Séries indicatrices des Φ-symétries

Gilbert Labelle
LACIM
Université du Québec à Montréal
Montréal, Québec (Canada)

Kathleen Pineau
LACIM et
L'École de technologie supérieure
Montréal, Québec (Canada)

Résumé: À partir d'un ensemble Φ de groupes, non conjugués deux à deux, choisis parmi les sous-groupes des groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$, $n \geq 0$, nous avons introduit dans [10] la notion de série indicatrice des Φ-symétries (ou Φ-série) d'une espèce de structures quelconque F. Il s'agit d'une série formelle, $\Phi_F = \Phi_F(x_1, x_2, \cdots)$, qui généralise simultanément les notions de série indicatrice des cycles, $Z_F = Z_F(x_1, x_2, \cdots)$, au sens de A. Joyal [4] et de série indicatrice d'asymétrie, $\Gamma_F = \Gamma_F(x_1, x_2, \cdots)$, au sens de G. Labelle [7, 8, 9]. Dans le présent travail, nous énonçons d'abord des conditions à imposer à l'ensemble Φ pour que la transformation $F \mapsto \Phi_F$ préserve les opérations usuelles: $\Phi_{F+G} = \Phi_F + \Phi_G$, $\Phi_{F \cdot G} = \Phi_F \cdot \Phi_G$, $\Phi_{F'} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi_F$, $\Phi_{F \circ G} = \Phi_F \circ \Phi_G$. Nous appliquons ensuite la théorie générale au calcul de formules explicites nouvelles pour la Φ-série Φ_F d'espèces F particulières: E (les ensembles), C (les cycles orientés), S (les permutations), ALT (les permutations paires), A (les arborescences) et End (les endofonctions); généralisant ainsi les résultats correspondants pour les séries Z_F et Γ_F, dispersés dans la littérature récente [1, 2, 4], [7] à [11], et [13]. Finalement, nous illustrons le contexte où F est pondérée en calculant la série Φ_{Char} où Char est un modèle combinatoire pour les polynômes de Charlier [2, 15].

Abstract: Given a set Φ of non conjugate subgroups of the symmetric groups $\mathfrak{S}_n$, $n \geq 0$, we introduced in [10] the notion of Φ-index series (or Φ-series) of a combinatorial species F. It is a formal series, $\Phi_F = \Phi_F(x_1, x_2, \cdots)$, generalizing the notions of cycle index series, $Z_F = Z_F(x_1, x_2, \cdots)$, in the sense of A. Joyal [4], and of asymmetric index series, $\Gamma_F = \Gamma_F(x_1, x_2, \cdots)$, in the sense of G. Labelle [7, 8, 9]. In this paper, we present sufficient conditions to impose on the set Φ so that the transformation $F \mapsto \Phi_F$ preserves the usual operations: $\Phi_{F+G} = \Phi_F + \Phi_G$, $\Phi_{F \cdot G} = \Phi_F \cdot \Phi_G$, $\Phi_{F'} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi_F$, $\Phi_{F \circ G} = \Phi_F \circ \Phi_G$. We then apply this general theory to particular species F and obtain new explicit expressions for their Φ-series : E (sets), C (oriented cycles), S (permutations), ALT (even permutations), A (rooted trees), and End (endofunctions); generalizing the corresponding results for the series Z_F and Γ_F, scattered through recent litterature [1, 2, 4], [7] to [11], and [13]. Finally, to illustrate the Φ-series in the weighted context, we compute Φ_{Char} where Char is a combinatorial model for the Charlier polynomiales [2, 15].

1 Introduction

Considérons une espèce pondérée $F = F_w$ quelconque, c.-à-d. : une classe de structures, munies de poids, qui est fermée sous les isomorphismes préservant les poids [4, 12]. Pour tout ensemble fini U, le groupe des permutations de U, noté $\mathfrak{S}_U$, agit par transport de structures sur l'ensemble $F[U]$ des F-structures sur U :

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{S}_U \times F[U] & \longrightarrow & F[U] \\ (\sigma, s) & \longmapsto & \sigma.s = F[\sigma](s). \end{array} \tag{1}$$

En général, la structure $\sigma.s$ est obtenue de la structure s en remplaçant chaque élément u de son ensemble sous-jacent U, par l'élément correspondant $\sigma(u)$. La préservation des poids et la fonctorialité du transport nous assurent que (1) est bien une action de groupe sur un ensemble pondéré au sens de la théorie des groupes.

