Une généralisation automorphe des nombres de Stirling

Ivan Constantineau* et Gilbert Labelle
LACIM, dép. math-info, UQAM.

Abstract. Let $[n]$ be the set $\{1,2,...,n\}$ and σ a given permutation of S_n, the symmetric group on $[n]$. The Stirling numbers of the first kind are used to enumerate the permutations on $[n]$ with k cycles and those of the second kind give the number of partitions of $[n]$ having k blocks. In this paper we compute the number of permutations on $[n]$ with k cycles and the number of partitions on $[n]$ having k blocks that are fixed under the action of σ (i.e. for which σ is an automorphism). These numbers give a natural generalization of Stirling numbers of the first and second kind.

Résumé. Soit $[n]$ l'ensemble $\{1,2,...,n\}$ et soit σ une permutation de S_n, le groupe symétrique sur $[n]$. La cardinalité de l'ensemble des permutations de $[n]$ ayant k cycles est donnée par les nombres de Stirling de première sorte (non-signés) et celle de l'ensemble des partitions de $[n]$ ayant k parts par ceux de deuxième sorte. Dans cet article, nous calculons le nombre des permutations sur $[n]$ à k cycles et de partitions sur $[n]$ ayant k parts qui sont fixées par l'action de σ (c'est-à-dire pour lesquelles σ est un automorphisme). Nous obtenons ainsi une généralisation naturelle des nombres de Stirling de première et deuxième sorte.

§0. Introduction.

Pour tous entiers n, k tels que $0 \leq k \leq n$, les nombres de Stirling de première sorte non-signés $\mathrm{c}(n,k)$ et ceux de deuxième sorte $\mathrm{S}(n,k)$ énumèrent respectivement les permutations de $[n]$ ayant k cycles et les partitions de $[n]$ ayant k parts.

Nous dénotons Per_k l'espèce des *permutations à k cycles* et Par_k celle des *partitions à k parts* . Les séries génératrices de ces espèces sont données par les expressions suivantes:

$$\mathrm{Per}_k(x) = \frac{\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^k}{k!} = \sum_{n\geq 0} \mathrm{c}(n,k)\frac{x^n}{n!} \tag{1}$$

et

$$\mathrm{Par}_k(x) = \frac{(e^x-1)^k}{k!} = \sum_{n\geq 0} \mathrm{S}(n,k)\frac{x^n}{n!}\ . \tag{2}$$

On a

$$\sum_{k\geq 0} \mathrm{Per}_k(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad \sum_{k\geq 0} \mathrm{Par}_k(x) = e^{(e^x-1)}. \tag{3}$$

Les équations (1) et (2) sont classiques et peuvent être déduites respectivement des formules combinatoires

$$\mathrm{Per}_k = \mathrm{Exp}_k \circ \mathrm{Cyc} \quad \text{et} \quad \mathrm{Par}_k = \mathrm{Exp}_k \circ \mathrm{Exp}_+ \tag{4}$$

où Exp_k est l'espèce des *ensembles de cardinalité k*, Cyc l'espèce des *permutations circulaires*, Exp_+ celle des *ensembles non-vides* et "$\circ$" le *composé partitionnel* des espèces.

Définition. *Pour tous entiers $n \geq k \geq 0$ et toute permutation σ de $[n]$, les nombres de Stirling généralisés automorphes de première sorte, dénotés $c(\sigma, k)$, et ceux de deuxième sorte, dénotés $S(\sigma, k)$, sont définis respectivement par*

$$c(\sigma, k) = \mathrm{fix}(\mathrm{Per}_k[\sigma]) \quad et \quad S(\sigma, k) = \mathrm{fix}(\mathrm{Par}_k[\sigma]) \tag{5}$$

où $\mathrm{fix}(\mathrm{Per}_k[\sigma])(\mathrm{fix}(\mathrm{Par}_k[\sigma]))$ est le nombre de Per_k-structures (Par_k-structures) laissées fixes par conjugaison avec la permutation σ (réétiquetage selon σ).

Les nombres $c(\sigma, k)$ et $S(\sigma, k)$ ne dépendent en fait que du *type* de la permutation σ. Si τ est un partage d'entier on pose $c(\tau, k) = c(\sigma, k)$ où σ est une permutation arbitraire de type τ. On définit $S(\tau, k)$ de la même manière.

