UN PROLONGEMENT DE LA FORMULE EXPONENTIELLE EN COMBINATOIRE ÉNUMÉRATIVE

Gilbert LABELLE et Pierre LEROUX

LACIM - Dép. de mathématiques, Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. Centre-ville, Montréal (Québec), Canada H3C 3P8

ABSTRACT — Let α be a formal variable and F_w be a weighted species of structures (class of structures closed under weight-preserving isomorphisms) of the form $F_w = E(F_w^c)$, where E and F_w^c respectively denote the species of *sets* and of *connected F_w-structures*. Multiplying by α the weight of each F_w^c-structure yields the species $F_{w(\alpha)} = E(F_{\alpha w}^c)$. We introduce a "universal" virtual weighted species, $\Lambda^{(\alpha)}$, such that $F_{w(\alpha)} = \Lambda^{(\alpha)} \circ F_w^+$, where F_w^+ denotes the species of non-empty F_w-structures. Using general properties of $\Lambda^{(\alpha)}$, we compute the various enumerative power series $G(x)$, $\tilde{G}(x)$, $\bar{G}(x)$, $G(x,q)$, $G\langle x,q\rangle$, $Z_G(x_1,x_2,x_3,\ldots)$, $\Gamma_G(x_1,x_2,x_3,\ldots)$, for $G = F_{w(\alpha)}$, in terms of F_w. Special instances of our formulas include the *exponential formula*, $F_{w(\alpha)}(x) = \exp(\alpha F_w(x)) = (F_w(x))^\alpha$, cyclotomic identities, and their q-analogues. The virtual weighted species, $\Lambda^{(\alpha)}$, is, in fact, a new combinatorial lifting of the function $(1+x)^\alpha$.

RÉSUMÉ — Soit α une variable formelle et F_w une espèce de structures pondérée (classe de structures fermée sous les isomorphismes préservant les poids) de la forme $F_w = E(F_w^c)$, où E et F_w^c désignent respectivement l'espèce des *ensembles* et celle des *F_w-structures connexes*. En multipliant par α le poids de chaque F_w^c-structure, on obtient l'espèce $F_{w(\alpha)} = E(F_{\alpha w}^c)$. Nous introduisons une espèce virtuelle «universelle», $\Lambda^{(\alpha)}$, telle que $F_{w(\alpha)} = \Lambda^{(\alpha)} \circ F_w^+$, où F_w^+ désigne l'espèce des F_w-structures non-vides. En faisant appel à des propriétés générales de $\Lambda^{(\alpha)}$, nous calculons les diverses séries formelles énumératives $G(x)$, $\tilde{G}(x)$, $\bar{G}(x)$, $G(x,q)$, $G\langle x,q\rangle$, $Z_G(x_1,x_2,x_3,\ldots)$, $\Gamma_G(x_1,x_2,x_3,\ldots)$, de $G = F_{w(\alpha)}$, en fonction de F_w. Comme cas spéciaux des formules que nous développons, on retrouve la *formule exponentielle*, $F_{w(\alpha)}(x) = \exp(\alpha F_w(x)) = (F_w(x))^\alpha$, les identités cyclotomiques, ainsi que leurs q-analogues. L'espèce virtuelle pondérée, $\Lambda^{(\alpha)}$, est, en fait, un nouveau relèvement combinatoire de la fonction $(1+x)^\alpha$.

1. INTRODUCTION.

Soient $f(x)$ et $g(x)$, deux fonctions ou séries formelles telles que

$$f(x) = \exp(g(x)) . \tag{1.1}$$

Alors on peut donner un sens a l'expression $f(x)^\alpha$, pour toute variable α, à l'aide de la "formule exponentielle"

$$f(x)^\alpha = \exp(\alpha g(x)) . \tag{1.2}$$

Dominique Foata fut un des premiers a interpréter et utiliser ces formules en combinatoire énumérative (voir par exemple [CF], [F1], [FS2]). Essentiellement, si $f(x)$ et $g(x)$ sont les séries génératrices exponentielles pour des classes F et G de structures, alors l'équation (1.1) exprime le fait que les F-structures peuvent être identifiées à des assemblées de G-structures, ces dernières étant assimilables à des F-structures "connexes". Dans ce cas, on peut donner à toute F-structure, s, le "poids" $\alpha^{c(s)}$, où

$c(s)$ est le nombre de "composantes connexes" de s; on dit que α agit comme compteur de composantes connexes. La formule (1.2) donne alors la série génératrice exponentielle de cette nouvelle classe pondérée. Par exemple, on voit immédiatement que la fonction $(1/(1-x))^{\alpha}$ est la série génératrice des permutations, où α agit comme compteur de cycles. Cette approche est à la base des modèles combinatoires qui ont été proposés pour les polynômes orthogonaux classiques. Voir par exemple [F2], [FL1-2], [FS3].

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à des classes de structures pondérées (appelées *espèces de structures* [BLL], [J1], [L4]) qui sont closes sous les isomorphismes induits par des "réétiquetages", c'est-à-dire par des bijections des ensembles sous-jacents. Dans ce cas, de nouvelles séries génératrices, des fonctions symétriques (séries indicatrices) et des q-analogues peuvent leur être associés, en rapport avec le dénombrement des types d'isomorphie de structures (structures non étiquetées) ou des structures asymétriques (structures dont le groupe d'isomorphismes est réduit à l'identité). Lorsqu'un concept de composante connexe peut être introduit, il est naturel de rechercher, pour ces diverses séries, des "formules exponentielles" plus complexes, analogues à la formule (1.2). Nous verrons que ces formules exponentielles contiennent des polynômes en α qui sont reliés aux identités cyclotomiques (voir corollaire 2.2 et le début de la section 3).

Illustrons notre démarche en considérant la classe des graphes. En introduisant un compteur d'arêtes, t, on peut donner le poids $w = t^{12}$ au graphe (de gauche) de la figure 1 puisqu'il possède 12 arêtes. Cette pondération peut être raffinée en lui adjoignant un compteur de composantes connexes, α. Le poids du graphe considéré se transforme alors en un nouveau poids, $w^{(\alpha)} = \alpha^4 t^{12}$, puisque ce graphe possède 4 composantes connexes (voir figure 1).