Lorsque U parcourt la classe des ensembles finis, la famille d'actions (1) peut être représentée de façon canonique par la famille d'actions particulières $(\gamma_{F_n})_{n\geq 0}$

$$\begin{array}{rcl} \gamma_{F_n} : \mathfrak{S}_n \times F[[\![n]\!]] & \longrightarrow & F[[\![n]\!]] \\ (\sigma, s) & \longmapsto & \sigma.s = F[\sigma](s), \end{array}$$

où $[\![n]\!] = \{1, 2, \cdots, n\}$, $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}_{[\![n]\!]}$, $n \geq 0$.

Comme nous l'avons fait dans [10] (dans la lignée des travaux contenus dans [4, 7, 8, 9] ainsi que dans [2, 5, 6] et [12] à [24]) nous considérons l'espèce auxiliaire $F_{w,t} = F_w(X_t) = F_w(X_{t_1} + X_{t_2} + \cdots)$, dans laquelle X_{t_i} désigne l'espèce des singletons de sorte X et de poids t_i, pour chaque $i \geq 1$. Une $F_{w,t}$-structure est une F_w-structure dont chaque élément de l'ensemble sous-jacent est muni d'un poids choisi arbitrairement dans l'ensemble $\{t_i | \ i \geq 1\}$. Le poids d'une $F_{w,t}$-structure est le poids de la F-structure multiplié par le produit des poids des éléments de l'ensemble sous-jacent.

Soit $cc(\mathfrak{S}_n)$ l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$ et Φ un ensemble de représentants de classes de conjugaison de sous-groupes des groupes symétriques, c.-à-d. : $\Phi \subseteq \{K \Subset cc(\mathfrak{S}_n) | n \geq 0\}$. La série indicatrice des Φ-symétries d'une espèce pondérée quelconque F_w est définie comme l'expression de la fonction symétrique $\widetilde{F_{w.t}}^{\Phi}(x)|_{x:=1}$ en variables t_i, $i \geq 1$, dans la base des sommes de puissances $p_i = t_1^i + t_2^i + t_3^i + \cdots$, $i \geq 1$. La série $\widetilde{F_{w.t}}^{\Phi}(x)$ étant donnée par

$$\widetilde{F_{w.t}}^{\Phi}(x) = \sum_{n\geq 0} \widetilde{f_{n,w.t}}^{\Phi} x^n$$

où $\widetilde{f_{n,w,t}}^{\Phi}$ désigne le poids total des types de $F_{w.t}$-structures sur $[\![n]\!]$ dont le stabilisateur est conjugué à un groupe de Φ. Plus précisément nous donnons la définition suivante.

Définition 1.1 *Soit $\Phi \subseteq \{K \underline{\in} cc(\mathfrak{S}_n) | n \geq 0\}$, un ensemble de groupes non conjugués deux à deux et F_w, une espèce pondérée. La série indicatrice des Φ-symétries (ou Φ-série) de l'espèce F_w est caractérisée par les équations*

$$\Phi_{F_w}(x_1, x_2, \cdots) = \widetilde{F_{w,t}}^{\Phi}(x)|_{x:=1} = \sum_{s \underline{\in} \widetilde{F_{w,t}}^{\Phi}} w(s)\ t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \cdots$$

où $n_i(s)$, $i \geq 1$, désigne le nombre d'occurrences du poids t_i dans s et $s \underline{\in} \widetilde{F_{w,t}}^{\Phi}$ signifie que s parcourt un système de représentants des types de $F_{w,t}$-structure dont le stabilisateur est conjugué à un groupe de Φ. La série Φ_{F_w} est l'expression de la fonction symétrique $\widetilde{F_{w,t}}^{\Phi}(x)|_{x:=1}$ en variables t_i dans la base algébrique des sommes de puissances, $x_i := p_i(t_1, t_2, t_3, \cdots) = t_1^i + t_2^i + t_3^i + \cdots$. $\diamond$

En particulier, lorsqu'on choisit les ensembles de groupes $Z = \{K \underline{\in} cc(\mathfrak{S}_n) | n \geq 0\}$ et $\Gamma = \{\{\iota_n\} | n \geq 0\}$, où ι_n désigne l'identité de $\mathfrak{S}_n$, la série indicatrice des Z-symétries de l'espèce F correspond à sa série indicatrice des cycles [4] et la série indicatrice des Γ-symétries correspond à sa série indicatrice d'asymétrie [7].