Dans cet article nous calculons des récurrences satisfaites par les nombres $c(\sigma, k)$ et $S(\sigma, k)$ que nous exhibons aussi sous forme close. Nous obtenons les récurrences de deux manières distinctes: d'abord, formellement, en nous servant des séries indicatrices de l'espèce des permutations à cycles de poids t, $\mathrm{Per}_{(t)}$, et celle des partitions à parts de poids t, $\mathrm{Par}_{(t)}$, puis, combinatoirement, en examinant les structures énumérées par $c(\sigma, k)$ et $S(\sigma, k)$.

Ces récurrences sont des généralisations de récurrences bien connues satisfaites par les nombres de Stirling usuels. Dans le cas des nombres de Stirling de première sorte, il s'agit de la relation

$$c(n+1, k) = c(n, k-1) + nc(n, k), \tag{6}$$

alors que pour ceux de deuxième sorte, on généralise plutôt l'identité

$$S(n+1, k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S(n-i, k-1). \tag{7}$$

Nous terminons l'article en présentant des q-analogues automorphes des nombres de Stirling de première sorte, $c_q(n, k)$, et deuxième sorte, $S_q(n, k)$, obtenus à l'aide des séries indicatrices correspondantes. Ils diffèrent des q-analogues "classiques" $c_q[n, k]$ et $S_q[n, k]$ (que l'on peut retrouver, par exemple, dans [4]).

De même, il est à noter que les généralisations automorphes développées ici sont tout à fait distinctes de celles obtenues dans [1], [4], [8], [9].

§1. Les nombres de Stirling automorphes de première sorte.

Dénotons par $\mathrm{Cyc}_{(t)}$ l'espèce des *permutations circulaires* de poids t et $\mathrm{Per}_{(t)} = \mathrm{Exp} \circ \mathrm{Cyc}_{(t)}$ l'espèce des *permutations* pondérées correspondante. Le poids d'une permutation ayant k cycles est donc t^k. On a

$$Z_{\mathrm{Per}_{(t)}} = \sum_{\tau} p_\tau(t) \frac{x_1{}^{\tau_1} x_2{}^{\tau_2} x_3{}^{\tau_3} \cdots}{1^{\tau_1}\tau_1! 2^{\tau_2}\tau_2! \cdots n^{\tau_n}\tau_n!} = \sum_{\tau} p_\tau(t) \frac{\mathbf{x}^\tau}{\mathrm{Aut}(\tau)} \tag{8}$$

où la somme parcourt l'ensemble des partages d'entiers τ (de type $1^{\tau_1}2^{\tau_1}3^{\tau_3}\cdots$) et où le polynôme $p_\tau(t)$ est donné par l'expression suivante:

$$p_\tau(t) = \sum_{k=0}^{n} c(\tau, k) t^k, \quad n = \tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 + \cdots \tag{9}$$

La série indicatrice $Z_{\mathrm{Cyc}_{(t)}}$ de $\mathrm{Cyc}_{(t)}$ est obtenue de celles des cycles ordinaires Z_{Cyc} en multipliant cette dernière par t,

$$Z_{\mathrm{Cyc}_{(t)}} = tZ_{\mathrm{Cyc}} = t\sum_{k\geq 1}\frac{\phi(k)}{k}\log\frac{1}{1-x_k}. \tag{10}$$

Puisqu'on a la relation $\mathrm{Per}_{(t)} = \mathrm{Exp} \circ \mathrm{Cyc}_{(t)}$, on obtient de (8) et (10)

$$\sum_{\tau}\mathrm{p}_{\tau}(t)\frac{\mathbf{x}^{\tau}}{\mathrm{Aut}(\tau)} = Z_{\mathrm{Exp}} \circ tZ_{\mathrm{Cyc}} = \exp\left(\sum_{\nu\geq 1}\frac{1}{\nu}x_{\nu}\right)\circ\left(t\sum_{k\geq 1}\frac{\phi(k)}{k}\log\frac{1}{1-x_k}\right). \tag{11}$$

