[7] J.Peyrière, Z.X.Wen and Z.Y.Wen, *Polynomes associés aux endomorphismes de groupe libres*, Prépublication,Université de Paris-Sud, Math. 91-72. A paraitre dans 'L'enseignement de mathématique.

[8] M.Queffélec, *Substitution dynamical systems-spectral analysis,* Lecture Notes in Math. 1294., 1987, Springer-Verlag.

[9] P.Séébold, *Fibonacci morphisms and sturmian words*, Theores. Comput. Sci, 88., 1991, pp.365-384.

[10] Z.Y.Wen and Z.X. Wen, *Some properties of the singular words of the Fibonacci word*, Preprint,1993.

SUR LES SYMÉTRIES TERNAIRES LIÉES AUX NOMBRES DE GENOCCHI

Par

Jiang ZENG

Abstract. — In [Du2] DUMONT stated several conjectures about some symmetric polynomial sequences which are the refinements of the Genocchi numbers. In this paper we shall prove all of his conjectures. We first show that some special cases of his conjecture can be readily derived from a result of Wall and then prove this conjecture by computing Hankel determinants. Finally we present a new symmetric model for the Dumont-Foata polynomials.

1. Introduction. — Un *escalier* F de taille $n \geq 1$ est le graphe d'une application *surjective* f de $[2n] := \{1, 2, \ldots, 2n\}$ sur $\{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$ telle que pour tout k, $f(k) \geq k$. Un point $(k, f(k))$, $1 \leq k \leq 2n-2$, de F est dit *maximal* si $f(k) = 2n$, est dit *point fixe* s'il n'est pas maximal et si $f(k) = k$ (ce qui implique que k est pair), est dit *surfixe* s'il n'est pas maximal et si $f(k) = k+1$ (ce qui implique que k est impair). On note $m(F)$ le nombre de ses points maximaux, $f(F)$ le nombre de ses points fixes, et $s(F)$ le nombre de ses points surfixes. Si l'on note E_n l'ensemble des escaliers de taille n, il est alors bien connu (voir [Du1, Du-Fo, Ha, Vi]) que le cardinal de E_n est le nombre de Genocchi G_{2n+2}, qui peuvent être définis par leur fonction génératrice :

$$\frac{2t}{e^t+1} = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - 3\frac{t^6}{6!} + 17\frac{t^8}{8!} + \cdots + (-1)^n G_{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

DUMONT et FOATA [Du-Fo] ont introduit une suite de polynômes $F_n(x, y, z)$ qui sont définis par $F_1(x, y, z) = 1$ et

$$F_n(x, y, z) = (x+y)(x+z)F_{n-1}(x+1, y, z) - x^2 F_{n-1}(x, y, z).$$

Ils ont montré que ces polynômes sont symétriques dans les variables x, y, z et raffinent les nombres de Genocchi en ce sens que $F_n(1,1,1) = G_{2n+2}$. On connait plusieurs interprétations combinatoires de ces polynômes (voir [Du1, Du-Fo, Ha, Vi]), mais il semble que celle la plus simple, en ce sence que la vérification de la récurrence est facile, est le résultat de HAN [Ha] suivant :

$$F_n(x, y, z) = \sum_{F \in E_n} x^{m(F)} y^{f(F)} z^{s(F)}. \tag{1}$$

De là, DUMONT [Du2] a récemment proposé une extension des polynômes $F_n(x, y, z)$ de la manière suivante. Pour un escalier F de taille n, un point $(k, f(k))$ de F est dit *doublé* s'il n'est pas seul sur sa ligne, c'est-à-dire s'il existe $j \neq k$ tel que $f(j) = f(k)$. On note $\operatorname{fd} F$ (*resp.* $\operatorname{fnd} F$) le nombre de ses points *fixes doublés* (*resp. fixes non doublés*), $\operatorname{sd} F$ (*resp.* $\operatorname{snd} F$) le nombre de ses points *surfixes doublés* (*resp. surfixes* *non doublés*) et mp F (*resp.* mi F) le nombre de ses points *maximaux d'abcisses* paires (*resp.* impaires). Les polynômes proposés par DUMONT [Du2] est donc définis par

$$\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \sum_{F\in E_{2n}} x^{\mathrm{mi}\,F} y^{\mathrm{fd}\,F} z^{\mathrm{snd}\,F} \bar{x}^{\mathrm{mp}\,F} \bar{y}^{\mathrm{fnd}\,F} \bar{z}^{\mathrm{sd}\,F}. \tag{2}$$

Il a également conjecturé plusieures formules remarquables sur ces derniers polynômes. Le but principal de cet article est de démontrer toutes les conjectures de [Du2] et en particulier le théorème suivant.

THÉORÈME 1 (Conjecture 2 de [Du2]). — *On a l'identité*

$$\sum_{n\geq 1}\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})t^n = \cfrac{t}{1-(x\bar{y}+y\bar{z}+z\bar{x})\,t - \cfrac{(\bar{x}+y)(\bar{y}+z)(\bar{z}+x)\,t^2}{\ddots}}$$

où le coefficient situé sous le $(n+1)$*-ième trait de fraction est*

$$1-[(x+n)(\bar{y}+n)+(y+n)(\bar{z}+n)+(z+n)(\bar{x}+n)-n(n+1)]t - \cfrac{(n+1)(\bar{x}+y+n)(\bar{y}+z+n)(\bar{z}+x+n)t^2}{\ddots}$$

Comme $F_n(x,y,z) = \Gamma_n(x,y,z,x,y,z)$, on déduit donc du théorème 1 le

COROLLAIRE 2 (Conjecture 1 de [Du2]). — *On a l'identité*

$$\sum_{n\geq 1}F_n(x,y,z)t^n = \cfrac{t}{1-(xy+yz+zx)\,t - \cfrac{(x+y)(y+z)(z+x)\,t^2}{\ddots}}$$

dont le coefficient situé sous le $(n+1)$*-ième trait de fraction est*

$$1-[(x+n)(y+n)+(y+n)(z+n)+(z+n)(x+n)-n(n+1)]t - \cfrac{(n+1)(x+y+n)(y+z+n)(z+x+n)t^2}{\ddots}$$

En vertu d'une formule de ROGERS- STIELTJES (voir, par exemple, [Fl]), on déduit du corollaire 2 une formule explicite polynômiale pour $F_n(x,y,z)$.