2 Préservation des opérations

Les propriétés de la Φ-série qui suivent sont données sans démonstration. Le lecteur intéressé pourra les trouver dans la thèse [16] de l'auteure. Afin de simplifier la description de ces propriétés, nous supposons que $\{\{\iota_0\}, \{\iota_1\}\} \subseteq \Phi \subseteq \{K \underline{\in} cc(\mathfrak{S}_n) | n \geq 0\}$ et introduisons la terminologie suivante.

Définitions 2.1

1. *Le saturé de Φ sous la conjugaison, noté $\hat{\Phi}$, est défini par $\hat{\Phi} = \biguplus_{K \in \Phi} \overline{K}$ où $\overline{K}$ désigne la classe de conjugaison de sous-groupes de K dans le groupe symétrique.*
2. *On dit que $\hat{\Phi}$ est librement engendré sous le produit externe, $\star$, de groupes si $K_1 \star K_2 \in \hat{\Phi} \iff K_1 \in \hat{\Phi}$ et $K_2 \in \hat{\Phi}$.*
3. *On dit que $\hat{\Phi}$ est librement engendré sous le produit en couronne généralisé, $\wr$, si $\forall \ell \geq 1$, $\forall n_1, n_2, \cdots, n_\ell \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 + \cdots + n_\ell = n$, $\forall H \leq \mathfrak{S}_n$, $K_i \leq \mathfrak{S}_{k_i}$, $i = 1, 2, \cdots \ell$, $k_i \in \mathbb{N}^*$:*

$$H \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \cdots, n_\ell} \wr (K_1, K_2, \cdots, K_\ell) \in \hat{\Phi} \iff \begin{cases} H \cap \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \cdots, n_\ell} \in \hat{\Phi} \\ \text{et} \\ \forall i, \ \text{tel que } n_i \neq 0, K_i \in \hat{\Phi}. \end{cases} \qquad \diamond$$

Voir Kerber [6] pour une définition de l'opération du produit en couronne généralisé et Yeh [25, 26] pour son utilisation dans le contexte des espèces.

Proposition 2.2 *Pour toute espèce pondérée $F = F_w$, on a :*

$$\Phi_F(x, x^2, x^3, \cdots) = \widetilde{F}^{\Phi}(x) := \sum_{n \geq 0} \widetilde{f_{n,w}}^{\Phi} x^n$$

où $\widetilde{f_{n,w}}^{\Phi}$ désigne le poids total des types de F_w-structures sur $[\![n]\!]$ dont le stabilisateur est conjugué à un groupe de Φ. De plus, si $\Gamma \subseteq \Phi$, on a :

$$\Phi_F(x, 0, 0, \cdots) = F(x) := \sum_{n \geq 0} f_{n,w} \frac{x^n}{n!}$$

où $f_{n,w}$ désigne le poids total des F_w-structures sur $[\![n]\!]$. □

Proposition 2.3 *Pour toutes espèces pondérées $F = F_w$ et $G = G_v$, on a :*

$$\Phi_{F+G}(x_1, x_2, \cdots) = \Phi_F(x_1, x_2, \cdots) + \Phi_G(x_1, x_2, \cdots).$$

De plus, si $\hat{\Phi}$ est librement engendré sous le produit externe de groupes on a :

$$\Phi_{F \cdot G}(x_1, x_2, \cdots) = \Phi_F(x_1, x_2, \cdots) \cdot \Phi_G(x_1, x_2, \cdots). \square$$

Proposition 2.4 *Si $\Gamma \subseteq \Phi$ et si $\hat{\Phi}$ est librement engendré sous le produit externe de groupes on a, pour toute espèce pondérée $F = F_w$,*

$$\Phi_{F'}(x_1, x_2, \cdots) = \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_F(x_1, x_2, \cdots). \square$$

Théorème 2.5 *Si $\hat{\Phi}$ est librement engendré sous le produit en couronne généralisé alors, pour toutes espèces pondérées F_w et G_v, $G_v[\emptyset] = \emptyset$, on a :*

$$\Phi_{F_w \circ G_v}(x_1, x_2, \cdots) = \Phi_{F_w} \circ \Phi_{G_v}(x_1, x_2, \cdots). \square$$