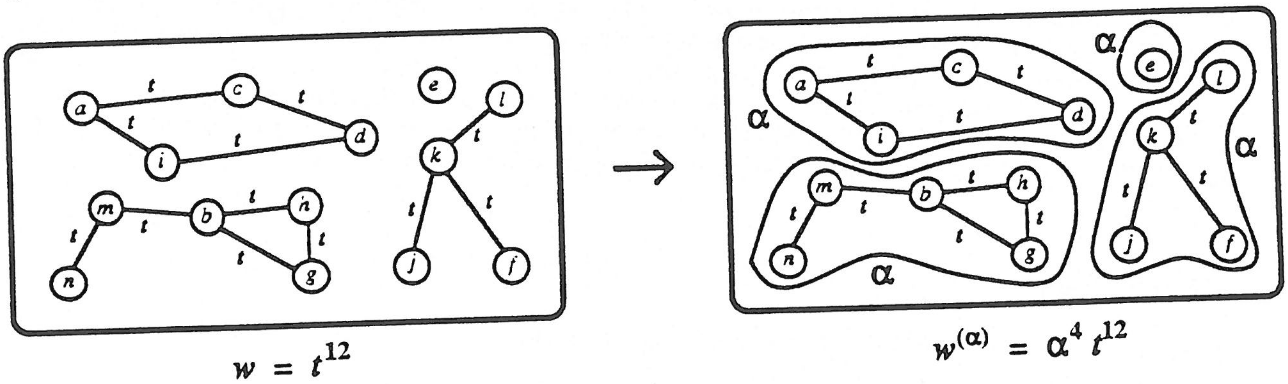

Figure 1

Pondération raffinée selon le nombre de composantes connexes

Bien entendu, ce raffinement de pondération, $w \longmapsto w^{(\alpha)}$, est compatible avec les réétiquetages et transforme donc, de façon naturelle, l'espèce, Gr_w, des graphes pondérés selon leur nombre d'arêtes, en l'espèce, $Gr_{w^{(\alpha)}}$, des graphes pondérés selon leur nombre d'arêtes *et* de composantes connexes. Étant donné que les graphes sont les *assemblées* de graphes connexes et que le poids de chaque graphe connexe est multiplié par α, on peut décrire la transformation considérée par

$$Gr_w = E(Gr_w^c) \longmapsto Gr_{w^{(\alpha)}} = E(Gr_{\alpha w}^c), \tag{1.3}$$

où E désigne l'espèce des ensembles, Gr_w^c désigne les Gr_w-structures connexes, et αw signifie que la pondération w a été multipliée par α. Il est clair que la transformation (1.3) peut être étendue à une espèce pondérée quelconque, F_w, de la forme $F_w = E(F_w^c)$, où F_w^c désigne l'espèce des F_w-structures connexes :

$$F_w = E(F_w^c) \longmapsto F_{w(\alpha)} = E(F_{\alpha w}^c) . \tag{1.4}$$

Le but du présent travail est d'analyser la transformation générale, $F_w \longmapsto F_{w(\alpha)}$, et d'en tirer diverses conséquences énumératives. Nous montrons, en section 2, qu'il existe une espèce pondérée virtuelle[1] «universelle», $\Lambda^{(\alpha)}$, telle que

$$F_{w(\alpha)} = \Lambda^{(\alpha)} \circ F_w^+ , \tag{1.5}$$

où $F_w^+ = F_w - 1$ désigne l'espèce des F_w-structures non-vides, et calculons les principales séries formelles énumératives associées à $\Lambda^{(\alpha)}$. Nous en déduisons la forme explicite générale des séries formelles $G(x)$, $\tilde{G}(x)$, $\bar{G}(x)$, $G(x,q)$, $G\langle x,q\rangle$, $Z_G(x_1,x_2,x_3,\ldots)$, $\Gamma_G(x_1,x_2,x_3,\ldots)$, associées à l'espèce $G = F_{w(\alpha)}$, en fonction des séries associées à l'espèce F_w. Nous donnons, en section 3, diverses identités (et q-identités) qui découlent de la section 2 — de façon automatique — à partir de choix spécifiques de l'espèce F_w. Nous terminons (section 4) par une analyse de quelques propriétés de l'espèce $\Lambda^{(\alpha)}$. En particulier, nous donnons les premiers termes de la décomposition moléculaire de $\Lambda^{(\alpha)}$ qui s'avère être un nouveau relèvement combinatoire de la série du binôme pour un exposant formel α :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\frac{x^4}{4!} + \cdots . \tag{1.6}$$

2. ÉTUDE DE LA TRANSFORMATION $F_w \longmapsto F_{w(\alpha)}$.

Plusieurs séries formelles énumératives peuvent être associées à chaque espèce pondérée $F = F_w$. Les deux principales, Z_F et Γ_F, sont appelées respectivement *série indicatrice des cycles*[J1] *de F* et *série indicatrice d'asymétrie*[L3-5] *de F*. Elles comportent une infinité de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$:

$$Z_F(x_1,x_2,x_3,\ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma\, x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \cdots , \tag{2.1}$$

$$\Gamma_F(x_1,x_2,x_3,\ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma^*\, x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \cdots . \tag{2.2}$$

Dans ces formules, les coefficients f_σ (resp. f_σ^*) sont des $\mathbb{N}$-combinaisons linéaires (resp. $\mathbb{Z}$-combinaisons linéaires) des poids donnés aux F-structures sur $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$, S_n est le groupe symétrique de degré n et σ_k désigne le nombre de cycles de longueur k dans la décomposition cyclique de chaque permutation $\sigma \in S_n$. En fait, Z_F et Γ_F, peuvent être vues comme des fonctions symétriques de variables auxiliaires, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$, en effectuant les substitutions

$$x_i := p_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots) = \xi_1^i + \xi_2^i + \xi_3^i + \cdots , \quad i \geq 1 \quad \text{(sommes de puissances).} \tag{2.3}$$

En particularisant autrement les variables, $x_1, x_2, x_3, \ldots$, dans les séries (2.1)-(2.2), on a[J1], [L3]

---

[1] Différence formelle d'espèces pondérées [BLL], [J2], [Y].

$$Z_F(x, 0, 0, \ldots) = \Gamma_F(x, 0, 0, \ldots) = F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}, \tag{2.4}$$

$$Z_F(x, x^2, x^3, \ldots) = \tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{f}_n x^n, \tag{2.5}$$

$$\Gamma_F(x, x^2, x^3, \ldots) = \bar{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \bar{f}_n x^n, \tag{2.6}$$

où

f_n = poids total des F_w-structures sur $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, (2.7)

$\tilde{f}_n$ = poids total des types d'isomorphie de F_w-structures sur n points, (2.8)

$\bar{f}_n$ = poids total de types d'isomorphie de F_w-structures asymétriques sur n points. (2.9)

Bien entendu, lorsque la pondération w est triviale (c.-à-d., $w = 1$ pour toute structure), alors les poids totaux dans (2.7)-(2.9) donnent les nombres de structures correspondantes.