COROLLAIRE 3. — *Les polynômes de Dumont-Foata ont l'expression symétrique polynômiale suivante :*

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x,y,z) = \sum_{k\geq 0}\ \sum_{\substack{m_0,\ldots,m_k\geq 0\\ n_1,\ldots,n_k\geq 1}}\ \prod_{i=0}^{k-1}[(i+1)(x+y+i)(y+z+i)(z+x+i)]^{n_i} \\ \times\prod_{j=0}^{k}[(x+j)(y+j)+(y+j)(z+j)+(z+j)(x+j)-j(j+1)]^{m_j} \\ \times\prod_{j=0}^{k}\frac{(m_j+n_{j+1}+n_j-1)!}{m_j!n_{j+1}!(n_j-1)!} \end{aligned}$$

où la seconde sommation est assujettie à la condition $2(n_1+\cdots+n_k)+(m_0+\cdots+m_k) = n$ *avec* $n_0 = 1$ *et* $n_{k+1} = 0$.

On constate que cette formule met en évidence la symétrie en x,y,z de $F_n(x,y,z)$ et qu'elle est différente de celle de CARLITZ [Ca].

Un autre cas particulier intéressant est la suite $B_n(x,y) := \Gamma_n(x,1,1,y,1,1)$ $(n\geq 1)$, qui satisfait la récurrence :

$$B_n(x,y) = (x+1)(y+1)B_{n-1}(x+1,y+1) - xyB_{n-1}(x,y) \tag{3}$$

avec $B_1(x,y) = 1$. Le théorème 1 se réduit alors à un résultat de [Du-Ra].

COROLLAIRE 4. — *On a l'identité*

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{y\,t}{1-\cfrac{(x+1)\,t}{1-\cfrac{2(y+1)\,t}{1-\cfrac{2(x+2)\,t}{1-\cfrac{3(y+2)\,t}{\ddots}}}}}} = 1+y\sum_{n\geq 1}B_n(x,y)t^n.$$

Les polynômes $B_n(x,y)$ sont en effet une extension commune des nombres de Genocchi G_{2n} et Genocchi médians H_{2n+1} (*cf*, [Du-Ra]) en ce sens que

$$B_n(0,1) = H_{2n+1} \quad\text{et}\quad B_n(1,1) = G_{2n+2}. \tag{4}$$

On remarque que VIENNOT [Vi] a donné une preuve combinatoire du théorème 1 dans le cas particulier où $x = y = z = \bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 1$. Notre preuve du théorème 1 repose sur le fait que le développement en fraction continue de la fonction génératrice ordinaire d'une suite équivaut au calcul de deux déterminants de Hankel construits sur cette suite (*cf*, paragraphe 4). Enfin, lors de la rédaction de cet article, nous avons appris que RANDRIANARIVONY [Ra] a aussi démontré les conjectures de Dumont [Du2], mais sa méthode est essentiellement différente de la notre.

Cet article est organisé comme suit. Au paragraphe 2, on détermine la relation de récurrence de $\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. Au paragraphe 3, on montre comment un résultat de WALL [Wa] permet de déduire immédiatement la proposition 4 et les deux autres cas particuliers du théorème 1. On démontre ensuite le théorème 1 au paragraphe 4 dans le cas général par le calcul de déterminants de Hankel. Enfin, au paragraphe 5 on déduit un nouveau modèle symétrique pour les polynômes de Dumont-Foata.

2. La relation de récurrence de $\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. — Pour tout ensemble fini $X\subset \mathbf{N}$, on note respectivement $I(X)$ et $P(X)$ le nombre des entiers impairs et pairs de X.

THÉORÈME 5. — *On a* $\Gamma_1(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = 1$ *et*

$$\begin{aligned}\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= (x+\bar{z})(y+\bar{x})\Gamma_{n-1}(x+1,y,z,\bar{x}+1,\bar{y},\bar{z}) \\ &\quad+[x(\bar{y}-y)-\bar{x}(\bar{z}-z)-x\bar{x}]\Gamma_{n-1}(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}).\end{aligned} \tag{5}$$

Démonstration : Il est évident que $\Gamma_1(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})=1$. On appelle *escalier coloré* sur $[2n]$ tout couple (F,X) où $F=\{(k,f(k))|k\in[2n]\}$ est un escalier sur $[2n]$ et X un sous-ensemble strict de $f^{-1}(2n)=\{i\in[2n]\,|\,F(i)=2n\}$. Il existe une bijection naturelle φ entre les escaliers colorés sur $[2n]$ et les escaliers sur $[2n+2]$, qui à tout escalier coloré (F,X) sur $[2n]$ associe un escalier $F'=\{(k,f'(k))|k\in[2n]\}=\varphi(F,X)$ sur $[2n+2]$ de la façon suivante :

$$f'(i)=\begin{cases} f(i) & \text{si } i\notin X\cup\{2n+1,2n+2\},\\ 2n+2 & \text{si } i\in X\cup\{2n+1,2n+2\}.\end{cases} \tag{6}$$

On remarque que le fait que X est un sous-ensemble strict assure la surjectivité de F'. Rappelons que le poids de chaque escalier $F'=\varphi(F,X)$ est défini par

$$w(F')=x^{\mathrm{mi}\,F'}y^{\mathrm{fd}\,F'}z^{\mathrm{snd}\,F'}\bar{x}^{\mathrm{mp}\,F'}\bar{y}^{\mathrm{fnd}\,F'}\bar{z}^{\mathrm{sd}\,F'},$$

où (F,X) est un escalier coloré sur $[2n]$. On se propose de calculer le polynôme générateur de E_{2n+2} via celui des escaliers colorés sur $[2n]$. Pour ce faire, on va distinquer les 4 cas suivants.