Cette dernière expression (voir [5], p. 31, pour la formule de la substitution pléthystique pondérée) se transforme comme suit:

$$Z_{\mathrm{Exp}} \circ tZ_{\mathrm{Cyc}} = \exp\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(\sum_{k\nu=n}t^{\nu}\phi(k)\log\frac{1}{1-x_n}\right) = \exp\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\log\frac{1}{1-x_n}\sum_{d|n}\phi(d)t^{n/d}$$

$$= \prod_{n\geq 1}\left(\frac{1}{1-x_n}\right)^{\frac{1}{n}\sum_{d|n}\phi(d)t^{n/d}} = \prod_{n\geq 1}(1-x_n)^{-\omega_n(t)} = \prod_{n\geq 1}\left(\sum_{\tau_n\geq 0}\omega_n(t)^{<\tau_n>}\frac{x_n^{\tau_n}}{\tau_n!}\right) \tag{12}$$

où $\omega_n(t) = \dfrac{1}{n}\sum_{d|n}\phi(d)t^{n/d}$ et où l'expression $a^{<n>}$ désigne la puissance factorielle montante habituelle:

$$a^{<n>} = a(a+1)\cdots(a+n-1) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{c}(n,k)a^k. \tag{13}$$

En développant le dernier terme de (12) on trouve

$$\prod_{n\geq 1}\left(\sum_{\tau_n\geq 0}\omega_n(t)^{<\tau_n>}\frac{x_n^{\tau_n}}{\tau_n!}\right) = \sum_{\tau_1,\tau_2,\ldots}\omega_1(t)^{<\tau_1>}\omega_2(t)^{<\tau_2>}\cdots\frac{x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}\cdots}{\tau_1!\tau_2!\cdots}$$

$$= \sum_{\tau_1,\tau_2,\ldots}1^{\tau_1}2^{\tau_2}\cdots\omega_1(t)^{<\tau_1>}\omega_2(t)^{<\tau_2>}\cdots\frac{x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}\cdots}{1^{\tau_1}2^{\tau_2}\cdots\tau_1!\tau_2!\cdots}. \tag{14}$$

Proposition 1. *Pour tout entier $n\geq 0$ et tout partage τ de n on a*

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{c}(\tau,k)t^k = 1^{\tau_1}2^{\tau_2}\cdots\omega_1(t)^{<\tau_1>}\omega_2(t)^{<\tau_2>}\cdots \tag{15}$$

Preuve. Il suffit d'identifier les coefficients de $\mathbf{x}^{\tau}$ dans (8) et (14). □

Par analogie avec (13) on définit alors, pour toute permutation σ

$$t^{<\sigma>} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{c}(\sigma, k) t^k. \tag{16}$$

Fixons n, i deux entiers. Soient σ une permutation de $N \subset [n+i]$, $|N| = n$, de type $\prod_i i^{\sigma_i}$ et I une permutation circulaire de $[n+i] \backslash N$ ($|I| = i$). Alors la formule bien connue

$$t^{<n+1>} = t^{<n>}(t+n) \tag{17}$$

se généralise, avec (15) et (16), comme suit:

$$t^{<\sigma+I>} = \sum_{k=0}^{n+i} \mathrm{c}(\sigma+I, k) t^k = i(\omega_i(t) + \sigma_i) \sum_{\nu=0}^{n} \mathrm{c}(\sigma, \nu) t^\nu = i(\omega_i(t) + \sigma_i) t^{<\sigma>}. \tag{18}$$

Proposition 2. *Les nombres de Stirling automorphes de première sorte* $\mathrm{c}(\sigma, k)$ *satisfont la récurrence suivante:*

$$\mathrm{c}(\sigma + I, k) = i\sigma_i \ \mathrm{c}(\sigma, k) + \sum_{d|i, d \geq i/k} \phi(d) \mathrm{c}(\sigma, k - i/d). \tag{19}$$

où $\sigma + I$ *désigne la permutation* σ *augmentée d'un cycle* I *de longueur* i.

Preuve. Il suffit de développer le terme

$$i(\omega_i(t) + \sigma_i) \sum_{\nu=0}^{n} \mathrm{c}(\sigma, \nu) t^\nu$$

dans (18) et d'en extraire le coefficient de t^k pour retrouver (19). □

Remarque. Lorsque, dans (19), σ est l'identité et I un point fixe, on retrouve bien (6).

Démonstration combinatoire de (19). Soit σ une permutation de $[n]$. L'un de nous a déjà montré dans [3] qu'à toute permutation f laissée fixe par conjugaison avec σ (c.-à-d. $f \in \mathrm{Fix}[\mathrm{Per}(\sigma)]$), on peut associer un couple de fonctions (δ_f, Δ_f) où δ_f est une permutation de l'ensemble $\mathbf{C}(\sigma)$ des cycles de σ, définie par

$$\forall C, D \in \mathbf{C}(\sigma),\ \delta_f(C) = D \ ssi \ f(C) = D,$$

et où $\Delta_f : \mathbf{C}(\sigma) \to [n]$ est définie par $\Delta_f(C) = f(\min(C))$.