Finalement, on peut associer canoniquement[D1-2] (voir aussi [DL]) deux q-séries, $F(x, q)$ et $F\langle x, q\rangle$, à l'espèce F en posant

$$F(x, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(q) \frac{x^n}{n!_q} = Z_F\left(\tfrac{(1-q)}{(1-q)}x, \tfrac{(1-q)^2}{(1-q^2)}x^2, \tfrac{(1-q)^3}{(1-q^3)}x^3, \ldots\right), \tag{2.10}$$

$$F\langle x, q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\langle q\rangle \frac{x^n}{n!_q} = \Gamma_F\left(\tfrac{(1-q)}{(1-q)}x, \tfrac{(1-q)^2}{(1-q^2)}x^2, \tfrac{(1-q)^3}{(1-q^3)}x^3, \ldots\right), \tag{2.11}$$

où

$$n!_q = \frac{(1-q)}{(1-q)} \frac{(1-q^2)}{(1-q)} \frac{(1-q^3)}{(1-q)} \cdots \frac{(1-q^n)}{(1-q)}, \tag{2.12}$$

désigne le q-analogue de $n!$, ($n! = \lim_{q \to 1} n!_q$). Ces q-séries satisfont les propriétés

$$\lim_{q \to 1} F(x, q) = F(x), \quad \lim_{q \to 0} F(x, q) = \tilde{F}(x), \tag{2.13}$$

$$\lim_{q \to 1} F\langle x, q\rangle = F(x), \quad \lim_{q \to 0} F\langle x, q\rangle = \bar{F}(x). \tag{2.14}$$

De plus, leurs coefficients, $f_n(q)$ et $f_n\langle q\rangle$, sont des polynômes en q de degré $\leq n(n-1)/2$. Lorsque $F = E$ (l'espèce des ensembles), les q-séries (2.10) et (2.11) prennent la forme des deux q-analogues classiques de la fonction exponentielle:

$$E(x, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!_q} = \frac{1}{(1-(1-q)x)(1-(1-q)qx)(1-(1-q)q^2x)\cdots}, \tag{2.15}$$

$$E\langle x, q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!_q} = (1+(1-q)x)(1+(1-q)qx)(1+(1-q)q^2x)\cdots. \tag{2.16}$$

La définition des séries Z_F, Γ_F, $F(x)$, $\tilde{F}(x)$, $\bar{F}(x)$, $F(x, q)$, $F\langle x, q\rangle$ peut être étendue au cas d'une espèce pondérée virtuelle quelconque, $F = F_w = A_u - B_v$, où A_u et B_v sont deux espèces pondérées, en posant simplement

$$Z_F = Z_{A_u} - Z_{B_v}, \qquad \Gamma_F = \Gamma_{A_u} - \Gamma_{B_v}. \tag{2.17}$$

Les transformations, $F \longmapsto Z_F$ et $F \longmapsto \Gamma_F$, qui vont des espèces aux séries indicatrices, possèdent la propriété remarquable de préserver les principales opérations combinatoires[J1], [L3] : pour toutes espèces (pondérées virtuelles), F et G, on a les formules

$$Z_{F+G} = Z_F + Z_G, \qquad \Gamma_{F+G} = \Gamma_F + \Gamma_G, \tag{2.18}$$

$$Z_{F\cdot G} = Z_F \cdot Z_G, \qquad \Gamma_{F\cdot G} = \Gamma_F \cdot \Gamma_G, \tag{2.19}$$

$$Z_{F\circ G} = Z_F \circ Z_G, \qquad \Gamma_{F\circ G} = \Gamma_F \circ \Gamma_G, \tag{2.20}$$

$$Z_{F'} = \frac{\partial Z_F}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{F'} = \frac{\partial \Gamma_F}{\partial x_1}. \tag{2.21}$$

Dans les membres de droite de (2.20), l'opération considérée est la *substitution pléthystique* des séries indicatrices. Cette opération est définie pour deux séries indicatrices quelconques, $f_w(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ et $g_v(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, où $g_v(0, 0, 0, \ldots) = 0$, par

$$\begin{aligned} (f_w \circ g_v)(x_1, x_2, x_3, \ldots) &:= f_w((g_v)_1, (g_v)_2, \ldots, (g_v)_k, \ldots), \\ \text{où} \quad (g_v)_k &:= g_{v^k}(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \ldots), \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dans (2.22), $g_{v^k}(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \ldots)$ désigne la série indicatrice obtenue en élevant à la puissance k chaque poids apparaissant dans $g_v(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ et en multipliant par k l'indice de chaque variable. Le principe général suivant découle immédiatement des équations (2.18)-(2.21) :

Toute équation combinatoire[2] *entre espèces* $F, G, H, \ldots$ *donne lieu — de façon automatique — à sept équations correspondantes entre les séries*

$$F(x),\ G(x),\ H(x),\ \ldots, \tag{2.23}$$

$$Z_F, Z_G, Z_H, \ldots, \quad \tilde{F}(x),\ \tilde{G}(x),\ \tilde{H}(x),\ \ldots, \quad F(x,q),\ G(x,q),\ H(x,q),\ \ldots, \tag{2.24}$$

$$\Gamma_F, \Gamma_G, \Gamma_H, \ldots, \quad \bar{F}(x),\ \bar{G}(x),\ \bar{H}(x),\ \ldots, \quad F\langle x,q\rangle,\ G\langle x,q\rangle,\ H\langle x,q\rangle,\ \ldots . \tag{2.25}$$

Voici le résultat principal du présent travail.

PROPOSITION 2.1. *Il existe une espèce virtuelle pondérée « universelle »,* $\Lambda^{(\alpha)}$, *telle que pour toute espèce pondérée de la forme* $F_w = E(F_w^c)$, *on a*

$$F_{w(\alpha)} = \Lambda^{(\alpha)} \circ F_w^+, \tag{2.26}$$

où, $F_w^+ = F_w - 1$, *désigne l'espèce des* F_w*-structures non vides et* $F_{w(\alpha)} = E(F_{\alpha w}^c)$ *désigne l'espèce des* F_w*-structures pondérées par l'adjonction d'un compteur de composantes connexes,* α. *Les séries génératrice, indicatrices, et q-séries, associées à l'espèce* $\Lambda^{(\alpha)}$, *sont données par les formules*

---

[2] Isomorphisme naturel entre espèces [BLL], [J1-2].

$$\Lambda^{(\alpha)}(x) = (1+x)^{\alpha}, \tag{2.27}$$

$$Z_{\Lambda^{(\alpha)}} = \prod_{n\geq 1} (1+x_n)^{\lambda_n(\alpha)}, \qquad \widetilde{\Lambda^{(\alpha)}}(x) = \prod_{n\geq 1} (1+x^n)^{\lambda_n(\alpha)}, \qquad \Lambda^{(\alpha)}(x,q) = \prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{(1-q)^n}{(1-q^n)}x^n\right)^{\lambda_n(\alpha)}, \tag{2.28}$$

$$\Gamma_{\Lambda^{(\alpha)}} = \prod_{n\geq 1} (1+x_n)^{\gamma_n(\alpha)}, \qquad \overline{\Lambda^{(\alpha)}}(x) = \prod_{n\geq 1} (1+x^n)^{\gamma_n(\alpha)}, \qquad \Lambda^{(\alpha)}\langle x,q\rangle = \prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{(1-q)^n}{(1-q^n)}x^n\right)^{\gamma_n(\alpha)}, \tag{2.29}$$

où les exposants, $\lambda_n(\alpha)$ *et* $\gamma_n(\alpha)$, *sont des polynômes de degré* n *en* α *définis par*

$$\lambda_n(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\mu(n/d)\,\alpha^d, \tag{2.30}$$

$$\gamma_n(\alpha) = -\lambda_n(-\alpha)-\lambda_{n/2}(-\alpha)-\lambda_{n/4}(-\alpha)-\cdots-\lambda_{n/2^k}(-\alpha)-\cdots. \tag{2.31}$$