1°) Cas où $2n-1,\,2n\in X$. D'après (6) on voit que

$$w(F')=x^{I(X)}\bar{x}^{P(X)}z^{\mathrm{snd}\,F}y^{\mathrm{fd}\,F}\bar{y}^{\mathrm{fnd}\,F}\bar{z}^{\mathrm{sd}\,F}.$$

Comme

$$\sum_{X\subsetneq F^{-1}(2n)} x^{I(X)-1}\bar{x}^{I(X)-1}=(x+1)^{\mathrm{mi}\,F}(\bar{x}+1)^{\mathrm{mp}\,F}-x^{\mathrm{mi}\,F}\bar{x}^{\mathrm{mp}\,F},$$

le polynôme générateur correspondant est donc

$$x\bar{x}\Gamma_n(x+1,y,z,\bar{x}+1,\bar{y},\bar{z})-x\bar{x}\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}).$$

2°) Cas où $2n-1\in X$ et $2n\notin X$.

(i) $X=f^{-1}(2n)\backslash\{2n\}$. Alors $2n$ est un point fix non doublé de F'. D'où le poids associé :

$$w(F')=x^{I(F^{-1}(2n))}\bar{x}^{P(F^{-1}(2n))-1}z^{\mathrm{snd}\,F}y^{\mathrm{fd}\,F}\bar{y}^{\mathrm{fnd}\,F+1}\bar{z}^{\mathrm{sd}\,F}.$$

Par suite, le polynôme générateur est $x\bar{y}\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

(ii) $X\subsetneq f^{-1}(2n)\backslash\{2n\}$. Alors $2n$ est un point fixe doublé de F'. D'où

$$w(F')=x^{I(X)}\bar{x}^{P(X)}z^{\mathrm{snd}\,F}y^{\mathrm{fd}\,F+1}\bar{y}^{\mathrm{fnd}\,F+1}\bar{z}^{\mathrm{sd}\,F}.$$

Par suite, le polynôme générateur correspondant est

$$\begin{aligned}
&xy\sum_{F\in E_{2n}}\ \sum_{X\subsetneq f^{-1}(2n)\backslash\{2n\}} x^{I(X)-1}\bar{x}^{P(X)}z^{\mathrm{snd}\,F}y^{\mathrm{fd}\,F}\bar{y}^{\mathrm{fnd}\,F}\bar{z}^{\mathrm{sd}\,F}\\
&=xy\sum_{F\in E_{2n}}\left((x+1)^{\mathrm{mi}\,F}(\bar{x}+1)^{\mathrm{mp}\,F}-x^{\mathrm{mi}\,F}\bar{x}^{\mathrm{mp}\,F}\right)z^{\mathrm{snd}\,F}y^{\mathrm{fd}\,F}\bar{y}^{\mathrm{fnd}\,F}\bar{z}^{\mathrm{sd}\,F}\\
&=xy\Gamma_n(x+1,y,z,\bar{x}+1,\bar{y},\bar{z})-xy\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}).
\end{aligned}$$

Compte tenu de (i) et (ii), on obtient le polynôme générateur correspondant :

$$xy\Gamma_n(x+1,y,z,\bar{x}+1,\bar{y},\bar{z})+x(\bar{y}-y)\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}).$$

3°) Cas où $2n-1\notin X$ et $2n\in X$. Un argument analogue à celui du cas précédent montre que le polynôme générateur correspondant est

$$\bar{x}\bar{z}\Gamma_n(x+1,y,z,\bar{x}+1,\bar{y},\bar{z})+\bar{x}(z-\bar{z})\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}).$$

4°) Cas où $2n-1,2n\notin X$. On voit que $2n-1$ (*resp.* $2n$) est l'abscisse d'un point surfixe doublé (*resp.* fixe doublé) de F'. Par suite

$$w(F')=x^{I(X)}\bar{x}^{P(X)}z^{\mathrm{snd}\,F}y^{\mathrm{fd}\,F+1}\bar{y}^{\mathrm{fnd}\,F}\bar{z}^{\mathrm{sd}\,F+1}.$$

Comme

$$\sum_{X\subseteq f^{-1}(2n)\backslash\{2n-1,2n\}}\bar{x}^{I(X)}\bar{x}^{P(X)}=(x+1)^{\mathrm{mi}\,F}(\bar{x}+1)^{\mathrm{mp}\,F},$$

le polynôme générateur correspondant est

$$y\bar{z}\Gamma_n(x+1,y,z,\bar{x}+1,\bar{y},\bar{z}).$$

En récapitulant les 4 cas ci-dessus, on voit que le polynôme $\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, étant la somme des quatre polynômes générateurs obtenus dans les quatre cas, satisfait la récurrence (5). □

Le résultat suivant généralise la conjecture 3 de DUMONT [Du2].

THÉORÈME 6. — *On a*

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1}\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})t^n=\\
&\qquad\sum_{n\geq 1}\frac{(x+\bar{z})_{n-1}(y+\bar{x})_{n-1}t^2}{\prod_{k=0}^{n-1}\{1-[(x+k)(\bar{y}-y)-(\bar{x}+k)(\bar{z}-z)-(x+k)(\bar{x}+k)]t\}}.
\end{aligned}$$

Démonstration : Posons $\Gamma(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z};t)=\sum_{n\geq 1}\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})t^n$. La récurrence (5) entraîne immédiatement que

$$\begin{aligned}
\Gamma(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})=t&+(x+\bar{z})(y+\bar{x})t\Gamma(x+1,y,z,\bar{x}+1,\bar{y},\bar{z};t)\\
&+[x(\bar{y}-y)-\bar{x}(\bar{z}-z)-x\bar{x}]t\Gamma(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z};t).
\end{aligned}$$

D'où on tire

$$\begin{aligned}
\Gamma(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z};t)=&\frac{t}{1-[x(\bar{y}-y)-\bar{x}(\bar{z}-z)-x\bar{x}]t}\\
&+\frac{(x+\bar{z})(y+\bar{x})t}{1-[x(\bar{y}-y)-\bar{x}(\bar{z}-z)-x\bar{x}]t}\Gamma(x+1,y,z,\bar{x}+1,\bar{y},\bar{z};t).
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration par itération. □

PROPOSITION 7. — *Le polynôme $\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ est de degré total $2n-2$ et de degré $n-1$ en la seule variable x (resp. y, z, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$) pour $n \geq 1$. D'autre part, pour toute permutation circulaire (u,v,w) de (x,y,z), on a les propriérés symétriques suivantes :*

$$\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \Gamma_n(u,v,w,\bar{u},\bar{v},\bar{w}) = \Gamma_n(\bar{u},\bar{w},\bar{v},u,w,v).$$

Démonstration : La vérification par récurrence est facile d'après la récurrence (5) et laissée au lecteur. □

3. Application d'un théorème de Wall. — Nous montrons dans cette partie comment un résultat de WALL permet de démontrer facilement certains cas particuliers du théorème 1.