Lorsqu'on fait varier f dans $\mathrm{Fix}[\mathrm{Per}(\sigma)]$, l'ensemble des couples (δ_f, Δ_f) obtenu, dénoté $\mathrm{Sim}(\mathrm{Per}; \sigma)$, est entièrement caractérisé par les deux conditions suivantes:

1. $\forall C_1, C_2 \in \mathbf{C}(\sigma)$, $\delta(C_1) = C_2 \Rightarrow |C_1| = |C_2|$ (δ permute des cycles de même longueur);

2. $\forall C \in \mathbf{C}(\sigma), \Delta(C)$ est arbitrairement choisi dans $\delta(C)$.

La correspondance $f \mapsto (\delta_f, \Delta_f)$ est alors une bijection de Fix[Per(σ)] dans Sim(Per; σ) que nous dénotons Φ_σ. On pose $\mathrm{Sim}(\mathrm{Per}_k;\sigma) = \Phi_\sigma(\mathrm{Fix}[\mathrm{Per}_k(\sigma)])$. Il s'avère que la récurrence (19) s'interprète immédiatement en termes des couples $(\delta, \Delta) \in \mathrm{Sim}(\mathrm{Per}_k;\sigma)$.

Soit σ une permutation de $[n]$ à laquelle on adjoint un cycle I de longueur i pour obtenir une permutation de $[n+i]$, dénotée $\sigma+I$. Construisons l'ensemble $\mathrm{Sim}(\mathrm{Per}_k;\sigma+I)$.

Nous savons que $\delta(I)$ ne peut être défini que dans des cycles de longueur i de $\sigma + I$. On distingue deux cas, selon que $\delta(I) = I$ ou non.

Si $\delta(I) = I$ alors il y a, pour tout diviseur d de i, $\phi(d)$ manières de définir $\Delta(I)$ dans I qui auront comme effet de produire, via $(\Phi_{\sigma+I})^{-1}$, une permutation des éléments de I (fixée par I) ayant exactement i/d cycles (voir [2]). Pour obtenir une permutation ayant k cycles laissée fixe par $\sigma + I$, dans le cas où on aura déterminé, dans $(\Phi_{\sigma+I})^{-1}(\delta,\Delta)$, i/d cycles avec I, il faut donc et il suffit que la permutation de $[n]$ laissée fixe par σ ait elle-même $k - (i/d)$ cycles au total. Il y a donc

$$\sum_{d|i,d\geq i/k} \phi(d)\mathrm{c}(\sigma, k - i/d) \qquad (20)$$

façons de construire les couples $(\delta, \Delta) \in \mathrm{Sim}(\mathrm{Per}_k;\sigma + I)$ lorsque $\delta(I) = I$.

Lorsque $\delta(I) = J \neq I$, on peut choisir $\Delta(I)$ arbitrairement dans J. De plus, à condition que $|J| = i$, le choix de J est lui aussi arbitraire dans l'ensemble des cycles de longueur i de σ. Puisque ces choix n'altèrent pas le nombre de cycles obtenu dans $(\Phi_{\sigma+I})^{-1}(\delta_{|\sigma}, \Delta_{|\sigma})$ on a $i\sigma_i$ manières de construire les couples (δ, Δ) lorsque $\delta(I) \neq I$. En sommant ce résultat avec celui obtenu en (20), on obtient bien (19). □

§2. Les nombres de Stirling automorphes de seconde sorte.

Dénotons par $(\mathrm{Exp}_+)_{(t)}$ l'espèce des *ensembles non-vides* de poids t et $\mathrm{Par}_{(t)} = \mathrm{Exp} \circ (\mathrm{Exp}_+)_{(t)}$ l'espèce des *partitions* pondérées correspondantes. Le poids d'une partition ayant k parts est donc t^k. Les analogues de (8) et (9) pour les nombres de Stirling automorphes de deuxième sorte s'écrivent alors

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{Par}_{(t)}} = \sum_\tau \mathrm{q}_\tau(t) \frac{\mathbf{x}^\tau}{\mathrm{Aut}(\tau)} \qquad (21)$$

où, pour tout partage τ,

$$\mathrm{q}_\tau(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}(\tau, k)t^k, \quad n = \tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 + \cdots \quad . \qquad (22)$$