Dans (2.30), μ *désigne la fonction classique de Möbius et la somme* (2.31) *est étendue aux entiers* $k\geq 0$ *tels que* $n/2^k$ *est un entier.*

Avant d'entreprendre la démonstration de cette proposition, remarquons que lorsque α est un entier positif, alors $\lambda_n(\alpha)$, donné par (2.30), est égal au nombre de *mots circulaires irréductibles* (*mots de Lyndon*), de longueur n sur un alphabet de α lettres. C'est aussi le nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré n sur le corps fini F_q, à q éléments[DS2], [R], lorsque $\alpha = q$. Les polynômes (2.30) sont aussi connus sous les noms de *Lyndon polynomials*[S2] et de (primitive) *necklace polynomials*[MR]. Notons finalement que la formule (2.26) permet de d'étendre la transformation $F_w \longmapsto F_{w^{(\alpha)}}$ à *toutes* les espèces pondérées, F_w, satisfaisant $F_w(0) = 1$. En effet, il suffit de substiuer $F_w^+ = F_w - 1$ dans $\Lambda^{(\alpha)}$. L'espèce F_w peut elle-même être virtuelle. En fait, on peut, dès que $F_w(0) = 1$, introduire un concept de composantes connexes (voir (2.33) ci-bas) et calculer les séries associées[BLL], [J2], [L2], [L5].

Démonstration de la proposition 2.1. Soit X_α l'espèce des *singletons de poids* α, E l'espèce *des ensembles*, et $E^+ = E - 1$, l'espèce des *ensembles non-vides*. A. Joyal[J2] a montré que l'espèce E^+ possède un inverse, $(E^+)^{<-1>}$, sous la substitution, donné par la formule

$$(E^+)^{<-1>} = X - \Delta X + \Delta^2 X - \Delta^3 X + \cdots, \tag{2.32}$$

où X est l'espèce des *singletons* (de poids 1) et Δ est l'opérateur de différence combinatoire défini par $\Delta G = G\circ E^+ - G$, pour toute espèce (virtuelle) G. Puisque $F_w = E(F_w^c) = 1 + E^+(F_w^c)$, on obtient $F_w^+ = F_w - 1 = E^+(F_w^c)$. D'où l'on tire

$$F_w^c = (E^+)^{<-1>}\circ F_w^+. \tag{2.33}$$

Définissons $\Lambda^{(\alpha)}$ par la formule

$$\Lambda^{(\alpha)} := E\circ X_\alpha \circ (E^+)^{<-1>}. \tag{2.34}$$

Un court calcul, basé sur (2.32), montre que le développement de $\Lambda^{(\alpha)}$ débute par les termes

$$\Lambda^{(\alpha)} = 1 + X_\alpha + (E_2)_{\alpha^2} - (E_2)_\alpha + \cdots, \tag{2.35}$$

où $(E_2)_\alpha$ (resp. $(E_2)_{\alpha^2}$) désigne l'espèce des *ensembles de cardinal* 2 pondérés par α (resp. α^2). Ceci montre que $\Lambda^{(\alpha)}$ est une espèce pondérée virtuelle. On a successivement

$$F_{w^{(\alpha)}} = E(F^c_{\alpha w}) = E \circ X_\alpha \circ F^c_w = E \circ X_\alpha \circ (E^+)^{<-1>} \circ F^+_w = \Lambda^{(\alpha)} \circ F^+_w . \tag{2.36}$$

Ce qui établit (2.26). En prenant la série génératrice de part et d'autre de (2.34), on obtient

$$\Lambda^{(\alpha)}(x) = e^{\alpha \log(1+x)} = (1+x)^\alpha . \tag{2.37}$$

La formule explicite (2.28) pour la série indicatrice des cycles, $Z_{\Lambda^{(\alpha)}}$, s'obtient, après quelques calculs, en substituant les expressions[J1-2], [L2]

$$Z_E = \exp\big(\sum_{n\geq 1} x_n/n\big), \qquad Z_{(E^+)^{<-1>}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log(1+x_n) . \tag{2.38}$$

dans la formule $Z_{\Lambda^{(\alpha)}} = Z_{E \circ X_\alpha \circ (E^+)^{<-1>}} = (Z_E) \circ (\alpha x_1) \circ (Z_{(E^+)^{<-1>}})$. Le calcul explicite de la série indicatrice d'asymétrie, $\Gamma_{\Lambda^{(\alpha)}} = \Gamma_{E \circ X_\alpha \circ (E^+)^{<-1>}} = (\Gamma_E) \circ (\alpha x_1) \circ (\Gamma_{(E^+)^{<-1>}})$, est plus délicat. On sait que[L3]

$$\Gamma_E = \exp\big(\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} x_n/n\big), \tag{2.39}$$

et il faut calculer $\Gamma_{(E^+)^{<-1>}}$. Puisque $E \circ (E^+)^{<-1>} = 1 + E^+ \circ (E^+)^{<-1>} = 1 + X$, on obtient

$$\Gamma_E \circ \Theta = 1 + x_1 , \quad \text{où} \quad \Theta = \Gamma_{(E^+)^{<-1>}} . \tag{2.40}$$

Substituant Θ dans (2.39) et prenant le logarithme de part et d'autre, on trouve

$$\Theta_1 - \tfrac{1}{2}\Theta_2 + \tfrac{1}{3}\Theta_3 - \cdots + \frac{(-1)^{i-1}}{i}\Theta_i + \cdots = \log(1+x_1) , \tag{2.41}$$

où $\Theta_i = \Theta(x_i, x_{2i}, x_{3i}, \ldots)$, $i \geq 1$. On en déduit, par sommation, la relation remarquable

$$\Theta_1 - \Theta_2 = \Omega , \qquad \text{où} \qquad \Omega = Z_{(E^+)^{<-1>}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \log(1+x_k) , \tag{2.42}$$

puisque la fonction de Möbius satisfait la propriété

$$\frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(n/d)(-1)^{d-1} = \begin{cases} 1, & \text{si } n=1, \\ -1, & \text{si } n=2, \\ 0, & \text{si } n \geq 3. \end{cases} \tag{2.43}$$

Une autre sommation, basée sur (2.42), donne finalement

$$\Theta = \Gamma_{(E^+)^{<-1>}} = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_4 + \cdots + \Omega_{2^i} + \cdots . \tag{2.44}$$

On obtient alors, en regroupant convenablement les termes,

$$\Gamma_{\Lambda^{(\alpha)}} = (\Gamma_E) \circ (\alpha x_1) \circ (\Gamma_{(E^+)^{<-1>}}) = \Gamma_E \circ (\alpha\Omega_1 + \alpha\Omega_2 + \alpha\Omega_4 + \ldots) = \prod_{n \geq 1} (1+x_n)^{\gamma_n(\alpha)} , \tag{2.45}$$

où

$$\gamma_n(\alpha) = = \sum_{2^i \cdot j \cdot k = n} \frac{(-1)^{j-1}\mu(k)}{kj} \alpha^j = -\lambda_n(-\alpha) - \lambda_{n/2}(-\alpha) - \lambda_{n/4}(-\alpha) - \cdots - \lambda_{n/2^k}(-\alpha) - \cdots . \tag{2.46}$$

■

Les autres séries associées à $\Lambda^{(\alpha)}$ découlent directement des formules pour $Z_{\Lambda^{(\alpha)}}$ et $\Gamma_{\Lambda^{(\alpha)}}$.