LEMME 1 (WALL [Wa, 281]). — *On a*

$$\cfrac{1+t}{1-\cfrac{(g_1-1)t}{1-\cfrac{(g_2-1)g_1 t}{1-\cfrac{(g_3-1)g_2 t}{\ddots}}}} = 1+\cfrac{g_1 t}{1-\cfrac{(g_1-1)g_2 t}{1-\cfrac{(g_2-1)g_3 t}{1-\cfrac{(g_3-1)g_4 t}{\ddots}}}}.$$

PROPOSITION 8. — *Le théorème 1 est vrai pour $z=\bar{z}=0$ et $z=\bar{z}=1$.*

Démonstration : Soit $\Gamma(x,y,\bar{x},\bar{y};t) = \sum_{n\geq 1}\Gamma_n(x,y,0,\bar{x},\bar{y},0))t^n$. On déduit de la récurrence (5) l'identité :

$$[1+x(y+\bar{x}-\bar{y})t]\Gamma(x,y,\bar{x},\bar{y};t) = t + x(y+\bar{x})t\Gamma(x+1,y,\bar{x}+1,\bar{y};t). \tag{7}$$

Supposons qu'il existe une suite $\{g_n := g_n(x,y,\bar{x},\bar{y})\}_{n\geq 1}$ telle que

$$\Gamma(x,y,\bar{x},\bar{y};t) = \cfrac{t}{1-\cfrac{x(y+\bar{x}-\bar{y})(g_1-1)t}{1-\cfrac{x(y+\bar{x}-\bar{y})(g_2-1)g_1 t}{1-\cfrac{x(y+\bar{x}-\bar{y})(g_3-1)g_2 t}{\ddots}}}}. \tag{8}$$

En substituant l'expression ci-dessus dans (7) et en substituant $x(y+\bar{x}-\bar{y})t$ par t, on obtient :

$$\cfrac{1+t}{1-\cfrac{(g_1-1)t}{1-\cfrac{(g_2-1)g_1 t}{1-\cfrac{(g_3-1)g_2 t}{\ddots}}}} = 1+\cfrac{\frac{y+\bar{x}}{y+\bar{x}-\bar{y}}\,t}{1-\cfrac{\frac{(x+1)(y+\bar{x}+1-\bar{y})}{x(y+\bar{x}-\bar{y})}(g'_1-1)t}{1-\cfrac{\frac{(x+1)(y+\bar{x}+1-\bar{y})}{x(y+\bar{x}-\bar{y})}(g'_2-1)g'_1 t}{1-\cfrac{\frac{(x+1)(y+\bar{x}+1-\bar{y})}{x(y+\bar{x}-\bar{y})}(g'_3-1)g'_2 t}{\ddots}}}},$$

où $g'_n := g_n(x+1,y,\bar{x}+1,\bar{y})$. En comparant le membre de droite ci-dessus avec celui du lemme 1, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{y+\bar{x}}{y+\bar{x}-\bar{y}},\\
g_2 &= \frac{(x+1)(y+\bar{x}+1-\bar{y})}{x(y+\bar{x}-\bar{y})}\,\frac{g'_1-1}{g_1-1} = 1+\frac{1}{x},\\
g_3 &= \frac{(x+1)(y+\bar{x}+1-\bar{y})}{x(y+\bar{x}-\bar{y})}\,\frac{g'_2-1}{g_2-1}g'_1 = \frac{y+\bar{x}+1}{y+\bar{x}-\bar{y}},\\
g_4 &= \frac{(x+1)(y+\bar{x}+1-\bar{y})}{x(y+\bar{x}-\bar{y})}\,\frac{g'_3-1}{g_3-1}g'_2 = 1+\frac{2}{x}.
\end{aligned}$$

Par récurrence on trouve facilement l'expression générale :

$$g_{2n-1} = \frac{y+\bar{x}+n-1}{y+\bar{x}-\bar{y}}, \qquad g_{2n} = 1+\frac{n}{x}, \quad n\geq 1.$$

En reportant ces valeurs dans (8), on a

$$\Gamma(x,y,\bar{x},\bar{y};t) = \cfrac{t}{1-\cfrac{x\bar{y}t}{1-\cfrac{(y+\bar{x})t}{1-\cfrac{(x+1)(\bar{y}+1)t}{1-\cfrac{2(y+\bar{x}+1)t}{\ddots\,1-\cfrac{(x+n-1)(\bar{y}+n-1)t}{1-\cfrac{n(y+\bar{x}+n-1)t}{\ddots}}}}}}}. \tag{9}$$

Ceci prouve le théorème 1 pour $z=\bar{z}=0$ en contractant la fraction continue de (9) à partir du 2ème trait. D'autre part, comme

$$\Gamma_n(x,y,0,\bar{x},\bar{y},0) = x\bar{y}\Gamma_{n-1}(x,y,1,\bar{x},\bar{y},1), \qquad \text{pour} \quad n\geq 2.$$

En contractant la fraction continue de (9) à partir du 1er trait, on trouve le théorème 1 pour $z=\bar{z}=1$. □

Notons que le corollaire 4 est un cas particulier de la proposition 8.