On a donc

$$\mathrm{S}(\tau, k) = \left[t^k \frac{\mathbf{x}^\tau}{\mathrm{Aut}(\tau)}\right] \mathrm{Z}_{\mathrm{Par}_{(t)}} = \left[\frac{\mathbf{x}^\tau}{\mathrm{Aut}(\tau)}\right] [t^k]\mathrm{Z}_{\mathrm{Par}_{(t)}} \ . \qquad (23)$$

Pour tout entier $m \geq 1$, pour toute série λ à une infinité de variable $\lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ on désigne par $[\lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots)]_m$ la série λ_m obtenue de λ en substituant, pour tout i la variable x_{mi} à la variable x_i, $\lambda_m(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \lambda(x_m, x_{2m}, x_{3m}, \ldots)$.

Lemme 3. *Pour toute espèce pondérée F_w telle que $F_w[\emptyset] = \emptyset$ on a*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{Z}_{\mathrm{Exp}}(\mathrm{Z}_{F_w}) = \mathrm{Z}_{\mathrm{Exp}}(\mathrm{Z}_{F_w}) \, \frac{1}{j} \sum_{\nu|j} \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathrm{Z}_{F_{w^{j/\nu}}}(x_1, x_2, \ldots) \right]_{j/\nu} \tag{24}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{Z}_{\mathrm{Exp}}(\mathrm{Z}_{F_w}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \exp\left\{ \sum_{i\geq 1} \frac{\mathrm{Z}_{F_{w^i}}(x_i, x_{2i}, \ldots)}{i} \right\} \\
&= \exp\left\{ \sum_{i\geq 1} \frac{\mathrm{Z}_{F_{w^i}}(x_i, x_{2i}, \ldots)}{i} \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \sum_{i\geq 1} \frac{\mathrm{Z}_{F_{w^i}}(x_i, x_{2i}, \ldots)}{i} \right\} \\
&= \mathrm{Z}_{\mathrm{Exp}}(\mathrm{Z}_{F_w}) \sum_{i|j} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{Z}_{F_{w^i}}(x_i, x_{2i}, \ldots) \\
&= \mathrm{Z}_{\mathrm{Exp}}(\mathrm{Z}_{F_w}) \sum_{i|j} \frac{1}{i} \left[\frac{\partial}{\partial x_{j/i}} \mathrm{Z}_{F_{w^i}}(x_1, x_2, \ldots, x_{j/i}, \ldots) \right]_i .
\end{aligned} \tag{25}$$

En posant $j/i = \nu$ dans la dernière expression on retrouve (24). □

Puisque $\mathrm{Par}_{(t)} = \mathrm{Exp} \circ (\mathrm{Exp}_+)_{(t)}$, on déduit du lemme 3, avec $F_w = (\mathrm{Exp}_+)_{(t)}$, que

$$j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{Z}_{\mathrm{Par}_{(t)}} = \mathrm{Z}_{\mathrm{Par}_{(t)}} \sum_{\nu|j} \left[\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathrm{Z}_{(\mathrm{Exp}_+)_{(t^{j/\nu})}} \right]_{j/\nu} . \tag{26}$$

Or, puisque $\mathrm{Z}_{\mathrm{Exp}_+} = \mathrm{Z}_{\mathrm{Exp}} - 1 = \exp(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \cdots) - 1$, on a

$$\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathrm{Z}_{(\mathrm{Exp}_+)} = \mathrm{Z}_{\mathrm{Exp}} \ , \nu = 1, 2, 3, \ldots \ . \tag{27}$$

D'où l'on tire

$$\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathrm{Z}_{(\mathrm{Exp}_+)_{t^{j/\nu}}} = t^{j/\nu} \mathrm{Z}_{\mathrm{Exp}}, \tag{28}$$

pour obtenir, en substituant (28) dans (26) et remplaçant j/ν par d,

$$j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{Z}_{\mathrm{Par}_{(t)}} = \mathrm{Z}_{\mathrm{Par}_{(t)}} \sum_{d|j} t^d (\mathrm{Z}_{\mathrm{Exp}})_d . \tag{29}$$