Le corollaire suivant donne la forme explicite générale des séries formelles $G(x)$, $\tilde{G}(x)$, $\bar{G}(x)$, $G(x, q)$,

$G\langle x, q\rangle$, $Z_G(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $\Gamma_G(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, associées à l'espèce $G = F_{w^{(\alpha)}}$, en fonction des séries associées à l'espèce F_w. La démonstration est purement calculatoire et est laissée au lecteur.

COROLLAIRE 2.2. Soit F_w une espèce virtuelle pondérée telle que $F_w(0) = 1$ et posons $F_{w^{(\alpha)}} = \Lambda^{(\alpha)} \circ F_w^+$. Alors

$$F_{w^{(\alpha)}}(x) = F_w(x)^\alpha, \tag{2.47}$$

$$Z_{F_{w^{(\alpha)}}}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \prod_{n\geq 1} Z_{F_{w^n}}(x_n, x_{2n}, x_{3n}, \ldots)^{\lambda_n(\alpha)}, \tag{2.48}$$

$$\widetilde{F_{w^{(\alpha)}}}(x) = \prod_{n\geq 1} \widetilde{F_{w^n}}(x^n)^{\lambda_n(\alpha)}, \tag{2.49}$$

$$F_{w^{(\alpha)}}(x, q) = \prod_{n\geq 1} F_{w^n}(\tfrac{(1-q)^n}{(1-q^n)}x^n, q^n)^{\lambda_n(\alpha)}, \tag{2.50}$$

$$\Gamma_{F_{w^{(\alpha)}}}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \prod_{n\geq 1} \Gamma_{F_{w^n}}(x_n, x_{2n}, x_{3n}, \ldots)^{\gamma_n(\alpha)}, \tag{2.51}$$

$$\overline{F_{w^{(\alpha)}}}(x) = \prod_{n\geq 1} \overline{F_{w^n}}(x^n)^{\gamma_n(\alpha)}, \tag{2.52}$$

$$F_{w^{(\alpha)}}\langle x, q\rangle = \prod_{n\geq 1} F_{w^n}\left\langle\tfrac{(1-q)^n}{(1-q^n)}x^n, q^n\right\rangle^{\gamma_n(\alpha)}. \tag{2.53}$$ ■

Le cas spécial, $\alpha = -1$, est particulièrement intéressant puisqu'il correspond — dans le cas le plus simple de la série (2.47) — au calcul de l'excès de poids que les F_w-structures ayant un nombre pair de composantes connexes ont sur celles qui ont un nombre impair de composantes connexes:

$$F_{w^{(-1)}}(x) = \sum_{n\geq 0} (f_n^+ - f_n^-)\frac{x^n}{n!}, \tag{2.54}$$

où

f_n^+ = poids total des F_w-structures sur $[n]$ ayant un nombre pair de composantes connexes, (2.55)

f_n^- = poids total des F_w-structures sur $[n]$ ayant un nombre impair de composantes connexes. (2.56)

Voici comment se comporte la transformation $F_w \longmapsto F_{w^{(-1)}}$ relativement aux sept principales séries.

COROLLAIRE 2.3. Soit F_w une espèce virtuelle pondérée telle que $F_w(0) = 1$ et posons $F_{w^{(-1)}} = \Lambda^{(-1)} \circ F_w^+$. Alors

$$F_{w^{(-1)}}(x) = 1 / F_w(x), \tag{2.57}$$

$$Z_{F_{w^{(-1)}}}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \frac{Z_{F_{w^2}}(x_2, x_4, x_6, \ldots)}{Z_{F_w}(x_1, x_2, x_3, \ldots)}, \tag{2.58}$$

$$\widetilde{F_{w^{(-1)}}}(x) = \frac{\widetilde{F_{w^2}}(x^2)}{\widetilde{F_w}(x)}, \tag{2.59}$$

$$F_{w^{(-1)}}(x, q) = \frac{F_{w^2}((\frac{1-q}{1+q})x^2, q^2)}{F_w(x, q)}, \tag{2.60}$$

$$\Gamma_{F_{w^{(-1)}}}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = 1 / \prod_{k\geq 0} \Gamma_{F_{w^{2^k}}}(x_{2^k}, x_{2\cdot 2^k}, x_{3\cdot 2^k}, \ldots), \tag{2.61}$$

$$\overline{F_{w^{(-1)}}}(x) = 1 / \prod_{k\geq 0} \overline{F_{w^{2^k}}}(x^{2^k}), \tag{2.62}$$

$$F_{w^{(-1)}}\langle x, q\rangle = 1 / \prod_{k\geq 0} F_{w^{2^k}}\left\langle\frac{(1-q)^{2^k}}{(1-q^{2^k})}x^{2^k}, q^{2^k}\right\rangle. \tag{2.63}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser les relations

$$\lambda_n(-1) = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad n=1, \\ 1, & \text{si} \quad n=2, \\ 0, & \text{si} \quad n \geq 3, \end{cases} \qquad \gamma_n(-1) = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad n=2^k,\ k\geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.64}$$ ■

Il est remarquable que les transformations décrites par (2.57)-(2.63) soient involutives ($w^{(-1)(-1)} = w$). On vérifie facilement que les séries associées à l'espèce virtuelle universelle, $\Lambda^{(-1)}$, sont données par

$$\Lambda^{(-1)}(x) = 1/(1+x), \tag{2.65}$$

$$Z_{\Lambda^{(-1)}} = (1+x_2)/(1+x_1), \qquad \widetilde{\Lambda^{(-1)}}(x) = (1+x^2)/(1+x), \qquad \Lambda^{(-1)}(x,q) = (1+(\tfrac{1-q}{1+q})x^2)/(1+x), \tag{2.66}$$

$$\Gamma_{\Lambda^{(-1)}} = \frac{1}{(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot(1+x_4)\cdot(1+x_8)\cdot\cdots}, \quad \overline{\Lambda^{(-1)}}(x) = 1-x, \quad \Lambda^{(-1)}\langle x,q\rangle = 1/\prod_{k\geq 0}\left(1+\frac{(1-q)^{2^k}}{(1-q^{2^k})}x^{2^k}\right). \tag{2.67}$$

