t}{1-2t-} \dots \frac{kt}{1-kt-} \dots \quad (13)$$

Le lecteur muni d'un crayon ou de son logiciel de calcul formel favori pourra vérifier que  $h_n = n!$  pour les premières valeurs de  $n$ . Cette égalité sera démontrée bijectivement à la section 3.

## 2 DUALITÉ DES T-FRACTIONS ET APPROXIMANTS DE PADÉ EN DEUX POINTS.

Nous supposons dans ce paragraphe que  $K = \mathbb{C}$ . Nous fixons deux suites de nombres complexes  $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 1}$  et  $\beta = (\beta_k)_{k \geq 1}$ . Nous supposons que les éléments de la suite  $b$  définie par  $b_k = \beta_k - \lambda_k$  sont tous non nuls. Nous notons  $\mathcal{L}$  l'application qui fait correspondre, au couple  $(\lambda, \beta)$ , le couple  $(\lambda, b)$ .

Un calcul élémentaire montre qu'une série formelle  $1 + \sum_{n \geq 1} c_n t^n$  admet une infinité de développements en T-fraction. Pour déterminer de façon unique une T-fraction, il faut donc une contrainte plus forte que l'approximation (8). McCabe et Murphy [Mc-Mu] en 1976, puis Jones et Thron [Jo-Th 1] en 1977, ont établi le lien entre ce problème et la théorie des approximants de Padé en deux points; on pourra se reporter à [Jo-Th 2] pour une présentation complète. Nous aurons seulement besoin de la définition suivante.

**Définition 2.**— Soient  $(T, L)$  un couple constitué d'une série de Taylor de la variable  $t$  et d'une série de Taylor de la variable  $t^{-1}$  données par :

$$T(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} c_n t^n \quad \text{et} \quad L(t) = \sum_{n \leq -1} c_n t^n. \quad (14)$$

Une fraction rationnelle  $F(t) = P(t)/Q(t)$  est un approximant de Padé en deux points d'ordre  $k$  du couple  $(T, L)$  si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- les degrés vérifient  $d^\circ P \leq k-1$  et  $d^\circ Q \leq k$ ; (15)

- en  $t = 0$ , on a l'approximation  $T(t) = F(t) + o(t^k)$ ; (16)

- en  $t = \infty$ , on a l'approximation  $L(t) = F(t) + o(t^{-k})$ . (17)

On peut vérifier que si une telle fraction rationnelle existe, elle est unique, et que  $P(t)$  et  $Q(t)$  sont déterminés à une même constante multiplicative près [Jo-Th 2]. Nous rappelons qu'une fraction rationnelle  $F$ , vérifiant la condition (15), est un approximant de Padé "classique" d'une série  $S$  si  $S(t) = F(t) + o(t^{2k-1})$  en  $t = 0$ .

Nous nous intéressons maintenant à la question suivante : les fractions rationnelles  $D_k(t)$  introduites au paragraphe 1.1 forment-elles la suite des approximants de Padé en deux points d'un couple de séries formelles? À cette fin, nous allons examiner le comportement de  $D_k(t)$  au voisinage de l'infini en évaluant  $D_k(t^{-1})$ . Nous aurons besoin de quelques notations. Définissons tout d'abord les deux suites  $\gamma = (\gamma_k)_{k \geq 1}$  et  $a = (a_k)_{k \geq 1}$  par

$$\gamma_k = \frac{\lambda_k}{b_k b_{k+1}} \quad \text{et} \quad a_k = \frac{1}{b_k}. \quad (18)$$

Nous notons  $\mathcal{J}$  l'application qui envoie le couple  $(\lambda, b)$  sur le couple  $(\gamma, a)$ . Définissons le couple  $(\gamma, \alpha)$  par

$$(\gamma, \alpha) = \mathcal{L}^{-1}(\gamma, a) = (\mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{L})(\lambda, \beta). \quad (19)$$

Remarquons que l'application  $\mathcal{J}$  — et par suite l'application  $\mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{L}$  — est une involution. La relation ci-dessus est donc symétrique par rapport aux couples  $(\lambda, \beta)$  et  $(\gamma, \alpha)$ . Grâce à l'expression (7) et aux notations (18), nous obtenons :

$$D_k(t^{-1}) = \frac{-a_1 t}{1-a_1 t-} \frac{\gamma_1 t}{1-a_2 t-} \dots \frac{\gamma_{k-1} t}{1-a_k t + \gamma_k b_{k+1} t}. \quad (20)$$

Nous sommes donc amenés à considérer la série génératrice  $D(\gamma, \alpha; t)$  (resp. la série  $D_k(\gamma, \alpha; t)$ ) des chemins de Dyck (resp. des chemins de Dyck bornés au niveau  $k$ ). Ces chemins sont valués par les suites  $\gamma$  et  $\alpha$  de la même façon qu'au paragraphe 1.1 : les pas montants sont valués 1 et, pour  $k \geq 1$ , un pas descendant dont l'ordonnée de l'origine vaut  $k$  est valué  $\alpha_k$  ou  $\gamma_k$  selon qu'il est ou non adjacent à un pic. La valuation correspondante des chemins de Dyck sera notée  $v^*$ . Voici écrites explicitement les formules résultant de (19) pour  $k \geq 1$  :

$$\gamma_k = \frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \beta_k)(\lambda_{k+1} - \beta_{k+1})} \quad \text{et} \quad \alpha_k = \frac{\lambda_k - \lambda_{k+1} + \beta_k}{(\lambda_k - \beta_k)(\lambda_{k+1} - \beta_{k+1})}. \quad (21)$$

**Définition 3.**— Lorsque les suites  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\lambda$  sont liées par la relation (19), on dit que  $D(\lambda, \beta; t)$  et  $D(\gamma, \beta; t)$  sont des T-fractions duales.