Par ailleurs, on a

$$j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{Z}_{\mathrm{Par}_{(t)}} = j \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{\tau} \mathrm{fix}(\mathrm{Z}_{\mathrm{Par}_{(t)}}[\tau]) \frac{\mathbf{x}^\tau}{\mathbf{Aut}(\tau)} = \sum_{\tau} \mathrm{fix}(\mathrm{Z}_{\mathrm{Par}_{(t)}}[\tau + j]) \frac{\mathbf{x}^\tau}{\mathbf{Aut}(\tau)} . \tag{30}$$

où $\tau + j$ désigne un partage d'entier τ auquel on a ajouté une part de cardinalité j. Donc. avec (23), (29) et (3), on a

$$S(\tau + j, k) = \left[\frac{\mathbf{x}^{\tau}}{\mathbf{Aut}(\tau)}\right][t^k]Z_{\mathrm{Par}_{(t)}} \sum_{d|j} t^d (Z_{\mathrm{Exp}})_d. \tag{31}$$

Proposition 4. *Les nombres de Stirling automorphes de deuxième sorte* $S(\tau, k)$, *satisfont la récurrence suivante:*

$$S(\tau + j, k) = \sum_{\substack{d|j \\ d\leq k}} \sum_{\substack{0\leq\gamma_d\leq\tau_d \\ 0\leq\gamma_{2d}\leq\tau_{2d} \\ \cdots}} d^{|\gamma|} \binom{\tau_d}{\gamma_d}\binom{\tau_{2d}}{\gamma_{2d}} \cdots \; S(\tau - (\gamma : d), k - d) \tag{32}$$

où $|\gamma| = \sum_{i\geq 1} \gamma_{id}$, $(\gamma : d) = (0, \ldots, 0, \gamma_d, 0, \ldots, 0, \gamma_{2d},, 0, \ldots, 0, \gamma_{3d}, \ldots)$ *est un partage d'entier dont le nombre de parts de cardinalité non divisible par* d *est nul et où* $\tau + j$ *désigne un partage d'entier* τ *auquel on a ajouté une part de cardinalité* j.

Preuve. On a

$$Z_{\mathrm{Par}_{(t)}} = \sum_{k,\tau} t^k S(\tau, k) \frac{\mathbf{x}^{\tau}}{\mathbf{Aut}(\tau)}. \tag{33}$$

Ainsi,

$$[t^k]Z_{\mathrm{Par}_{(t)}} \cdot \sum_{d|j} t^d (Z_{\mathrm{Exp}})_d = \sum_{\substack{d|j \\ d\leq k}} \left(\sum_{\tau} S(\tau, k-d) \frac{\mathbf{x}^{\tau}}{\mathbf{Aut}(\tau)} \right) \cdot (Z_{\mathrm{Exp}})_d. \tag{34}$$

En regard de (31), on peut donc écrire

$$S(\tau + j, k) = \sum_{\substack{d|j \\ d\leq k}} \left[\frac{\mathbf{x}^{\tau}}{\mathbf{Aut}(\tau)}\right] \left(\sum_{\tau} S(\tau, k-d) \frac{\mathbf{x}^{\tau}}{\mathbf{Aut}(\tau)} \right) \left(\sum_{\tau} 1 \frac{\mathbf{x}^{\tau}}{\mathbf{Aut}(\tau)} \right)_d. \tag{35}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\tau} \frac{\mathbf{x}^{\tau}}{\mathbf{Aut}(\tau)} \right)_d &= \sum_{\tau} \frac{x_d^{\tau_1} x_{2d}^{\tau_2} \cdots x_{nd}^{\tau_n}}{1^{\tau_1}\tau_1! 2^{\tau_2}\tau_2! \cdots n^{\tau_n}\tau_n!} \\
&= \sum_{\tau} d^{\tau_1} d^{\tau_2} \cdots d^{\tau_n} \frac{x_d^{\tau_1} x_{2d}^{\tau_2} \cdots x_{nd}^{\tau_n}}{(d1)^{\tau_1}\tau_1!(d2)^{\tau_2}\tau_2! \cdots (dn)^{\tau_n}\tau_n!} \\
&= \sum_{\tau} d^{|\tau|} \frac{x_d^{\tau_1} x_{2d}^{\tau_2} \cdots x_{nd}^{\tau_n}}{(1d)^{\tau_1}\tau_1!(2d)^{\tau_2}\tau_2! \cdots (nd)^{\tau_n}\tau_n!},
\end{aligned} \tag{36}$$

on obtient (32) directement de (35), (36) et de la définition du produit (de Cauchy) de séries indicatrices de cycles. □

Version combinatoire de (32). Nous montrons la récurrence suivante (équivalente à (32)):

$$\mathrm{S}(\sigma + J, k) = \sum_{\substack{d|j \\ d\leq k}} \sum_{\substack{T\subset \mathrm{C}(\sigma) \\ d|pgcd(T)}} d^{|T|}\mathrm{S}(\sigma - T, k - d). \tag{37}$$

où $\sigma + J$ est la permutation σ augmentée d'un cycle J de longueur j et où $\mathrm{C}(\sigma)$ désigne l'ensemble des cycles de σ .