3. EXEMPLES RÉSULTANT DE CHOIX PARTICULIERS POUR F_w.

Les corollaires 2.2 et 2.3 donnent lieu à une multitude d'identités et expressions intéressantes en choisissant des espèces F_w particulières. Par exemple, dans le cas de l'espèce $F_w = E$, des ensembles (pondérés trivialement par $w = 1$), on a $Z_E = \exp(\sum x_n/n)$, $\Gamma_E = \exp(\sum (-1)^{n-1}x_n/n)$. Les formules (2.47)-(2.53) du corollaire 2.2 produisent respectivement les identités

$$e^{\alpha x} = (e^x)^{\alpha}, \tag{3.1}$$

$$e^{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k x_k/k} = \prod_{n\geq 1} e^{\lambda_n(\alpha)\sum_{k=1}^{\infty} x_{kn}/k}, \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{1-\alpha x} = \prod_{n\geq 1} (\frac{1}{1-x^n})^{\lambda_n(\alpha)}, \tag{3.3}$$

$$E(\alpha x, q) = E(x,q)^{\alpha}\cdot E(\tfrac{(1-q)^2}{(1-q^2)}x^2, q^2)^{\lambda_2(\alpha)}\cdot E(\tfrac{(1-q)^3}{(1-q^3)}x^3, q^3)^{\lambda_3(\alpha)}\cdot \cdots, \tag{3.4}$$

$$e^{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\alpha^k x_k/k} = \prod_{n\geq 1} e^{\gamma_n(\alpha)\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}x_{kn}/k}, \tag{3.5}$$

$$(1+\alpha x) = \prod_{n\geq 1} (1+x^n)^{\gamma_n(\alpha)}, \tag{3.6}$$

$$E\langle \alpha x, q\rangle = E\langle x,q\rangle^{\alpha}\cdot E\left\langle\tfrac{(1-q)^2}{(1-q^2)}x^2, q^2\right\rangle^{\gamma_2(\alpha)}\cdot E\left\langle\tfrac{(1-q)^3}{(1-q^3)}x^3, q^3\right\rangle^{\gamma_3(\alpha)}\cdot \cdots. \tag{3.7}$$

On reconnaît, en (3.3), l'identité cyclotomique classique de Gauss[DS1], [MR]. L'identité (3.6) est, en quelque sorte, duale de (3.3) et pourrait être appelée l'identité cocyclotomique. Les identités (3.2) (due à F. Bergeron[B]) et (3.5) sont des extensions de (3.3) et (3.6) qui donnent aussi lieu, par spécialisation, aux q-identités (3.4) et (3.7). Exprimées en termes des q-exponentielles, ces dernières peuvent être vues comme des q-analogues des identités cyclotomique et cocyclotomique.

Dans le cas de l'espèce $F_w = S$, des permutations, on a $Z_S = 1/\prod(1-x_n)$ et $\Gamma_S = (1-x_2)/(1-x_1)$. Désignons par $S_{(\alpha)}$ l'espèce correspondante des permutations pondérées par le compteur de cycles α. Le corollaire 2.2 donne, après calculs,

$$Z_{S_{(\alpha)}} = \prod_{n \geq 1} (1-x_n)^{-\nu_n(\alpha)} \tag{3.8}$$

où $\nu_n(\alpha)$ désigne le polynôme

$$\nu_n(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \phi(n/d)\, \alpha^d , \tag{3.9}$$

$\phi(n)$ désignant la fonction d'Euler. Lorsque α est un entier positif, $\nu_n(\alpha)$ est le nombre de mots circulaires de longueur n sur un alphabet de α lettres, ou encore, le nombre de *colliers* (non nécessairement primitifs) de longueur n coloriés par α couleurs. La formule (3.8), due à H.Décoste[D1], est à la base du calcul de la série indicatrice des cycles de modèles combinatoires des polynômes orthogonaux classiques de Laguerre, Charlier, Meixner, Meixner-Pollaczek, et Jacobi, (voir [D1-2], et aussi [S2-3]) et de leurs q-analogues canoniques. On obtient aussi

$$\Gamma_{S_{(\alpha)}} = \prod_{n \text{ impair}} (1-x_n)^{-\gamma_n(\alpha)} \prod_{n \text{ pair}} (1-x_n)^{\lambda_n(-\alpha)} . \tag{3.10}$$

En prenant la valeur particulière $\alpha = -1$, les formules (2.57)-(2.63) du corollaire 2.3 deviennent

$$S_{w(-1)}(x) = 1-x , \tag{3.11}$$

$$Z_{S_{w(-1)}}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (1-x_1)(1-x_3)(1-x_5)\cdots , \tag{3.12}$$

$$\widetilde{S_{w(-1)}}(x) = (1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots , \tag{3.13}$$

$$S_{w(-1)}(x, q) = (1-x)(1-\tfrac{(1-q)^3}{(1-q^3)}x^3)(1-\tfrac{(1-q)^5}{(1-q^5)}x^5)\cdots , \tag{3.14}$$

$$\Gamma_{S_{w(-1)}}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = 1-x_1 , \tag{3.15}$$

$$\overline{S_{w(-1)}}(x) = 1-x , \tag{3.16}$$

$$S_{w(-1)}\langle x, q\rangle = 1-x . \tag{3.17}$$

Le lecteur est invité à donner des démonstrations combinatoires directes de ces formules.

Dans le cas de l'espèce $F_w = Gr_w$, des graphes pondérés à l'aide d'un compteur d'arêtes, t, rencontrée dans l'introduction, les séries $Gr_{w(\alpha)}(x)$, $Z_{Gr_{w(\alpha)}}$, $\widetilde{Gr_{w(\alpha)}}(x)$, $Gr_{w(\alpha)}(x, q)$ de l'espèce associée, $Gr_{w(\alpha)}$, peuvent être calculées à l'aide de (2.47)-(2.50) en utilisant la formule connue[BLL], [HP]

$$Z_{Gr}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (1+t)^{c_1}(1+t^2)^{c_2}(1+t^3)^{c_3}\cdots x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}\cdots , \tag{3.18}$$

où

$$c_k = \sum_{[i,j]=k} (i,j)\sigma_i\sigma_j + \sigma_{2k} - \sigma_k + \tfrac{1}{2}(k \bmod 2)\sigma_k ,$$

et où $[i, j]$ désigne le plus petit commun multiple des entiers i et j. Cependant, le calcul explicite des autres séries, $\Gamma_{Gr_{w(\alpha)}}$, $\overline{Gr_{w(\alpha)}}(x)$, $Gr_{w(\alpha)}\langle x, q\rangle$, est un problème ouvert puisqu'aucune forme close pour la série indicatrice d'asymétrie Γ_{Gr_w} n'est connue à ce jour.

Bien d'autres applications sont possibles, en plus des modèles combinatoires de polynômes orthogonaux mentionnés plus haut. Citons, par exemple, le cas de l'espèce $F_w = E(A) = A/X$, des forêts d'arborescences (où A est l'espèce des arborescences). La transformation $F_w \longmapsto F_{w(\alpha)}$ équivaut alors à l'introduction d'un compteur d'arborescences dans les forêts. Les coefficients des sept séries associées donnent lieu à des familles de polynômes en α :

$$a_n(\alpha),\quad a_\sigma(\alpha),\quad \tilde{a}_n(\alpha),\quad a_n(\alpha,q),\quad a^*_\sigma(\alpha),\quad \bar{a}_n(\alpha),\quad a_n\langle\alpha,q\rangle. \tag{3.19}$$

La première est la famille classique des polynômes d'Abel, $a_n(\alpha)=\alpha(\alpha+n)^{n-1}$, tandis que les autres en sont des variantes et généralisations. Il est à noter que ces variantes et généralisations sont distinctes de celles introduites dans [L6] (voir aussi [L1]), puisque l'espèce $F_{w^{(\alpha)}}$ est distincte de la simple exponentiation $(F_w)^\alpha$, même dans le cas où α est un entier.

4. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'ESPÈCE $\Lambda^{(\alpha)}$.

Rappelons que l'espèce virtuelle pondérée universelle, $\Lambda^{(\alpha)}$, est définie par $\Lambda^{(\alpha)} = E\circ X_\alpha\circ (E^+)^{<-1>}$ et que l'on a $F_{w^{(\alpha)}} = \Lambda^{(\alpha)}\circ F_w^+$, pour toute espèce pondérée F_w satisfaisant $F_w(0)=1$. Puisque la série génératrice exponentielle sous-jacente à $\Lambda^{(\alpha)}$ est donnée par $\Lambda^{(\alpha)}(x)=(1+x)^\alpha$. Il est naturel de se demander quelles sont les propriétés de la fonction $(1+x)^\alpha$ qui sont satisfaites par $\Lambda^{(\alpha)}$. Par exemple, l'identité algébrique $\left((1+x)^\alpha\right)^\beta = (1+x)^{\alpha\beta}$ correspond à l'égalité combinatoire

$$(\Lambda^{(\alpha)})^+\circ(\Lambda^{(\beta)})^+ = (\Lambda^{(\alpha\beta)})^+, \tag{4.1}$$

où $(\Lambda^{(\alpha)})^+=\Lambda^{(\alpha)}-1=(E^+)\circ X_\alpha\circ(E^+)^{<-1>}$ est l'espèce obtenue par la conjugaison des singletons de poids α par l'espèce des ensembles non-vides. En effet, puisque $X_\alpha\circ X_\beta=X_{\alpha\beta}$, on a immédiatement

$$(E^+)\circ X_\alpha\circ(E^+)^{<-1>}\circ(E^+)\circ X_\beta\circ(E^+)^{<-1>} = (E^+)\circ X_{\alpha\beta}\circ(E^+)^{<-1>}. \tag{4.2}$$

En prenant les séries indicatrices des cycles et d'asymétrie des deux membres de (4.1) on obtient facilement les identités suivantes pour les polynômes $\lambda_n(\alpha)$ et $\gamma_n(\alpha)$:

$$\lambda_n(\alpha\beta) = \sum_{i\cdot j=n}\lambda_i(\alpha^j)\,\lambda_j(\beta),\qquad \gamma_n(\alpha\beta) = \sum_{i\cdot j=n}\gamma_i(\alpha^j)\,\gamma_j(\beta),\qquad n\geq 0. \tag{4.3}$$

L'identité de gauche dans (4.3) est une variante de l'identité bien connue[MR] :

$$\lambda_n(\alpha\beta) = \sum_{[i,j]=n}(i,j)\,\lambda_i(\alpha)\,\lambda_j(\beta). \tag{4.4}$$

Bien entendu, l'identité algébrique, $\Lambda^{(\alpha)}(x)\cdot\Lambda^{(\beta)}(x)=(1+x)^\alpha(1+x)^\beta=(1+x)^{\alpha+\beta}=\Lambda^{(\alpha+\beta)}(x)$, entre séries génératrices est satisfaite. Au niveau des espèces, on a cependant,

$$\Lambda^{(\alpha)}\cdot\Lambda^{(\beta)} \neq \Lambda^{(\alpha+\beta)}. \tag{4.5}$$

Ce phénomène découle du fait que $X_\alpha+X_\beta\neq X_{\alpha+\beta}$. C'est aussi un reflet du fait que, bien que $\lambda_1(\alpha+\beta)=\alpha+\beta=\lambda_1(\alpha)+\lambda_1(\beta)$, on a toutefois

$$\lambda_n(\alpha+\beta) \neq \lambda_n(\alpha)+\lambda_n(\beta),\qquad \text{si } n\geq 2. \tag{4.6}$$

L'opérateur de différence, Δ, défini par $\Delta G=G\circ E^+-G$, permet d'écrire $\Lambda^{(\alpha)}$ sous la forme

$$\Lambda^{(\alpha)} = E(X_\alpha)-\Delta E(X_\alpha)+\Delta^2E(X_\alpha)-\Delta^3E(X_\alpha)+\cdots. \tag{4.7}$$

En utilisant le logiciel Maple[CG], Y. Chiricota[C] a calculé la *décomposition moléculaire*[3] de $\Lambda^{(\alpha)}$ jusqu'au degré 7, inclusivement. La voici, tronquée au degré 4 :

$$\begin{aligned}\Lambda^{(\alpha)} &= E \circ X_\alpha \circ (E^{+})^{<-1>} \qquad (4.8)\\ &= 1 + X_\alpha + (E_2)_{\alpha^2} - (E_2)_\alpha + (E_3)_{\alpha^3} - (E_3)_\alpha + (XE_2)_\alpha - (XE_2)_{\alpha^2} + (E_3)_{\alpha^3} - (E_3)_\alpha + (XE_2)_\alpha - (XE_2)_{\alpha^2}\\ &\quad + (E_4)_{\alpha^4} - (E_4)_\alpha + (XE_3)_\alpha - (XE_3)_{\alpha^2} + (X^2E_2)_{\alpha^2} - (X^2E_2)_\alpha + (E_2^2)_{\alpha^2} - (E_2^2)_{\alpha^3} + (E_2{\circ}E_2)_\alpha - (E_2{\circ}E_2)_{\alpha^2}\\ &\quad + \cdots ,\end{aligned}$$

où E_k désigne l'espèce des ensembles de cardinal k. Puisque $E_k(x) = x^k / k!$, la décomposition moléculaire (4.8) peut être vue comme un relèvement combinatoire du développement du binôme :

$$\begin{aligned}\Lambda^{(\alpha)}(x) &= e^{\alpha \log(1+x)} = (1+x)^\alpha\\ &= 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\frac{x^4}{4!} + \cdots . \qquad (4.9)\end{aligned}$$

Les formules (4.7) et (4.8) montrent que $\Lambda^{(\alpha)}$ est une espèce de type «ensembliste» : les espèces moléculaires qui la composent s'obtiennent par produits et substitutions d'espèces de la forme E_k. Posons, pour tout $n \geq 0$,

m_n = nombre d'espèces moléculaires ensemblistes de degré n, (4.10)

a_n = nombre d'espèces atomiques[4] ensemblistes de degré n. (4.11)