4. Déterminants de Hankel et fractions continues. — Rappelons qu'un déterminant de Hankel construit sur une suite $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ avec $\mu_0 = 1$ est tout simplement un mineur de la matrice infinie $H = (\mu_{i+j})_{0\leq i,j}$. Un tel déterminant d'ordre $k \geq 1$ sera noté $H\begin{pmatrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_k \\ \beta_1, & \ldots, & \beta_k \end{pmatrix}$, en désignant par $0 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k$ et $0 \leq \beta_1 < \cdots < \beta_k$ les indices respectifs des lignes et colonnes du mineur extrait. En particulier, pour $n \geq 0$, on pose

$$\Delta_n = H\begin{pmatrix} 0, & 1, & \ldots, & n \\ 0, & 1, & \ldots, & n \end{pmatrix}, \chi_n = H\begin{pmatrix} 0, & 1, & \ldots, & n-1, & n \\ 0, & 1, & \ldots, & n-1, & n+1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\Delta_0 = \mu_0 = 1$ et $\chi_0 = \mu_1$. Par convention $\Delta_{-1} = 1$ et $\chi_{-1} = 0$. Le résultat suivant est classique, voir par exemple [Wa, p. 206].

LEMME 2. — *Si $\Delta_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$, alors la série génératrice ordinaire $\sum_{n \geq 0} \mu_n t^n$ admet le développemnt en fraction continue suivant :*

$$\sum_{n \geq 0} \mu_n t^n = \cfrac{1}{1 - b_0 t - \cfrac{\lambda_1 t^2}{\ddots \cfrac{}{1 - b_n t - \cfrac{\lambda_{n+1} t^2}{\ddots}}}},$$

où $\lambda_{n+1} = \Delta_{n+1}\Delta_{n-1}/\Delta_n^2$ et $b_n = \chi_n/\Delta_n - \chi_{n-1}/\Delta_{n-1}$, $n \geq 0$.

Par conséquent,afin de démontrer le théorème 1, il suffit d'évaluer les deux déterminants Δ_n et χ_n avec $\mu_n = \Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Par commodité, on pose $\Gamma_n := \Gamma_n^{(0)}$ et

$$\Gamma_n^{(k)} := \Gamma_n(x + k, \bar{x} + k) := \Gamma_n(x + k, y, z, \bar{x} + k, \bar{y}, \bar{z}), \qquad k \geq 0.$$

On définit l'opérateur de différence Δ sur l'anneau des polynômes $P(x, \bar{x})$ en x et $\bar{x}$ par $\Delta P(x, \bar{x}) = P(x + 1, \bar{x} + 1) - P(x, \bar{x})$. Ainsi la récurrence (5) peut s'écrire

$$(10) \quad \Gamma_{n+1}(x, \bar{x}) = (x\bar{x} + xy + \bar{x}\bar{z})\Delta\Gamma_n(x, \bar{x}) + (x\bar{y} + \bar{x}z)\Gamma_n(x, \bar{x}) + y\bar{z}\Gamma_n(x + 1, \bar{x} + 1).$$

Plus généralement, on définit $\Delta^0 P(x, \bar{x}) = P(x, \bar{x})$ et $\Delta^m P(x, \bar{x}) = \Delta(\Delta^{m-1}P(x, \bar{x}))$ pour $m \geq 1$. Le résultat suivant est un analogue de la formule de Leibniz pour la dérivée.

LEMME 3. — *Soit $u(x, \bar{x})$ et $v(x, \bar{x})$ deux polynômes en $x, \bar{x}$. Alors*

$$\Delta^n(u(x, \bar{x})v(x, \bar{x})) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k(u(x + k, \bar{x} + k))\Delta^{n-k}(v(x, \bar{x})), \qquad n \geq 0.$$

Démonstration : La vérification par récurrence est laissée au lecteur. $\square$

LEMME 4. — *On a pour tout $n \geq 0$ l'identité :*

$$(11) \qquad \Delta^n\Gamma_{n+1}(x, \bar{x}) = n!(\bar{y} + z)_n.$$

Démonstration : Il est évident que l'identité (11) est vraie pour $n = 0$. Supposons (11) vraie pour $n = m - 1$. Ceci implique que $\Delta^l\Gamma_m(x, \bar{x}) = 0$ pour tout $l \geq m$. D'après (10) on a

$$\Delta^m\Gamma_{m+1}(x, \bar{x}) = \Delta^m\{(x\bar{x} + xy + \bar{x}\bar{z})\Delta\Gamma_m(x, \bar{x})\} + \Delta^m\{(x\bar{y} + \bar{x}z)\Gamma_m(x, \bar{x})\} + \Delta^m\{y\bar{z}\Gamma_m(x + 1, \bar{x} + 1)\}.$$

En appliquant le lemme 3 et l'hypothèse de récurrence au second membre ci-dessus, on obtient après simplification l'identité (11) pour $n = m$. $\square$

LEMME 5. — *On a pour tout $n \geq 0$ l'identité :*

$$(12) \quad \Delta^n\Gamma_{n+2}(x, \bar{x}) = (n + 1)!(\bar{y} + z)_n \times \left[x\bar{y} + y\bar{z} + z\bar{x} + \frac{n}{2}(x + \bar{x} + y + \bar{y} + z + \bar{z}) + \frac{n(4n - 1)}{6}\right].$$

Démonstration : Comme $\Gamma_2(x, \bar{x}) = x\bar{y} + y\bar{z} + z\bar{x}$, l'identité (12) est donc vraie pour $n = 0$. Supposons (12) vraie pour $n = m - 1$. De même, d'après (10) on obtient grace aux lemmes 3 et 4 l'identité

$$\begin{aligned}\Delta^m\Gamma_{m+2}(x, \bar{x}) = {} & \binom{m}{2}\Delta^2(x\bar{x})\Delta^{m-1}\Gamma_{m+1}(x + 2, \bar{x} + 2) \\ & + (x\bar{y} + z\bar{x})\Delta^m\Gamma_{m+1}(x, \bar{x}) + m(\bar{y} + z)\Delta^{m-1}\Gamma_{m+1}(x + 1, \bar{x} + 1) \\ & + [y\bar{z} + n(y + \bar{z} + \Delta(x\bar{x}))]\Delta^m\Gamma_{m+1}(x + 1, \bar{x} + 1)\end{aligned}$$