Le caractère involutif de l'application  $\mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{L}$  justifie la terminologie employée : la dualité est une relation symétrique sur les T-fractions. Nous utiliserons la notation  $D^*(\lambda, \beta; t)$  ou plus simplement  $D^*(t)$  pour désigner la série  $D(\gamma, \alpha; t)$ .

**Théorème 4 (Jones, Thron, McCabe, Murphy).**— Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\lambda$  quatre suites de nombres complexes satisfaisant aux hypothèses mentionnées au début de cette section et vérifiant la relation (19). Nous rappelons que  $a_1 = (\beta_1 - \lambda_1)^{-1}$ . Alors, pour tout entier  $k \geq 1$ , la fraction rationnelle  $D_k(\lambda, \beta; t)$  est l'approximant de Padé en deux points d'ordre  $k$  du couple  $(D(t), -a_1 t^{-1} D^*(t^{-1}))$ .

**Démonstration :** nous savons déjà que les conditions (15) et (16) sont remplies. Comme au paragraphe 1.1, l'interprétation de  $D^*(t)$  et de  $D_k^*(t)$  en termes de séries génératrices de chemins valués fournit l'approximation  $D^*(t) = D_k^*(t) + o(t^k)$  au voisinage de  $t = 0$ . Autrement dit, nous avons prouvé que  $D^*(t^{-1}) = D_k^*(t^{-1}) + o(t^{-k})$  au voisinage de  $t = \infty$ . On prouve ensuite que

$$D_k^*(t) = \frac{1}{1 - a_1 t} \frac{\gamma_1 t}{1 - a_2 t} \cdots \frac{\gamma_{k-1} t}{1 - a_k t - \gamma_k t}, \quad (22)$$

et que  $D^*(t)$  admet le développement suivant en T-fraction :

$$D^*(t) = \frac{1}{1 - (\alpha_1 - \gamma_1)t} \frac{\gamma_1 t}{1 - (\alpha_2 - \gamma_2)t} \cdots \frac{\gamma_k t}{1 - (\alpha_{k+1} - \gamma_{k+1})t} \cdots \quad (23)$$

La comparaison des fractions (20) et (22) montre que  $D_k(t^{-1}) = -a_1 t D_k^*(t) + o(t^k)$  au voisinage de  $t = 0$ , ou encore que  $D_k(t) = -a_1 t^{-1} D_k^*(t^{-1}) + o(t^{-k})$  au voisinage de  $t = \infty$ . La condition (17) est alors remplie et le théorème 4 est démontré.

Il est possible [Ro] de déduire de ce modèle un algorithme qui, étant donné un couple de séries formelles  $(T, L)$  satisfaisant aux conditions de la définition 2, calcule les coefficients des développements de  $T$  et  $L$  en fractions de Thron duales et, par conséquent, calcule les approximants de Padé en deux points du couple  $(T, L)$ . Cet algorithme effectue un nombre de divisions de l'ordre de  $\mathcal{O}(k)$  pour déterminer les coefficients  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, b_1, \dots, b_k$  à partir de ceux des séries  $T$  et  $L$ . Il est donc plus stable que le FG-algorithme, exposé par exemple dans [Jo-Th], qui nécessite un nombre de divisions de l'ordre de  $\mathcal{O}(k^2)$ , pour les mêmes résultats.

### 3 UNE BIJECTION ENTRE PERMUTATIONS ET HISTOIRES D'HERMITE RESTREINTES.

On connaît déjà deux bijections entre les permutations et des histoires de Laguerre : celle de Françon et Viennot ([Fr-Vi] et [Vi]) et celle de Foata et Zeilberger ([Fo-Ze]). Lorsque l'on s'intéresse à la théorie combinatoire des fractions continues, on peut dire que la première bijection est adaptée aux fractions de Jacobi et la seconde aux fractions de Stieltjes (voir [dM] et [dM-Vi]). Nous en présentons ici une troisième.

#### 3.1 La bijection.

Nous la décomposons en trois étapes. Soit  $\sigma$  une permutation des éléments de l'ensemble  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  écrite sous forme de mot  $x_1 \dots x_n$ . La lettre  $x_i$  est un élément saillant supérieur gauche (resp. saillant inférieur droit) de  $\sigma$ , ou record (resp. anti-record) dans la terminologie de Dumont et Kreweras [Du-Kr], si  $x_j \leq x_i$  pour  $j \leq i$  (resp. si  $x_j \geq x_i$  pour  $j \geq i$ ). Nous illustrerons la description qui va suivre par l'exemple suivant, où  $n = 9$  :

$$\sigma_0 = \bar{2} \ \bar{5} \ 4 \ 3 \ \underline{1} \ \underline{6} \ \underline{9} \ 8 \ \underline{7}. \quad (24)$$

Nous avons souligné les éléments saillants inférieurs droits et surligné les éléments saillants supérieurs gauches de  $\sigma_0$ . À la figure 2, nous avons signalé par des cercles (resp. des croix) les éléments saillants supérieurs gauches (resp. inférieurs droits) de  $\sigma_0$ .

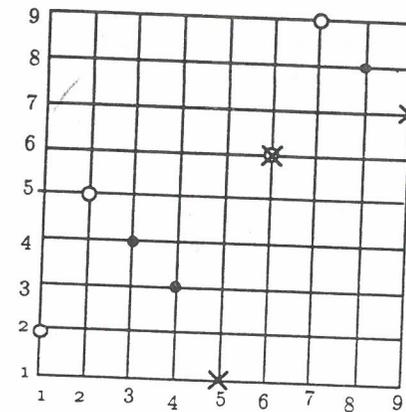


Figure 2 : éléments saillants de  $\sigma_0$ .