3 Exemples explicites

Dans les exemples qui suivent (dont la démonstration détaillée se trouve dans [16]) on suppose que $\Gamma \subseteq \Phi$ et que Φ possède les propriétés de fermeture sous le produit (voir la proposition 2.3) et sous la substitution (voir le théorème 2.5). Il est évident que les ensembles Z et Γ vérifient ces conditions. On considère aussi l'ensemble de groupes, $\mathcal{E}$, librement engendré par les sous-groupes de Young sous le produit externe et le produit en couronne généralisé. Il est évident que nous avons les inclusions strictes $\Gamma \subset \mathcal{E} \subset Z$.

Plusieurs familles de structures combinatoires sont obtenues en considérant des assemblées de structures connexes. Nous débutons donc cette section en examinant l'espèce E des ensembles. Il est bien connu [4, 7] que ses séries indicatrices des cycles et d'asymétrie sont données par

$$Z_E(x_1, x_2, \cdots) = \exp\left\{\sum_{k \geq 1} \frac{x_k}{k}\right\}, \qquad \Gamma_E(x_1, x_2, \cdots) = \exp\left\{\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{x_k}{k}\right\}.$$

Notre premier exemple décrit explicitement la série Φ_E.

Exemple 1 (les ensembles) La Φ-série indicatrice de l'espèce E des ensembles est donnée par

$$\Phi_E(x_1, x_2, \cdots) = \exp\left\{\sum_{k\geq 1} \alpha_k \frac{x_k}{k}\right\}$$

où les coefficients α_k sont définis par

$$\sum_{k\geq 1} \alpha_k \frac{x^k}{k} = \ln\left(\sum_{n\in J} x^n\right), \quad J = \{n | \mathfrak{S}_n \in \hat{\Phi}\}.$$

Dans les cas où $\Phi = Z$ et $\Phi = \mathcal{E}$ on a : $\alpha_k = 1$, $\forall k \geq 1$, et dans le cas où $\Phi = \Gamma$ on a : $\alpha_k = (-1)^{k-1}$, $\forall k \geq 1$. On retrouve bien les formules pour Z_E et Γ_E ci-dessus.

Exemple 2 (les cycles orientés) La Φ-série indicatrice de l'espèce C des cycles orientés est donnée par

$$\Phi_C(x_1, x_2, \cdots) = \sum_{n\geq 1} c_\Phi(n) \ln\left(\frac{1}{1-x_n}\right) \text{ où } c_\Phi(n) = \sum_{\substack{d|n \\ n/d\in I}} \frac{\mu(d)}{d}, \quad I = \{i \geq 1 | \mathbb{Z}_i \in \hat{\Phi}\}.$$

et μ désigne la fonction de Möbius classique. En particulier, on obtient les séries suivantes :

$$\begin{aligned}
&[4] \quad Z_C(x_1, x_2, \cdots) = \sum_{n\geq 1} \frac{\phi(n)}{n} \ln\left(\frac{1}{1-x_n}\right) \\
&[7] \quad \Gamma_C(x_1, x_2, \cdots) = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n} \ln\left(\frac{1}{1-x_n}\right) \\
&\qquad \mathcal{E}_C(x_1, x_2, \cdots) = \Gamma_C(x_1, x_2, \cdots) + \Gamma_C(x_2, x_4, x_6, \cdots)
\end{aligned}$$

où ϕ désigne la fonction d'Euler.

Exemple 3 (les permutations) La Φ-série indicatrice de l'espèce S des permutations est donnée par

$$\Phi_S(x_1, x_2, \cdots) = \prod_{n\geq 1} \left(\frac{1}{1-x_n}\right)^{s_\Phi(n)} \text{ où } s_\Phi(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \alpha_{n/d}\, d\, c_\Phi(d).$$

En particulier, on obtient les séries suivantes.

$$\begin{aligned}
&[4] \quad Z_S(x_1, x_2, \cdots) = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-x_n} \\
&[7] \quad \Gamma_S(x_1, x_2, \cdots) = \frac{1-x_2}{1-x_1} \\
&\qquad \mathcal{E}_S(x_1, x_2, \cdots) = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)}
\end{aligned}$$