En simplifiant le second membre ci-dessus par l'hypothèse de récurrence et le Lemme 4, on trouve l'identité (12) pour $n = m$. $\square$

LEMME 6. — *On a*

$$\Lambda_n = \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \ldots & \Gamma_n & \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 & \ldots & \Gamma_{n+1} & \Gamma_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_n & \Gamma_{n+1} & \ldots & \Gamma_{2n-1} & \Gamma_{2n} \\ \Gamma_{n+1} & \Gamma_{n+2} & \ldots & \Gamma_{2n} & \Gamma_{2n+1} \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}[(k + 1)(x + \bar{z} + k)(\bar{y} + z + k)(y + \bar{x} + k)]^{n-k}.$$

Démonstration : A chaque colonne du déterminant Λ_n, on ajoute successivement de droite à gauche sa colonne gauche multipliée par $x(\bar{y} - y) - \bar{x}(\bar{z} - z) - x\bar{x}$. Comme

$\Gamma_n + [x(\bar{y} - y) - \bar{x}(\bar{z} - z) - x\bar{x}]\Gamma_{n-1} = (x+\bar{z})(y+\bar{x})\Gamma_{n-1}^{(1)}$, cette opération conduit à l'identité suivante :

$$\Lambda_n = [(x+\bar{z})(y+\bar{x})]^n \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_1^{(1)} & \dots & \Gamma_{n-1}^{(1)} & \Gamma_n^{(1)} \\ \Gamma_2 & \Gamma_2^{(1)} & \dots & \Gamma_n^{(1)} & \Gamma_{n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_n & \Gamma_n^{(1)} & \dots & \Gamma_{2n-2}^{(1)} & \Gamma_{2n-1}^{(1)} \\ \Gamma_{n+1} & \Gamma_{n+1}^{(1)} & \dots & \Gamma_{2n-1}^{(1)} & \Gamma_{2n}^{(1)} \end{vmatrix}.$$

En procédant de la même façon sur le dernier déterminant et ainsi de suite, on obtient finalement

$$\Lambda_n = \prod_{k=0}^{n-1} [(x+\bar{z}+k)(y+\bar{x}+k)]^{n-k} \times \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_1^{(1)} & \dots & \Gamma_1^{(n-1)} & \Gamma_1^{(n)} \\ \Gamma_2 & \Gamma_2^{(1)} & \dots & \Gamma_2^{(n-1)} & \Gamma_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_n & \Gamma_n^{(1)} & \dots & \Gamma_n^{(n-1)} & \Gamma_n^{(n)} \\ \Gamma_{n+1} & \Gamma_{n+1}^{(1)} & \dots & \Gamma_{n+1}^{(n-1)} & \Gamma_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Par ailleurs, on vérifie sans peine que

$$\Delta^m \Gamma(x, \bar{x}) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \Gamma(x+m-i, \bar{x}+m-i).$$

D'où, par des opérations élémentaires sur les colonnes du déterminant de (13), on peut transformer chaque $\Gamma_n^{(k)}$ en $\Delta^k \Gamma_n$. Or, d'après la proposition 7, le polynôme $\Delta^k \Gamma_n$, étant de degré $n-1-k$ en x (resp. $\bar{x}$), est égale à 0 si $k \geq n$. Par suite

$$\Lambda_n = \prod_{k=0}^{n-1} [(x+\bar{z}+k)(y+\bar{x}+k)]^{n-k} \times \begin{vmatrix} \Gamma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \Gamma_2 & \Delta\Gamma_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_n & \Delta\Gamma_n & \dots & \Delta^2\Gamma_n & 0 \\ \Gamma_{n+1} & \Delta\Gamma_{n+1} & \dots & \Delta^{n-1}\Gamma_{n+1} & \Delta^n\Gamma_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} [(x+\bar{z}+k)(y+\bar{x}+k)]^{n-k} \prod_{k=0}^{n} \Delta^k \Gamma_{k+1}.$$

Ceci achève la démonstration en vertu du lemme 4. □

LEMME 7. — *Soit*

$$\Xi_n = \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \dots & \Gamma_n & \Gamma_{n+2} \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 & \dots & \Gamma_{n+1} & \Gamma_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_n & \Gamma_{n+1} & \dots & \Gamma_{2n-1} & \Gamma_{2n+1} \\ \Gamma_{n+1} & \Gamma_{n+2} & \dots & \Gamma_{2n} & \Gamma_{2n+2} \end{vmatrix}.$$

Alors

$$\frac{\Xi_n}{\Lambda_n} = (n+1)\left[x\bar{y} + y\bar{z} + z\bar{x} + \frac{n}{2}(x+\bar{x}+y+\bar{y}+z+\bar{z}) + \frac{n(4n-1)}{6}\right].$$

Démonstration : Par un raisonnement analogue à celui du lemme 6, mais en opérant les lignes au lieu de colonnes de déterminants, on obtient

$$\Xi_n = \prod_{k=0}^{n-1} [(x+\bar{z}+k)(y+\bar{x}+k)]^{n-k} \times \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \dots & \Gamma_n & \Gamma_{n+2} \\ \Gamma_1^{(1)} & \Gamma_2^{(1)} & \dots & \Gamma_n^{(1)} & \Gamma_{n+2}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_1^{(n-1)} & \Gamma_n^{(n-1)} & \dots & \Gamma_n^{(n-1)} & \Gamma_{n+2}^{(n-1)} \\ \Gamma_1^{(n)} & \Gamma_n^{(n)} & \dots & \Gamma_n^{(n)} & \Gamma_{n+2}^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} [(x+\bar{z}+k)(y+\bar{x}+k)]^{n-k} \times \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \dots & \Gamma_n & \Gamma_{n+2} \\ 0 & \Delta\Gamma_2 & \dots & \Delta\Gamma_n & \Delta\Gamma_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta^{n-1}\Gamma_n & \Delta^n\Gamma_{n+2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Delta^n\Gamma_{n+2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} [(x+\bar{z}+k)(y+\bar{x}+k)]^{n-k} \Delta^n \Gamma_{n+2} \prod_{k=0}^{n-1} \Delta^k \Gamma_{k+1}.$$

Ceci achève la démonstration en vertu des lemmes 5 et 6. □

Compte tenu des lemmes 2, 6 et 7 on obtient le théorème 1.