**Étape A.** Nous notons  $i_1, \dots, i_r$  les positions des éléments saillants inférieurs droits de  $\sigma$  et  $u_1 \dots u_r$  la décomposition de  $\sigma$  telle que la dernière lettre du mot  $u_j$  soit  $x_{i_j}$ . Nous définissons les mots  $v_1, \dots, v_r$  par

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \ 2 \ \dots \ (x_{i_2} - 1), \\ v_2 &= x_{i_2} \ (x_{i_2} + 1) \ \dots \ (x_{i_3} - 1), \\ &\vdots \\ v_r &= x_{i_r} \ (x_{i_r} + 1) \ \dots \ n, \end{aligned} \quad (25)$$

de sorte que le produit  $v_1 v_2 \dots v_r$  soit égal à  $1 \ 2 \ \dots \ n$ . Enfin nous posons

$$\mu = A(\sigma) = u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_r v_r. \quad (26)$$

Parmi les mots de  $2n$  lettres sur l'alphabet  $[n]$ , les mots  $A(\sigma)$  sont caractérisés par les trois propriétés suivantes :

- ils contiennent exactement deux occurrences de chaque élément  $x$  de  $[n]$ ;
- le sous mot constitué des secondes occurrences des éléments de  $[n]$  est  $1 \ 2 \ \dots \ n$ , ce qui permet de définir la décomposition (26) de  $A(\sigma)$ ;
- dans la décomposition précédente, la dernière lettre d'un mot  $u_j$  est identique à la première du mot  $v_j$ .

Exemple :  $m_0 = A(\sigma_0) = 2 \ 5 \ 4 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 6 \ 9 \ 8 \ 7 \ 7 \ 8 \ 9$ .

Cette caractérisation prouve le caractère bijectif de  $A$  et met en évidence l'application inverse  $A^{-1}$ .

**Étape B.** Nous définissons une involution sans point fixe  $I = B(\mu)$  sur l'ensemble  $[2n]$  de la façon suivante : le couple  $(j, k)$  forme un cycle de  $I$  si une même lettre occupe les positions  $j$  et  $k$  dans le mot  $\mu$ . Nous dirons alors que cette lettre correspond au cycle  $(j, k)$ . Nous donnons ci-dessous la représentation graphique, sous forme d'arcs, de  $I_0 = B(\mu_0)$ .

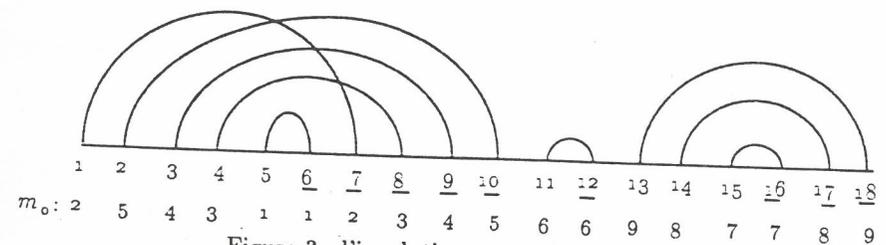


Figure 3 : l'involution sans point fixe  $I_0$ .

Si  $(j, k)$  est un cycle d'une involution avec  $j < k$ , la position  $j$  est appelée une *ouverture* et la position  $k$  une *fermeture*. Nous donnons la définition récursive suivante : une fermeture  $k$  d'une involution  $\tau$  est *bonne* si  $(k-1, k)$  est un cycle de  $\tau$  ou si  $k-1$  est une bonne fermeture. À la figure 2, nous avons souligné les positions de  $I_0$  qui sont des bonnes fermetures.

Il est aisé de vérifier que, parmi les involutions sans point fixe sur  $[2n]$ , les involutions  $B(A(\sigma))$  sont celles dont toutes les fermetures sont bonnes. Soit  $I$  une telle involution, définie par ses cycles  $(j_1, k_1), \dots, (j_n, k_n)$  avec  $k_1 < \dots < k_n$  et  $j_l < k_l$  pour tout  $l$ . Soit  $\mu = \mu_1 \dots \mu_{2n}$  le mot défini par  $\mu_r = l$  si  $r = j_l$  ou si  $r = k_l$ . Le lecteur pourra vérifier que l'application  $I \rightarrow \mu$  ainsi définie est l'inverse de l'application  $B$ .

**Étape C.** Elle se déduit de la bijection usuelle de Françon et Viennot entre permutations et histoires de Laguerre (voir [Fr-Vi]). Donnons en une description directe :  $C(I)$  est l'histoire d'Hermite  $(\omega, p)$  où la succession des pas montants et descendants de  $\omega$  correspondent à la succession des ouvertures et des fermetures de  $I$ . Les choix peuvent être définis de la façon suivante : si  $(j, k)$  est un cycle de  $I$ ,  $p_j$  vaut 1 et

$$p_k = 1 + |\{l \in [2n], j < l < k \text{ et } I(l) > k\}|. \quad (27)$$

Autrement dit,  $p_k - 1$  est le nombre d'arcs  $(l, m)$  de  $I$  croisés avec l'arc  $(j, k)$ , c'est-à-dire tels que  $j < l < k < m$ . Si la lettre  $x$  correspond au cycle  $(j, k)$  (voir l'étape B), nous dirons encore qu'elle correspond au  $k$ -ième pas de  $\omega$  et au choix  $p_k$ .

Dans la figure 4 ci-dessous, les nombres indiqués sous le chemin de Dyck sont les choix associés aux pas descendants.