Exemple 4 (les permutations paires) La Φ-série indicatrice de l'espèce ALT des permutations paires est donnée par

$$\Phi_{\mathrm{ALT}}(x_1, x_2, \cdots) = \frac{1}{2}\left[\prod_{n\geq 1}\left(\frac{1}{1-x_n}\right)^{s_\Phi(n)} + \prod_{n\geq 1}\left(\frac{1}{1-x_{2n}}\right)^{s'_\Phi(2n)}(1+x_{2n-1})^{s_\Phi(2n-1)}\right]$$

où

$$s_\Phi(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\alpha_{n/d}\, d\, c_\Phi(d) \text{ et } s'_\Phi(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}(-1)^{n/d}\alpha_{n/d}\, d\, c_\Phi(d).$$

En particulier, on obtient les séries suivantes.

$$[11] \qquad Z_{\mathrm{ALT}}(x_1, x_2, \cdots) = \frac{1}{2}\left[\prod_{n\geq 1}\frac{1}{1-x_n} + \prod_{n\geq 1}(1+x_{2n-1})\right]$$

$$[11] \qquad \Gamma_{\mathrm{ALT}}(x_1, x_2, \cdots) = \frac{2-x_1^2-x_2}{2(1-x_1)}$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ALT}}(x_1, x_2, \cdots) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)} + \frac{1+x_1}{1-x_4}\right]$$

Exemple 5 (les arborescences) La Φ-série indicatrice de l'espèce A des arborescences est donnée par

$$\Phi_A(x_1, x_2, \cdots) = \sum_{n_1+n_2+\cdots<\infty} a_\Phi(n_1, n_2, \cdots)\frac{x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!\cdots}$$

où

$$a_\Phi(n_1, n_2, \cdots) = \begin{cases} n_1^{n_1-1}\prod_{k\geq 2}\left(\theta_k^{n_k} - kn_k\theta_k^{n_k-1}\right) & \text{si } n_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } n_1 = 0 \end{cases}$$

et, $\theta_k = \sum_{d|k}\alpha_{k/d}\, d\, n_d$. En particulier on retrouve les formules de Labelle [7, 8, 9] pour Z_A et Γ_A puisque, pour $\Phi = Z$, $\theta_k = \sum_{d|k} d\, n_d$ et pour $\Phi = \Gamma$, $\theta_k = \sum_{d|k}(-1)^{k/d-1}d\, n_d$. Voir [1] pour une démonstration bijective du résultat pour Z_A; noter que $Z_A = \mathcal{E}_A$.

Exemple 6 (les endofonctions) La Φ-série indicatrice de l'espèce End des endofonctions est donnée par

$$\Phi_{\mathrm{End}}(x_1, x_2, \cdots) = \sum_{n_1+n_2+\cdots<\infty} e_\Phi(n_1, n_2, \cdots)\frac{x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!\cdots}$$

où

$$e_\Phi(n_1, n_2, \cdots) = \prod_{k\geq 1}\sum_{0\leq i\leq n_k}\binom{n_k}{i}(1-s_\Phi(k))^{(i)}(-k)^i\theta_k^{n_k-i},$$

$n^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ et où l'on prend comme convention que $0^0 = 1$. En particulier, en prenant $\Phi = Z$ et $\Phi = \Gamma$, on retrouve les formules de Labelle [7, 8, 9] pour Z_{End} et Γ_{End}.

Nous terminons par un exemple où l'espèce F est munie d'une pondération non triviale et constitue un modèle combinatoire pour les polynômes de Charlier. Voir D. Foata [3] pour un exposé de synthèse sur l'utilisation de techniques combinatoires dans l'étude des familles classiques de polynômes orthogonaux.

Exemple 7 (les polynômes de Charlier) Soit Char l'espèce pondérée définie par l'isomorphisme $\mathrm{Char} = S_{-z}(X_{1/a}) \cdot E(X)$, où S_{-z} désigne l'espèce des permutations dont chacun des cycles est de poids $-z$, modèle combinatoire pour les polynômes de Charlier [2, 15]. On a :

$$\Phi_{\mathrm{Char}}(x_1, x_2, \cdots) = \prod_{n\geq 1} \exp(\alpha_n x_n/n) \left(\frac{1}{1-a^{-n}x_n}\right)^{s_\Phi^{(-z)}(n)}$$

où

$$s_\Phi^{(-z)}(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} d\ \alpha_{n/d}\ (-z)^{n/d} c_\Phi(d).$$

Références

[1] Constantineau, I. *Calcul combinatoire de séries indicatrices de cycles*, Thèse de Ph.D., Dép. de mathématiques et d'informatique, U. du Québec à Montréal, Montréal, 1991; Publication du LACIM no 5, U. du Québec à Montréal, 1991.