5. Un modèle symétrique ternaire pour $F_n(x, y, z)$. — Plusieurs auteurs (*cf.*, [Du-Fo, Vi, Ha]) ont proposé de trouver un modèle combinatoire pour les polynômes

$F_n(x,y,z)$ telle que la symétrie ternaire soit évidente. L'expression symétrique polynômiale de $F_n(x,y,z)$ du corollaire 3 nous ouvre en effet une nouvelle voie d'interpréter ces polynômes. On se propose d'en donner ici un tel modèle en terme de chemins de Motzkin valués [Fl, Vi].

DÉFINITION 5.1. — *Un chemin de Motzkin en n pas est une application ω de $\{0,1,\ldots,n\}$ dans $\{0,1,\ldots,n\}$ telle que $\omega(0)=\omega(n)=0$ et $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$, on a $|\omega(i)-\omega(i-1)| \le 1$, autrement dit les pas sont, soit des montées de $+1$, soit des paliers, soit des descentes de -1. On appelle $\omega(i)$ le niveau du i^e pas de ω.*

Pour tout $k \ge 0$, posons

$$\begin{aligned} a_k &= k+1,\\ b_k &= (x+2k)y+(y+2k)z+(z+2k)x+k(2k-1),\\ c_{k+1} &= (x+y+k)(y+z+k)(z+x+k). \end{aligned}$$

Etant donné un chemin de motzkin ω. On évalue chaque palier situé au niveau k par b_k, chaque descente du niveau $k+1$ vers le niveau k par c_{k+1} et chaque montée du niveau k vers le niveau $k+1$ par a_k. On définit la valuation $w(\omega)$ de ω par le produit des valuations de ses pas. D'après FLAJOLET [Fl], on déduit du corollaire 2 l'identité suivante :

$$F_{n+1}(x,y,z) = \sum_{\omega \in \Gamma(n)} w(\omega), \qquad n \ge 1, \tag{14}$$

où $\Gamma(n)$ désigne l'ensemble des *chemins de Motzkin* en n pas.

DÉFINITION 5.2. — *Un chemin de Motzkin coloré en n pas est la donnée d'un chemin de Motzkin ω en n pas et d'un coloriage en quatre couleurs $x,y,z,1$ des paliers de ω. Un palier de couleur x (resp. $y,z,1$) s'appelle ainsi x-palier (resp. y-palier, z-palier, 1-palier).*

DÉFINITION 5.3. — *Un complexe de Genocchi sur $[n]$ est un quadruple (ω,f,g,h) où ω est un chemin de Motzkin coloré de n pas et où f,g,h sont des applications de $[n]$ dans $\mathbb{Z}$ telles que pour tout i, $1 \le i \le n$, si le i^e pas $(\omega(i-1),\omega(i))$ est une montée alors*

$$0 \le f(i) = g(i) = h(i) \le \omega(i-1)\ ;$$

si le i^e pas $(\omega(i-1),\omega(i))$ est une descente alors

$$0 \le f(i) \le \omega(i-1), \quad 0 \le g(i) \le \omega(i-1), \quad 0 \le h(i) \le \omega(i-1)\ ;$$

si le i^e pas $(\omega(i-1),\omega(i))$ est un x-palier (resp. y-palier, z-palier), alors

$$-k \le f(i) = g(i) = h(i) \le \omega(i-1)\ ;$$

si le i^e pas $(\omega(i-1),\omega(i))$ est un 1-palier, alors

$$1 \le f(i) = g(i) = h(i) \le \omega(i-1)(2\omega(i-1)-1).$$

Soit $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des complexes de Genocchi sur $[n]$. D'après (14), on voit que le cardinal de $\mathcal{C}_n$ est $F_{n+1}(1,1,1) = G_{2n+4}$ pour $n \ge 1$. Afin de trouver une interprétation combinatoire de $F_{n+1}(x,y,z)$, on va introduire des statistiques sur les complexes de Genocchi comme suit.

Soit $\pi = (\omega,f,g,h) \in \mathcal{C}_n$. On désigne par $\mathrm{fmin}\,\pi$ (*resp.*, $\mathrm{gmin}\,\pi$, $\mathrm{hmin}\,\pi$) le nombre des entiers i, $1 \le i \le n$, tels que $f(i)=0$ (*resp.*, $g(i)=0$, $h(i)=0$) et le pas $(\omega(i-1),\omega(i))$ est une descente. On désigne par $\mathrm{fmax}\,\pi$ (*resp.*, $\mathrm{gmax}\,\pi$, $\mathrm{hmax}\,\pi$) le nombre des entiers i, $1 \le i \le n$, tels que $f(i)=\omega(i-1)$ (*resp.*, $g(i)=\omega(i-1)$, $h(i)=\omega(i-1)$) et le pas $(\omega(i-1),\omega(i))$ est une descente. On note $\mathrm{xpal}\,\pi$ (*resp.*, $\mathrm{ypal}\,\pi$, $\mathrm{zpal}\,\pi$) le nombre des x-paliers (*resp.*, y-paliers, z-paliers) de γ et $\mathrm{xmoy}\,\pi$ (*resp.*, $\mathrm{ymoy}\,\pi$, $\mathrm{zmoy}\,\pi$) le nombre des entiers i, $1 \le i \le n$, tels que $f(i)=g(i)=h(i)=0$ et le i[e] pas $(\omega(i-1),\omega(i))$ est un x-palier (*resp.*, y-parlier, z-parlier). Posons

$$\begin{aligned} \alpha(\pi) &= \mathrm{fmin}\,\pi + \mathrm{hmax}\,\pi + \mathrm{xpal}\,\pi + \mathrm{ymoy}\,\pi,\\ \beta(\pi) &= \mathrm{gmin}\,\pi + \mathrm{fmax}\,\pi + \mathrm{ypal}\,\pi + \mathrm{zmoy}\,\pi,\\ \gamma(\pi) &= \mathrm{hmin}\,\pi + \mathrm{gmax}\,\pi + \mathrm{zpal}\,\pi + \mathrm{xmoy}\,\pi. \end{aligned} \tag{15}$$