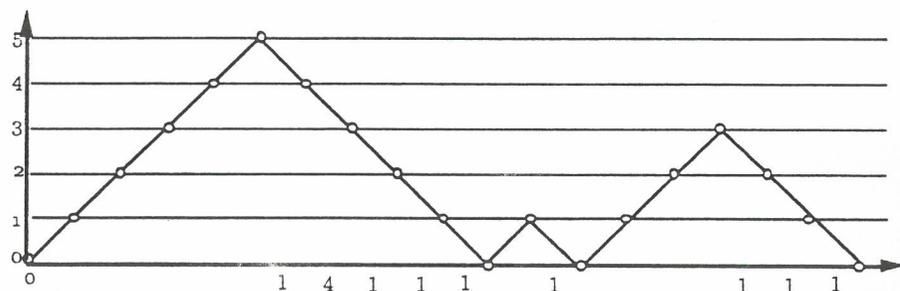


Figure 4 : l'histoire d'Hermite restreinte  $C(I_0)$ .

Il est utile de penser aux étapes B et C comme à un processus dynamique : en lisant le mot  $A(\sigma)$  de gauche à droite, on ouvre des arcs pour chaque lettre d'un mot  $u_i$  et on referme certains arcs pour chaque lettre d'un mot  $v_i$ . Lors d'une telle fermeture — supposée se produire en position  $k \in [2n]$  — un ou plusieurs arcs encore ouverts à gauche de  $k$  se présentent; on les numérote 1, 2, ..., de droite à gauche, de sorte que l'arc ouvert le plus proche porte le numéro 1. Le nombre  $p_k$  est alors le numéro de l'arc ouvert que l'on choisit de refermer. On trouvera ci-dessous, pour  $k = 7$ , un "instantané" de ce processus appliqué à la permutation  $\sigma_0$ .

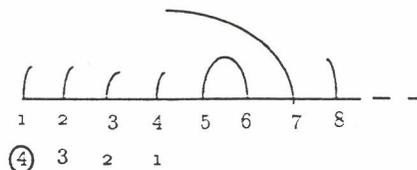


Figure 5 : le choix  $p_7$  vaut 4.

Soit  $h = (\omega, p)$  une histoire d'Hermite restreinte. Notons  $k_1 < \dots < k_n$  les positions des pas descendants du chemin de Dyck  $\omega$  et posons  $A_1 = [2n] \setminus \{k_1, \dots, k_n\}$ . Définissons les parties  $A_2, \dots, A_n$  ainsi que les nombres  $j_1, \dots, j_n$  par la récurrence suivante :

$$j_l = \max(A_l \cap [k_l]) - p_l + 1 \text{ et } A_{l+1} = A_l \setminus \{j_l\}. \quad (28)$$

Définissons l'involution sans point fixe  $I$  dont les cycles sont  $(j_1, k_1), \dots, (j_n, k_n)$ . Grâce à l'interprétation dynamique présentée ci-dessus, le lecteur pourra vérifier que l'application  $h \rightarrow I$  ainsi définie est l'inverse de l'application  $C$ .

Nous allons maintenant rassembler les propriétés des applications  $A, B$  et  $C$ . Rappelons qu'une permutation  $\sigma$  sur  $[n]$  est dite *connexe* si, pour tout entier  $m$  tel que  $1 \leq m < n$ , la restriction de  $\sigma$  à  $[m]$  n'induit pas une permutation. Nous dirons que la lettre  $x$  du mot  $\sigma$  présente  $h$  inversions s'il existe exactement  $h$  lettres strictement plus grandes que  $x$  situées à la droite de  $x$  dans  $\sigma$ .

**Théorème 5.** — Soit  $\psi$  l'application  $C \circ B \circ A$ . Soient  $\sigma$  une permutation sur  $[n]$  et  $x$  une lettre du mot  $\sigma$ . Notons  $\xi$  (resp.  $p$ ) le pas descendant (resp. le choix) qui correspond à  $x$  dans  $\psi(\sigma) = (\omega, p)$ . Notons enfin  $k$  l'ordonnée de l'origine du pas  $\xi$ .

- 1) L'application  $\psi$  définit une bijection entre les permutations sur  $[n]$  et les histoires d'Hermite restreintes de longueur  $2n$ .
- 2) La permutation  $\sigma$  est connexe si, et seulement si, le chemin de Dyck  $\omega$  est premier.
- 3) La lettre  $x$  est un élément saillant inférieur droit si, et seulement si, le pas  $\xi$  est adjacent à un pic de  $\omega$ .
- 4) La lettre  $x$  présente  $h$  inversions si, et seulement si, le choix  $p$  est égal à  $k - h$ .
- 5) La lettre  $x$  est un élément saillant supérieur gauche de  $\sigma$  si, et seulement si, le choix  $p$  est égal à  $k$ .

**Démonstration :** 1) Nous avons en effet prouvé, au fur et à mesure de la construction de  $\psi$ , le caractère bijectif de chacune des étapes  $A, B$  et  $C$ .

2) Supposons que  $\sigma$  ne soit pas connexe et appelons  $m$  le plus petit entier tel que  $1 \leq m < n$  et que la restriction de  $\sigma$  à  $[m]$  soit une permutation. Notons  $\sigma_1$  cette restriction,  $\sigma_2$  la restriction de  $\sigma$  à  $\{m+1, \dots, n\}$  et, avec un abus de notation légitime,  $\psi(\sigma_i) = (\omega_i, \bar{p}_i)$  pour  $i = 1, 2$ . Alors  $m$  est un élément saillant inférieur droit de  $\sigma$ , le mot  $A(\sigma)$  est égal au produit  $A(\sigma_1)A(\sigma_2)$  et  $\omega = \omega_1\omega_2$  n'est pas premier. La réciproque se démontre aisément.