Nous avons déjà décrit dans [2] (voir aussi [5]) comment construire les partitions d'un ensemble fini U laissées fixes par une permutation σ de U:

1. On commence par se donner une partition Π de $\mathrm{C}(\sigma)$.
2. Pour chacune des classes $C \in \Pi$, on trouve le pgcd de toutes les longueurs des cycles contenus dans C, que l'on dénote pgcd(C).
3. Pour toute classe $C \in \Pi$ et tout $d|$pgcd(C) on divise en d "morceaux" chacun des cycles de C de manière convenable et on a alors $d^{|C|-1}$ façons de recoller ces morceaux pour en faire une partition de l'ensemble sous-jacent à C en d classes qui est laissée fixe par la sous-permutation C de σ.

Cette construction permet d'énumérer le nombre *total* de partitions de $[n]$ (sans égard au nombre de classes qu'elles peuvent contenir) laissées fixes par la permutation σ donnée. On a :

$$\mathrm{fix}[\mathrm{Par}(\sigma)] = \sum_{\pi\in \mathrm{Par}[\mathrm{C}(\sigma)]} \prod_{C\in\pi} \sum_{d|pgcd(C)} d^{|C|-1} . \tag{38}$$

L'interprétation que nous donnons à (37) est basée sur cette construction.

Supposons donnée une permutation σ de $[n]$ et ajoutons-lui un cycle J de longueur $|J| = j$ pour obtenir une permutation $\sigma + J$ de $[n + j]$. Soit π une partition de l'ensemble $\mathrm{C}(\sigma + J)$. Alors le cycle J est contenu dans une classe $C \in \pi$ contenant un sous-ensemble T (possiblement vide) de $\mathrm{C}(\sigma)$, $C = \{J\} \cup T$. Nous savons que pour tout $d|$pgcd(C), il y a $d^{|C|-1} = d^{|T|}$ manières de construire une partition en d parts de l'ensemble sous-jacent à C laissée fixe par C. De plus, puisque $d|$pgcd(C), on a $d|j$.

Maintenant, si on obtient d parts avec la classe C et si on veut en obtenir k au total, il reste à construire les partitions à $k - d$ parts laissées fixes par $\sigma - T$. Cela se fait de $\mathrm{S}(\sigma - T, k - d)$ manières et on obtient directement la formule (37). □

Remarque. Pour établir la correspondance entre (32) et (37) il suffit de constater que la seconde sommation de (32) parcourt un ensemble de *types* (de permutations) tandis que celle de (37) parcourt l'ensemble des permutations elle-mêmes.

Les mêmes techniques permettent d'obtenir les formules explicites suivantes pour les nombres de Stirling automorphes des deux sortes. On a

$$\mathrm{c}(\sigma,k)=\sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\\ \sum k_i=k}}\prod_{i=1}^{n}\xi_i(\sigma_i,k_i), \tag{39}$$

où

$$\xi_i(\sigma_i,k_i)=\sum_{j=1}^{\sigma_i}\mathrm{c}(\sigma_i,j)i^{\sigma_i-j}\sum_{\substack{(d_1,d_2,\ldots,d_j)\\ d_s|i,\ \sum_s d_s=k_i}}\phi(\frac{i}{d_1})\phi(\frac{i}{d_2})\cdots\phi(\frac{i}{d_j}), \tag{40}$$

et

$$\mathrm{S}(\sigma,k)=\sum_{\pi\in Par(\mathrm{C}(\sigma))}\sum_{\substack{\{d_c\}_{c\in\pi}\\ d_c|pgcd(c),\ \sum_{c\in\pi}d_c=k}}\prod_{c\in\pi}d_c^{|c|-1}. \tag{41}$$

§3. q-analogues automorphes des nombres de Stirling.