On déduit donc du Corollaire 2 et du (14) que

$$F_{n+1}(x,y,z) = \sum_{\pi \in \mathcal{C}_n} x^{\alpha(\pi)} y^{\beta(\pi)} z^{\gamma(\pi)}. \tag{16}$$

Montrons maintenant que la symétrie ternaire de $F_{n+1}(x,y,z)$ est facile à voir sur l'interprétation combinatoire (16). Autrement dit, nous construisons deux involutions sur $\mathcal{C}_n$ dont l'une échangeang les paramètres α et β en conservant γ et l'autre échangeang β et γ en conservant α.

Voici une involution φ sur $\mathcal{C}_n$ telle que

$$\alpha(\pi) = \beta(\pi'), \qquad \beta(\pi) = \alpha(\pi'), \qquad \gamma(\pi) = \gamma(\pi'), \qquad \forall \pi \in \mathcal{C}_n, \tag{17}$$

où $\pi' = \varphi(\pi)$.

Etant donné $\pi = (\omega,f,g,h) \in \mathcal{C}_n$, on construit $\pi' = (\omega',f',g',h') = \varphi(\pi) \in \mathcal{C}_n$ comme suit :

(i) si $(\omega(i-1),\omega(i))$ est un x-palier (*resp.*, z-palier) et $f(i)=g(i)=h(i)=0$, alors $(\omega'(i-1),\omega'(i))$ est un z-palier (*resp.*, x-palier) et $f'(i)=g'(i)=h'(i)=0$;

(ii) si $(\omega(i-1),\omega(i))$ est un x-palier (*resp.*, y-palier) et $f(i)=g(i)=h(i)=k\neq 0$, alors $(\omega'(i-1),\omega'(i))$ est un y-palier (*resp.*, x-palier) et $f'(i)=g'(i)=h'(i)=k$;

(iii) si $(\omega(i-1),\omega(i))$ est une descente et $f(i)=0$ (*resp.*, $\omega(i-1)$), alors $(\omega'(i-1),\omega'(i)) = (\omega(i-1),\omega(i))$ et $f'(i)=\omega(i-1)$ (*resp.*, 0), $g'(i)=\omega(i-1)-g(i)$, $h'(i)=\omega(i-1)-h(i)$;

(iv) dans tous les autres cas, on définit

$$((\omega'(i-1),\omega'(i)),f'(i),g'(i),h'(i)) = ((\omega(i-1),\omega(i)),f(i),g(i),h(i)).$$

Il est clair que φ est une involution sur $\mathcal{C}_n$ satisfaisant (17).

Dans l'involution ci-dessus, si l'on remplace respectivement x, y, z par y, z, x dans (i), (ii) et f, g, h par g, h, f dand (iii), on obtient une involution sur $\mathcal{C}_n$ qui echange β et γ en conservant α.

BIBLIOGRAPHIE

[Ca] Carlitz (L.). — *Explicit formulas for the Dumont-Foata polynomials*, Disc. Math., t. **30**, 1980, p. 211–225.

[Du1] Dumont (D.). — *Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi*, Duke Math. J., t. **41 (2)**, 1974, p. 305–318.

[Du2] Dumont (D.). — *Conjectures sur des symétries ternaires liées aux nombres de Genocchi*, à paraître dans les Actes du 4e colloque de Séries formelles et combinatoire algébrique, Publ. de l'UQAM, 1992.

[Du-Fo] Dumont (D.) et Foata (D.). — *Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi*, Bull. Soc. Math. France, t. **104**, 1976, p. 433–451.

[Du-Ra] Dumont (D.) et Randrianarivony (A.). — *Sur une extension des nombres de Genocchi*, manuscrit, 1992.

[Fl] Flajolet (P.). — *Combinatorial aspects of continued fractions*, Disc. Math., t. **32**, 1980, p. 125–161.

[Ha] Han (G.). — Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi et propriétés de symétrie, *Actes de l'atelier de combinatoire franco-québecois*, Publ. du LACIM, vol. 10, p. 119–133, 1992.

[Ra] Randrianarivony (A.). — Sur une extension des polynômes de Dumont-Foata, manuscrit, 1992.

[Vi] Viennot (G.). — Théorie combinatoire des nombres d'Euler et de Genocchi, *Séminaire de Théorie des nombres*, exposé $n^o 11$, Publ. de l'Université de Bordeaux I, 1980.

[Wa] Wall (H. S.). — *Analytic theory of continued fractions.* — Chelsea, New York, 1967.

Département de Mathématiques
Université Louis-Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France
Email : jzeng@math.u-strasbg.fr

LIST OF REVIEWERS

J.-P. Allouche
E. Barcucci
A. Barlotti
A. Barvinok
A. Beutelspacher
F. Bergeron
A. Bjorner
F. Brenti
S. Brlek
G. Butler
H. Cohen
R. Cori
M. Delest
L. Devroye
G. Duchamp
S. Dulucq
H. Eriksson
K. Eriksson
J.-M. Fedou
P. Flajolet
D. Ford
A. Fraenkel
A. Garsia
I. Gessel
D. Gouyou-Beauchamps
L. Habsieger
R. Johnson
A. Kerber
D. Krob
J. Labelle
P. Lalonde
C. Lam
A. Lascoux
B. Leclerc
P. Leroux
B. Lindstrom
D. Loeb
G. Melancon
F. Mignosi
M. Okada
M. Olivier
J. Opatrny
J.-G. Penaud
R. Pinzani
M. Regnier
V. Reiner
A. Restivo
C. Reutenauer
L. W. Shapiro
R. Simion
E. Sopena
R. Sprugnoli
V. Strehl
J.-Y. Thibon
M. Troyanov
T. Walsh
D. Zeilberger