3) Supposons que la lettre  $x$  soit un élément saillant inférieur droit. Le mot  $A(\sigma)$  s'écrit alors  $[\dots]xx[\dots]$  et, par suite, il existe une position  $j \in [2n]$  telle que  $(j-1, j)$  soit un cycle de  $B \circ A(\sigma)$  et telle que  $x$  corresponde à  $(j-1, j)$ . Le pas descendant  $\xi$  est donc précédé d'un pas montant, c'est-à-dire que  $\xi$  est adjacent à un pic. De plus, le nombre d'arcs de  $B \circ A(\sigma)$  enchevêtrés avec  $(j-1, j)$  est nul; par suite, le choix  $p$  vaut 1. La réciproque est laissée au lecteur.

4) Nous utilisons ici l'interprétation dynamique des  $p_i$  :  
la lettre  $x$  présente  $h$  inversions;  
 $\Leftrightarrow$  il existe exactement  $h$  lettres  $y > x$  à gauche de  $x$  dans le mot  $\sigma$ ;  
 $\Leftrightarrow$  il existe exactement  $h$  lettres  $y > x$  de part et d'autre des deux occurrences de  $x$  dans le mot  $A(\sigma)$ ;  
 $\Leftrightarrow$  il existe exactement  $h$  arcs de  $B \circ A(\sigma)$  qui recouvrent l'arc auquel  $x$  correspond;  
 $\Leftrightarrow$  le choix  $p$  vaut  $k - h$ .

5) Faire  $h = 0$  dans la démonstration ci-dessus.

Nous déduisons du point 1) du théorème ci-dessus l'égalité  $h_n = n!$  annoncée à la fin de la section 1.

### 3.2 Séries génératrices et T-fractions.

Pour une permutation  $\sigma$ , nous notons respectivement  $inv(\sigma)$ ,  $sid(\sigma)$ ,  $ssg(\sigma)$  son nombre d'inversions, d'éléments saillants inférieurs droits et d'éléments saillants supérieurs gauches. Suivant Dumont et Kreweras [Du-Kr], nous disons qu'un élément saillant supérieur gauche est *exclusif* s'il n'est pas saillant inférieur droit. Nous définissons de même les éléments saillants inférieurs droits *exclusifs* et nous les notons respectivement  $ssge(\sigma)$  et  $side(\sigma)$ . À partir des deux séries suivantes, nous allons définir quatre autres séries :

$$F(a, b, q, t) = \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{\sigma \in \Sigma_n} a^{ssg(\sigma)} b^{sid(\sigma)} q^{inv(\sigma)} \right] t^n, \quad (29)$$

$$G(a, b, q, t) = \sum_{n \geq 1} \left[ \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_n \\ \sigma \text{ connexe}}} a^{ssg(\sigma)} b^{sid(\sigma)} q^{inv(\sigma)} \right] t^n. \quad (30)$$

Nous notons  $F^e$  et  $G^e$  (resp.  $F^c$  et  $G^c$ ) les séries  $F$  et  $G$  dans lesquelles  $a^{ssg(\sigma)}$  est remplacé par  $a^{ssge(\sigma)}$  (resp.  $b^{sid(\sigma)}$  est remplacé par  $b^{side(\sigma)}$ ).

Les notations  $[a]_n$  et  $[a]_n!$  désignent respectivement un  $q$ -analogue de  $a + n$  et un  $q$ -analogue de la factorielle montante  $(a)_n$  :

$$[a]_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ a + q + \dots + q^{n-1} & \text{si } n \geq 1, \end{cases} \quad \text{et} \quad [a]_n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ [a]_1 [a]_2 \dots [a]_n & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \quad (31)$$

En particulier,  $[1]_n!$  est le  $q$ -analogue usuel de  $n!$ . Mentionnons enfin deux identités élémentaires :

$$[aq - q]_n! = q^n (a - 1) [a]_{n-1}! \quad \text{pour } n \geq 1 \quad \text{et} \quad \left[ \frac{a}{q} + 1 \right]_n! = \frac{[a]_{n+1}!}{aq^n} \quad \text{pour } n \geq 0. \quad (32)$$

**Corollaire 6.** — 1) Les six séries génératrices définies ci-dessus satisfont aux relations

$$F(a, b, q, t) = (1 - G(a, b, q, t))^{-1}, \quad (33)$$

$$F^e(a, b, q, t) = (1 - G^e(a, b, q, t))^{-1} \quad \text{et} \quad F^c(a, b, q, t) = (1 - G^c(a, b, q, t))^{-1}, \quad (34)$$

$$G(a, b, q, t) = (ab - b)t + G^e(a, b, q, t) \quad \text{et} \quad G^c(a, b, q, t) = (ab - a)t + G^e(a, b, q, t). \quad (35)$$

2) Les séries  $F$ ,  $F^e$  et  $G^c$  admettent les développements en T-fraction suivants :

$$F(a, b, q, t) = \frac{1}{1 - (ab - [a]_1)t -} \frac{[a]_1 t}{1 - (bq - [a]_2)t -} \dots \frac{[a]_{k-1} t}{1 - (bq^{k-1} - [a]_k)t -} \dots, \quad (36)$$

$$F^e(a, b, q, t) = \frac{1}{1 - (b - [a]_1)t -} \frac{[a]_1 t}{1 - (bq - [a]_2)t -} \dots \frac{[a]_{k-1} t}{1 - (bq^{k-1} - [a]_k)t -} \dots, \quad (37)$$

$$G^c(a, b, q, t) = \frac{[a]_1 t}{1 - (bq - [a]_2)t -} \dots \frac{[a]_{k-1} t}{1 - (bq^{k-1} - [a]_k)t -} \dots \quad (38)$$

**Démonstration :** 1) Les relations (33) et (34) résultent de l'existence et de l'unicité de la décomposition d'une permutation (resp. d'un chemin de Dyck) en permutations connexes (resp. en chemins de Dyck premiers). Les relations (35) résultent de la remarque suivante : les séries  $G$  et  $G^e$  (resp.  $G^c$ ) ne diffèrent que par leur terme de degré 1, car les éléments saillants supérieurs gauches

(resp. inférieur droits) d'une permutation connexe sur  $[n]$  sont tous exclusifs dès que  $n \geq 2$ . Il suffit ensuite d'examiner le cas  $n = 1$ , qui est trivial.