Alors, on peut montrer que les suites $(m_n)_{n\geq 0}$ et $(a_n)_{n\geq 0}$ satisfont le schéma récursif double

$$m_0 = 1, \quad m_1 = 1, \qquad a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \qquad \begin{cases} m_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{d\mid k} d a_d\Big) m_{n-k}, \\ a_n = \sum_{\substack{k\mid n\\ k<n}} m_k, \end{cases} \quad n \geq 2, \qquad (4.12)$$

et que l'on a les relations analytiques

$$\sum_{n\geq 0} m_n x^n = \prod_{k\geq 1}\frac{1}{(1-x^k)^{a_k}}, \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s} = 1 + (\zeta(s)-1)\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{m_n}{n^s}, \qquad (4.13)$$

où $\zeta(s)$ désigne la fonction zêta de Riemann. Voici les valeurs de m_n et de a_n pour $n = 0..40$:

m_n = 1, 1, 2, 3, 7, 9, 20, 26, 54, 74, 137, 184, 356, 473, 841, 1154, 2034, 2742, 4740, 6405, 10874, 14794, 24515, 33246, 54955, 74380, 120501, 163828, 263144, 356621, 567330, 768854, 1212354, 1644335, 2567636, 3478873, 5403223, 7314662, 11265825, 15258443, 23363143, ..., (4.14)

a_n = 0, 1, 1, 1, 3, 1, 6, 1, 10, 4, 12, 1, 33, 1, 29, 13, 64, 1, 100, 1, 156, 30, 187, 1, 443, 10, 476, 78, 877, 1, 1326, 1, 2098, 188, 2745, 36, 5203, 1, 6408, 477, 11084, ... (4.15)

Ces deux suites ne sont pas dans l'édition de 1973 du livre de Sloane[S], mais sont présentes dans la nouvelle édition[SP]. Les propriétés analytiques des fonctions (4.13) devraient s'avérer utiles pour l'étude asymptotique des nombres m_n, pour $n \to \infty$.

3 $\mathbf{Z}$-combinaison linéaire infinie d'espèces irréductibles sous la somme (espèces dites *moléculaires*).

4 Espèces moléculaires irréductibles sous le produit.

REFERENCES

[B] **F. Bergeron.** *Une combinatoire du pléthysme.* Journal of Combinatorial Theory, Series A, 46 (1987) 291-305.

[BLL] **F. Bergeron, G. Labelle, et P. Leroux.** *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes.* Publications du LACIM, 19, Université du Québec à Montréal (1994).

[CF] **P. Cartier et D. Foata.** *Problèmes combinatoires de commutation et de réarrangements.* Lecture Notes in Mathematics, 85, Springer-Verlag (1969).

[CG] **B.W. Char, K.O. Geddes, G.H. Gonnet, B.L. Leong, M.B. Monagan, and S.M. Watt.** *MAPLE V Language Reference Manual.* Springer-Verlag, New-York (1991).

[C] **Y. Chiricota.** *Communication personnelle d'un output Maple.* LACIM, UQAM (1994).

[D1] **H. Décoste.** *Séries indicatrices pondérées et q-analogues en théorie des espèces.* Publications du LACIM, 2, Université du Québec à Montréal (1990) [Ph. D.Thesis, U. de Montréal (1989)].

[D2] **H. Décoste.** *Séries indicatrices et q-séries.* Theoretical Computer Science, Elsevier 117 (1993) 169-186.

[DL] **H. Décoste et G. Labelle.** *Le q-dénombrement générique d'une espèce de structures.* Discrete Mathematics (1993), à paraître.

[DS1] **A. Dress and C. Siebeneicher.** *The Burnside ring of the infinite cyclic group and its relations to the necklace algebra, lambda-rings, and the universal ring of Witt vectors.* Adv. in Mathematics, 78 (1989) 1-41.

[DS2] **A. Dress and C. Siebeneicher.** *On the number of solutions of certain linear Diophantine equations.* Hokkaido-Mathematical-Journal, 19 (1990) 385-401.

[F1] **D. Foata.** *La série exponentielle dans les problèmes d'énumération.* Université de Montréal, Canada (1974).

[F2] **D. Foata.** *A combinatorial proof of the Mehler formula.* Journal of Combinatorial Theory, Series A, 24 (1978) 367-376.

[FL1] **D. Foata et J. Labelle.** *Modèles combinatoires pour les polynômes de Meixner.* European Journal of Combinatorics (1983) 305-311.

[FL2] **D. Foata et P. Leroux.** *Polynômes de Jacobi, interprétation combinatoire et fonction génératrice.* Proceedings of the American Mathematical Society, 87 (1983) 47-53.

[FS1] **P. Flajolet and M. Soria.** *The cycle construction.* SIAM Journal on Discrete Mathematics 4 (1991) 58-60.

[FS2] **D. Foata et M. P. Schutzenberger.** *Théorie géométrique des polynômes eulériens,* Lecture Notes in Mathematics, 138, Springer-Verlag (1970).

[FS3] **D. Foata and V. Strehl.** *Combinatorics of Laguerre polynomials.* Enumeration and Design, éditeurs: D. M. Jackson et S. A. Vanstone, Academic Press (1984) 123-140.

[HP] **F. Harary and E. Palmer.** *Graphical enumeration.* Academic Press (1973).

[J1] **A. Joyal.** *Une théorie combinatoire des séries formelles.* Advances in Mathematics, 42 (1981) 1-82.

[J2] **A. Joyal.** *Foncteurs analytiques et espèces de structures,* in G. Labelle et P. Leroux, eds, Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, Québec 1985. Lecture Notes in Mathematics No.1234 , Springer-Verlag, Berlin (1986) 126-159.

[L1] **G. Labelle.** *Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange.* Advances in Mathematics, 42 (1981) 217-247.

[L2] **G. Labelle.** *Some new computational methods in the theory of species,* in G. Labelle et P. Leroux, eds, *Combinatoire énumérative,* Proceedings, Montréal, Québec 1985. Lecture Notes in Mathematics No.1234 , Springer-Verlag, Berlin (1986) 192-209.

[L3] **G. Labelle.** *On asymmetric structures.* Discrete Mathematics 99 (1992) 141-164.

[L4] **G. Labelle.** *Counting asymmetric enriched trees.* Journal of Symbolic Computation 14 (1992) 211-242

[L5] **G. Labelle.** *Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires.* Theoretical Computer Science, Elsevier 117 (1993) 3-22.

[L6] **G. Labelle.** *Enriched q-Abel identities arising from symmetric functions.* Soumis pour publication (1994).

[MR] **N. Metropolis and G.-C. Rota.** *Witt Vectors and the Algebra of Necklaces.* Adv. in Math. 50, (1983) 95-125.

[R] **C. Reutenauer.** *Mots circulaires et polynômes irréductibles.* Annales des sciences mathématiques du Québec 12 (1988) 275-285.

[S1] **N. J. A. Sloane.** *A Handbook of Integer Sequences.* Academic Press (1973).

[S2] **V. Strehl.** *Cycle counting for isomorphism types of endofunctions.* Bayreuther Mathematische Schriften 40 (1992) 153-167.

[S3] **V. Strehl.** *Zykel-Enumeration bei lokal-strukturierten Funktionen.* Habilitationsschrift, Institut für Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung, Universität Erlangen-Nürnberg (1990).

[SP] **N. J. A. Sloane and S. Plouffe.** *The Encyclopedia of Integer Sequences.* Academic Press (1995) à paraître.

[Y] **Y. N. Yeh.** *The calculus of virtual species and $\mathbb{K}$-species,* in G. Labelle et P. Leroux, eds, Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, Québec 1985. Lecture Notes in Mathematics No.1234 , Springer-Verlag, Berlin (1986) 351-369.