[2] Décoste, H. *Séries indicatrices d'espèces pondérées et q-analogues*, Thèse de Ph.D., U. de Montréal, 1989; Publication du LACIM no 2, U. du Québec à Montréal, 1990.

[3] Foata, D. *Combinatoire des identités sur les polynômes orthogonaux*, Internat. Congress Math. Section 16, Combinatorics and Mathematical Programming, Varsovie, Pologne, 1983.

[4] Joyal, A. *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math. **42**, 1981, 1-82.

[5] Kerber, A. *Enumeration Under Finite Group Action: Symmetry Classes of Mappings*, Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, Québec, Lecture Notes in Math. no 1234, Springer-Verlag, 1986, 160-176.

[6] Kerber, A. *Algebraic Combinatorics via Finite Group Action*, Wissenschaftsverlag, 1991.

[7] Labelle, G. *On Asymmetric Structures*, Discrete Math. **99**, North-Holland, 1992, 141-164.

[8] Labelle, G. *Counting Asymmetric Enriched Trees*, Journal of Symbolic Computation **14**, 1992, 211-242.

[9] Labelle, G. *Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires*, Theoretical Computer Science, Elsevier **117**, 1993, 3-22.

[10] Labelle, G., Labelle, J. et K. Pineau, *Sur une généralisation des séries indicatrices d'espèces*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **69**, Vol. 1, 1995, 17-35.

[11] Labelle, G. et K. Pineau, *Ensembles orientés et permutations paires: séries indicatrices et q-séries*, Advances in Applied Math. **15**, 1994, 452-475.

[12] Labelle, J. *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures.* Annales des sciences mathématiques du Québec **7**, no 1, 1983, 59-94.

[13] Labelle, J. *Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité*. Annales des sciences mathématiques du Québec **9**, no 1, 1985, 31-58.

[14] Labelle, J. et Y.-N. Yeh, *The Relation between Burnside Rings and Combinatorial Species*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **50**, no 2, March 1989.

[15] Labelle, J. et Y.-N. Yeh, *The Combinatorics of Laguerre, Charlier and Hermite Polynomials Revisited*, Studies in Applied Math. **80**, 1989, 25-36.

[16] Pineau, K. Thèse de Ph.D., U. du Québec à Montréal, 1994 (en préparation).

[17] Pólya, G. *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphend und Chemische Verbindungen*, Acta. Math. **68**, 1937, 145-254.

[18] Pólya, G. et R.C. Read, *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphes, and Chemical Compounds*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[19] Rota, G.-C. *On the Foundations of Combinatorial Theory I. Theory of Möbius Functions*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie **2**, 1964, 340-368.

[20] Rota, G.-C. *Baxter Algebras and Combinatorial Identities II*, Bull. Amer. Math. Soc. **75**, 1969, 330-334.

[21] Rota, G.-C. et B.E. Sagan, *Congruences Derived from Group Action*, Europ. J. of Comb., no 1, 1980, 67-76.

[22] Rota, G.-C. et D.A. Smith, *Enumeration under group action*, Annali Scuola Normale Superiore - Pisa, Classe di Scienze, Série IV, Vol. IV, no 4, 1977, 637-646.

[23] Stockmeyer, P.K. *Enumeration of Graphs with Prescribed Automorphism Group*, Thèse de Ph.D., U. du Michigan, 1971.

[24] White, D. *Counting Patterns with a given Automorphism Group*, Proc. Amer. Math. Soc. **47**, no 1, 1975, 41-44.

[25] Yeh, Y.-N. *On the Combinatorial Species of Joyal*, Thèse de Ph.D., U. de New York at Buffalo, 1985.

[26] Yeh, Y.-N. *The Calculus of Virtual Species and K-species*, Combinatoire énumérative, Proceedings, G. Labelle et P. Leroux, éditeurs, Lecture Notes in Math. no 1234, Springer-Verlag, 1986, 351-369.