2) Grâce à la bijection  $\psi$  et à ses propriétés énoncées au théorème 5, le calcul de  $F(a, b, q, t)$  est ramené au calcul de la série génératrice des chemins de Dyck valués par  $\lambda$  et  $\beta$  où

$$\begin{cases} \lambda_k = q^{k-1} + \dots + q + a = [a]_k & \text{si } k \geq 1, \\ \beta_k = q^{k-1} b & \text{si } k \geq 2, \\ \beta_1 = ab. \end{cases} \quad (39)$$

En effet, dans l'expression de  $\lambda_k$ , les termes  $q^{k-1}, \dots, q$  comptent respectivement les choix  $p = 1, \dots, k - 1$  et correspondent respectivement à la présence de  $k - 1, \dots, 0$  inversions; de plus, le terme  $a$  compte le choix maximal  $p = k$  et correspond à la présence d'un élément saillant supérieur gauche. Dans l'expression de  $\beta_k$  pour  $k \geq 2$ , les termes  $q^{k-1}$  et  $b$  comptent tous deux le choix minimal  $p = 1$  et correspondent respectivement à l'absence d'inversion et à la présence d'un élément saillant inférieur droit. Enfin, le cas  $\beta_1$  est à part : c'est le seul cas où le choix  $p = 1$  correspondant à un pas descendant adjacent à un pic est à la fois maximal et minimal et traduit la présence d'un élément simultanément saillant supérieur gauche et inférieur droit (voir les figures 2 et 4).

Le développement (36) résulte alors de la proposition 1.

Le changement de  $\beta_1 = ab$  en  $\beta_1 = b$  permet de compter seulement les éléments saillants supérieurs gauches exclusifs et conduit au développement (37). Pour obtenir (38), on utilise les identités (33) et (34) et le développement (36) déjà obtenu. Il est possible de donner des développements analogues pour  $F^c$  et  $G^e$ .

**Remarque :** nous retrouvons le développement (13) en substituant les variables  $a$ ,  $b$  et  $q$  par 1.

### 3.3 Séries génératrices et quotients de Gauss de fonctions hypergéométriques.

On note  $\Omega(a, b, q, t)$  le  $q$ -analogue suivant de la fonction hypergéométrique ordinaire  ${}_2F_0\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ - \end{smallmatrix}; t\right)$  :

$$\Omega(a, b, q, t) = \sum_{n \geq 0} [a]_n! [b]_n! \frac{t^n}{[1]_n!}. \quad (40)$$

Nous allons donner des expressions des séries du paragraphe précédent sous forme de *quotients de Gauss* de la fonction  $\Omega$ . Ces expressions sont basées sur le résultat suivant, que l'on vérifie en utilisant les identités (32).

**Lemme 7.** — La fonction  $\Omega$  vérifie l'identité :

$$\frac{\Omega(a, b, q, t)}{\Omega(aq - q, b, q, \frac{t}{q})} = \frac{1}{1 - (b - a)t - at \frac{\Omega(\frac{a}{q} + 1, b, q, qt)}{\Omega(a, b, q, t)}}. \quad (41)$$

Après avoir remarqué que l'identité ci-dessus conduit, par récurrence, au développement (37) en T-fraction, nous pouvons énoncer le corollaire suivant.

**Corollaire 8 (Zeng).** — Les six séries  $F$ ,  $F^e$ ,  $G$ ,  $G^e$ ,  $F^c$  et  $G^c$  s'expriment simplement à l'aide de *quotients de Gauss* de  $q$ -fonctions hypergéométriques; on a par exemple :

$$F^e(a, b, q, t) = \frac{\Omega(a, b, q, t)}{\Omega(aq - q, b, q, \frac{t}{q})} \quad \text{et} \quad F^c(a, b, q, t) = \frac{\Omega(a, b, q, t)}{\Omega(a, bq - q, q, \frac{t}{q})}, \quad (42)$$

$$G^c(a, b, q, t) = at \frac{\Omega(\frac{a}{q} + 1, b, q, qt)}{\Omega(a, b, q, t)} \quad \text{et} \quad G^e(a, b, q, t) = bt \frac{\Omega(a, \frac{b}{q} + 1, q, qt)}{\Omega(a, b, q, t)}. \quad (43)$$

Les résultats du corollaire 8 pour  $q = 1$  ont été démontrés par Dumont et Kreweras [Du-Kr] par récurrence sur les coefficients de la série  $G^c$ , en s'appuyant sur un développement en fraction continue de Stieltjes des quotients de Gauss alternés de  ${}_2F_0$ , c'est-à-dire qui portent tantôt sur une variable, tantôt sur l'autre. Zeng [Ze] a donné ensuite un "q-analogue" de leur démonstration et a proposé une autre approche en introduisant la notion de permutations discordantes.

#### 4 UN RÉSULTAT DE DUALITÉ DANS L'ÉNUMÉRATION DES POLYOMINOS PARALLÉLOGRAMMES.

Au cours de la section 3, nous n'avons utilisé que les résultats du paragraphe 1.1 mais pas ceux de la section 2, concernant la dualité des T-fractions. En rassemblant deux bijections déjà connues, nous obtenons en revanche un curieux exemple de dualité dans l'énumération des polyominos parallélogrammes. Un polyomino parallélogramme est la partie du plan située entre deux chemins à sommets dans  $Z^2$ , ne comportant que des pas nord et est et dont les seuls sommets communs sont leurs extrémités.