On définit, dans [5], la q-série d'une espèce de structures pondérée F_w, à l'aide de la substitution principale $x_i \leftarrow \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}$, en posant

$$F_w(x,q)=\sum_{n\geq 0}|F_w[n]|_q\frac{x^n}{n!_q}=Z_{F_w}(x_1,x_2,x_3,\ldots)\Big|_{x_i=\frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}}. \tag{42}$$

Si G_v est une espèce pondérée et si $F_w[\emptyset]=\emptyset$, on a, sous composition partitionnelle,

$$(G_v\circ F_w)(x;q)=Z_{G_v}(F_w(x_1;q),F_{w^2}(x_2;q^2),F_{w^3}(x_3;q^3),\ldots)\Big|_{x_i=\frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}}. \tag{43}$$

En particulier, lorsque $G_v=\mathrm{Exp}$,

$$(\mathrm{Exp}\circ F_w)(x;q)=\exp\Big(\sum_{k\geq 1}F_{w^k}(x_k;q^k)/k\Big)\Big|_{x_i=\frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}}. \tag{44}$$

Avec $F_w=\mathrm{Cyc}_{(t)}$ et $F_w=(\mathrm{Exp}_+)_{(t)}$ substitués dans (44) on obtient respectivement les q-analogues automorphes des nombres Stirling de première et deuxième sorte, par extraction de coefficients:

$$\mathrm{c}_q(n,k)=n!_q[x^nt^k]\prod_{n\geq 1}\frac{1}{\Big(1-\frac{(1-q)^n x^n}{1-q^n}\Big)^{\omega_n(t)}}, \tag{45}$$

$$\mathrm{S}_q(n,k)=n!_q[x^nt^k]\exp\Big(\sum_{n\geq 1}\Big(\sum_{km=n}\frac{t^k}{k(1-q^k)(1-q^{2k})\cdots(1-q^{mk})}\Big)(1-q)^nx^n\Big). \tag{46}$$

Le tableau suivant montre bien que les q-analogues automorphes des nombres de Stirling sont distincts des q-analogues classiques.

n	k	$c_q(n,k)$	$c_q[n,k]$	$S_q(n,k)$	$S_q[n,k]$
0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1
3	0	0	0	0	0
3	1	q^3+1	$q+1$	1	1
3	2	q^2+q+1	$q+2$	q^2+q+1	$q+2$
3	3	1	1	1	1
4	0	0	0	0	0
4	1	$q^5+2q^4+q^3+q^2+1$	q^3+2q^2+2q+1	1	1
4	2	$q^6+q^5+2q^4+2q^3+2q^2+q+2$	q^3+3q^2+4q+3	$q^4+q^3+2q^2+q+2$	q^2+3q+3
4	3	$q^4+q^3+2q^2+q+1$	q^2+2q+3	$q^4+q^3+2q^2+q+1$	q^2+2q+3
4	4	1	1	1	1

Bibliographie

[1] L. Comtet. *Nombres de Stirling généraux et fonctions symétriques*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275 (1972) Série A, 747-750.

[2] I. Constantineau. *Auto-similarité dans la combinatoire des polynômes orthogonaux*, Selected Papers of the Conf. on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Theor. Comp. Sci. Vol. 117 (1993) 153-167.

[3] I. Constantineau, J. Labelle. *On Combinatorial Structures kept Fixed by the Action of a Given Permutation.* Studies in Applied Math., 84 (1991) 105-118.

[4] A. de Médicis. *Aspects combinatoires des nombres de Stirling, des polynômes orthogonaux de Sheffer et de leur q-analogues*, Thèse de Ph.D., Publication du LACIM, no.13. UQAM, 1993.

[5] H. Décoste. *Séries indicatrices d'espèces pondérées et q-analogues*, Thèse de Ph.D., Publication du LACIM, no.2, UQAM, 1989.

[6] P. Hanlon. *The Fixed-Point Partition Lattice.* Pacific J. Math., Vol.96, No.2 (1981) 319-341.

[7] J. Labelle. *Applications diverses de la théorie des espèces de structures.* Ann. Sc. Math. Québec, 7(1) 1983, 59-94.

[8] D. Loeb. *A generalization of the Stirling numbers*, Discrete Math. 103 (1992) 259-269.

[9] S. Toader, G. H. Toader. *Generalized Stirling Numbers*, Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica, XXXIII, 1(1988) 50-53.