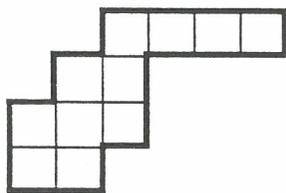


Figure 6 : un polyomino parallélogramme.

Si  $P$  est un polyomino parallélogramme, on note  $l(P)$  le nombre de ses lignes,  $c(P)$  le nombre de ses colonnes,  $a(P)$  son aire, c'est-à-dire le nombre des cellules de côté 1 qui le composent, et  $p(P)$  son périmètre. Remarquons que  $p(P) = 2(l(P) + c(P))$  est un nombre pair supérieur ou égal à 4. Posons

$$\mathcal{P}(x, y, q, t) = \sum x^{c(P)} y^{l(P)} q^{a(P)} t^{(p(P)-2)/2}, \quad (44)$$

où la somme est étendue à tous les polyominos parallélogrammes non réduits à un point, comptés à translation près. Voici les premiers termes de cette série, ordonnés suivant les puissances de la variable  $t$  :  $xyqt + (x^2y + xy^2)q^2t^2 + ((x^3y + 2x^2y^2 + xy^3)q^3 + x^2y^2q^4)t^3 + \dots$

Dans [Fe-Ro-Vi], nous donnons un développement en T-fraction de la série  $\mathcal{P}$  dont la T-fraction duale sera lié à cette même série  $\mathcal{P}$ , mais dans laquelle les places des variables seront permutées (voir le tableau final). Nous présentons ci-après un résumé des résultats de cet article.

##### 4.1 La bijection de Delest et Viennot.

**Proposition 9 (Delest, Viennot).** — *Il existe une bijection  $g$  entre l'ensemble des polyominos parallélogrammes de périmètre  $2n + 2$  et celui des chemins de Dyck de longueur  $2n$ , telle que le nombre de pics (resp. la somme des hauteurs des pics) de  $g(P)$  soit égale au nombre de colonnes (resp. à l'aire) de  $P$ .*

Nous renvoyons à [De-Vi] pour une démonstration. Définissons les suites  $\lambda$  et  $\beta$  par  $\lambda_k = y$  et  $\beta_k = xq^k$  et appelons  $v$  la valuation correspondante sur les chemins de Dyck. La proposition 9 prouve que  $v(g(P)) = x^{c(P)} y^{l(P)-1} q^{a(P)} t^{(p(P)-2)/2}$  et la proposition 1 conduit alors au résultat suivant.

**Corollaire 10.** — *La série  $y + \mathcal{P}$ , où  $\mathcal{P}$  est définie par (47), admet le développement en T-fraction*

$$y + \mathcal{P}(x, y, q, t) = \frac{y}{1 + (y - xq)t} - \frac{yt}{1 + (y - xq^2)t} - \dots - \frac{yt}{1 + (y - xq^k)t} - \dots \quad (45)$$

Les suites  $\gamma$  et  $\alpha$  données par les relations de dualité (21) s'expriment simplement en fonction de  $z = 1/y$  :

$$\alpha_k = z \frac{xzq^{k+1}}{(1 - xzq^k)(1 - xzq^{k+1})} \quad \text{et} \quad \gamma_k = \frac{z}{(1 - xzq^k)(1 - xzq^{k+1})}. \quad (46)$$

##### 4.2 La bijection de Fédou et Viennot.

Ordonnons les sommets des chemins de Dyck par leur abscisse. Une multichaîne d'un chemin de Dyck  $\omega$  est une suite de sommets de  $\omega$  croissante au sens large. Dans sa thèse de doctorat, Jean-Marc Fédou [Fe] donne une bijection qui transforme les polyominos parallélogrammes en multichaînes.

**Proposition 11 (Fédou, Viennot).** — *Il existe une bijection  $\rho$  entre les polyominos parallélogrammes ayant  $n$  lignes et les multichaînes des chemins de Dyck de longueur  $2n - 2$ , contenant chaque pic. Si  $M = \rho(P)$ , le nombre d'éléments de  $M$  est égal à  $c(P)$  et l'aire de  $P$  est égale à la somme des hauteurs des éléments de  $M$  augmentées d'une unité.*

Nous renvoyons le lecteur à [Fé] et à [Fé-Ro-Vi] pour des explications. Notons  $v^*$  la valuation des chemins de Dyck associée aux suites  $\gamma$  et  $\alpha$  définies par (49). Soit  $n \geq 2$ ; la proposition 11 permet de prouver la relation  $\sum v^*(\omega) = (1 - xzq) \sum x^{c(P)} t^{l(P)} z^{(p(P)-2)/2}$ , dans laquelle la première somme porte sur les chemins de Dyck de longueur  $2n - 2$  et la seconde sur les polyominos parallélogrammes ayant  $n$  lignes. L'examen du cas  $n = 1$  permet de conclure et d'énoncer le résultat suivant.

**Théorème 12.** — *La série  $\mathcal{P}$  satisfait aux équations "de dualité"*

$$y + \mathcal{P}(x, y, q, t) = yD(t), \quad (47)$$

$$t + \mathcal{P}(x, t, q, y^{-1}) = ty(y - xq)^{-1} D^*(t). \quad (48)$$

Nous résumons les résultats de cette section par le tableau suivant.

Le paramètre ... est compté	par la variable ... dans le développement en T-fraction de $D$ et	par la variable ... dans le développement en T-fraction de $D^*$
nombre de colonnes de $P$	$x$	$x$
nombre de lignes de $P$	$y$	$t$
aire de $P$	$q$	$q$
périmètre de $P$	$t$	$z = y^{-1}$

## BIBLIOGRAPHIE

- [Ba-Gr] Baker, G. A. et Graves-Morris P., *Padé Approximants*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, G.C. Rota ed., Cambridge University Press (1984).
- [De-Vi] Delest M. et Viennot X. G., Algebraic langages and polyominoes enumeration, *Theor. Comp. Sci.* **34** (1984), 169–206.
- [dM] de Medicis A., *Aspects combinatoires des nombres de Stirling, de polynômes orthogonaux de Sheffer et de leurs  $q$ -analogues*, thèse de doctorat, LACIM, Université du Québec à Montréal (1992).
- [dM-Vi] de Medicis A. et Viennot X. G., Moments des  $q$ -polynômes de Laguerre et la bijection de Foata-Zeilberger, *Actes du 28ème séminaire lotharingien de combinatoire*, publications de l'IRMA, Université de Strasbourg, à paraître.
- [Du-Kr] Dumont D. et Kreweras G., Sur le développement d'une fraction continue liée à la série hypergéométrique et son interprétation en termes de records et anti-records dans les permutations, *Europ. J. of Comb.* **9** (1989), 27–32.
- [Fé] Fédou J.-M., *Grammaires et  $q$ -énumération de polyominos*, thèse de doctorat, LaBRI, Université Bordeaux-I (1989).
- [Fé-Ro-Vi] Fédou J.-M., Roblet E. et Viennot X. G., Énumération de polyominos et dualité dans les T-fractions, manuscrit.
- [Fl] Flajolet Ph., Combinatorial aspect of continued fractions, *Disc. Math.* **32**, (1980) 125–161.
- [Fl-Fr-Vu] Flajolet Ph., Françon J. et Vuillemin J., Sequence of operations analysis for dynamic data structures, *J. of Algo.* **1** (1980), 111–141.
- [Fo-Ze] Foata D. and Zeilberger D., Denert's permutation statistics is indeed Euler-Mahonian, *St. in App. Math.* **83** (1990), 31–59.
- [Fr-Vi] Françon J. et Viennot G., Permutations selon les pics, creux, doubles-montées, doubles-descentes, nombres d'Euler et de Genocchi, *Disc. Math.* **28** (1979), 21–35.
- [Go-Ja] Goulden I. P. and Jackson D. M., Path generating functions and continued fractions *J. Combin. Theory Ser. A* **41** (1986), 1–10.
- [Jo-Th 1] Jones, W. B. and Thron, W. J., Two-point Padé table and T-fractions *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 388–390.
- [Jo-Th 2] Jones W. B. and Thron W. J., *Continued fractions, Analytic Theory and Applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, G.C. Rota ed., Cambridge University Press, (1984).
- [Mc-Mu] McCabe J. H. and Murphy J. A., Continued fractions which correspond to power series expansions at two points, *J. Inst. Maths. Applics.* **17** (1976) 233–247.
- [Ro] Roblet E., Un algorithme de calcul des approximant de Padé en deux points, manuscrit.
- [Vi] Viennot X. G., *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux*, notes de conférences données à l'UQAM (1983); réédition : hors-série **1**, Publications du LACIM, Université du Québec à Montréal.
- [Ze] Zeng J., Records, antirecords et permutations discordantes *Europ. J. of Comb.* **10**, (1989), 103–109.

## A TWO-DIMENSIONAL PICTORIAL PRESENTATION OF BERELE'S INSERTION ALGORITHM FOR SYMPLECTIC TABLEAUX

THOMAS ROBY AND ITARU TERADA

### ABSTRACT

Our purpose is to give a new presentation of Berele's correspondence [1]. S. Fomin [2] showed that the Robinson-Schensted correspondence can be presented as a doubly inductive application of "local rules", which are based on the properties of Young's lattice  $\mathcal{P}$  (the poset of all partitions, ordered by containment of diagrams) as a differential poset. T. Roby [7], [8] generalized this interpretation to several variants of the Robinson-Schensted correspondence. S. Fomin's analysis is based on a certain poset invariant. M. A. A. van Leeuwen [5] analyzed that a direct investigation of the bumping procedure, which is used in the original definition of the Robinson-Schensted correspondence [9] (also [6]), can lead to the same presentation. Fomin, and later van Leeuwen, also gave a similar presentation of Schützenberger's jeu de taquin or sliding algorithm [10].

Our presentation of Berele's correspondence incorporates these two ingredients.

### 1. REVIEW ON BERELE'S CORRESPONDENCE BY INSERTION

The usual Robinson-Schensted correspondence gives a bijection from permutations of a certain alphabet to pairs of same-shape standard Young tableaux. A generalization of Schensted gives a bijection from permutations with repetitions to pairs of tableaux of the same shape, one column-strict, one standard. The latter may be viewed from the standpoint of representation theory as giving the decomposition of the action of the group  $GL(n) \times S(n)$  on the  $k$ -fold tensor power of the natural representation  $\otimes^k \square_{GL(n)}$ . Berele's correspondence, originally conceived to explain a similar representation theoretic phenomenon for the symplectic group, gives a bijective map from the set of words on a certain alphabet of size  $2n$  to pairs of tableaux, one "symplectic", the other "up-down".

First we recall the basic notion of a partition. Let  $\mathbb{N}$  denote the set of natural numbers  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . When we need to exclude 0 we will use the notation  $\mathbb{N}^+$ . A **partition**  $\lambda$  is a sequence of natural numbers  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$  such that the terms are weakly decreasing, i.e.,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$  and only a finite number of the terms are nonzero. The nonzero terms are called the **parts** of  $\lambda$ . The number of parts is called the **length** of  $\lambda$  and is written  $\ell(\lambda)$ . The sum of the parts is called the **weight**, and we write  $|\lambda| = \sum_{i \geq 1} \lambda_i$ . When writing concrete