

Un codage des cartes de genre quelconque

Michel MARCUS*

Bernard VAUQUELIN*

24 février 1995

Résumé

Nous généralisons la notion d'arbre (carte plane à une seule face) par celle de g -arbre, carte de genre g à une seule face. Nous établissons alors une bijection entre les cartes d'un genre g donné et les g -arbres bien étiquetés. Cette construction permet de coder les cartes et de mettre en évidence l'algébricité de certaines séries énumératrices.

We consider the following notion, which is the generalisation of a tree (a planar map with one face) : a g -tree is a map of genus g with one face. Then, we construct a bijection between maps of genus g and well labelled g -trees. This construction leads to a code for maps of genus g ; moreover, for some families of maps, it shows the algebraicity of the generating functions.

Introduction

Une carte est une représentation topologique d'un multigraphe connexe sur une surface fermée de R^3 .

Les cartes sur la sphère (généralement appelées planaires) ont été abondamment étudiées et dénombrées par des auteurs comme W. Tutte [10], Brown [4], Mullin [9], R. Cori [5], A. B. Lehman [8], et bien d'autres. Sur des surfaces de genre non nul, des résultats d'énumération existent aussi, mais ils sont nettement moins nombreux; on peut citer par exemple Walsh et Lehman [11], D. Arquès [2], Bender [3], Andrews, Jackson et Visentin [1].

Dans le cas planaire, R. Cori et B. Vauquelin [6] ont construit une bijection entre les cartes et les arbres dits "bien étiquetés". Cette construction leur a permis de donner une preuve bijective du dénombrement des cartes planaires suivant le nombre d'arêtes.

Dans cet article, nous généralisons cette construction pour un genre g quelconque. Si cette généralisation ne semble pas conduire simplement à des formules d'énumération, elle permet toutefois de donner un codage par des mots. Et pour certaines familles de cartes, l'ensemble des mots codes forme un langage algébrique, ce qui implique l'algébricité des séries génératrices énumératrices.

*LaBRI, Centre National de la Recherche Scientifique, URA 1304

1 Cartes

Dans plusieurs travaux, la notion topologique de carte est remplacée par celle de carte combinatoire, plus facile à manipuler. C'est cette notion que nous présentons maintenant, et que nous utiliserons dans toute la suite.

Une carte combinatoire C est un couple (σ, α) de permutations opérant sur un ensemble fini \mathcal{B} et telles que

1. α est une involution sans point fixe.
2. Le groupe engendré par $\{\alpha, \sigma\}$ opère transitivement sur \mathcal{B} .

\mathcal{B} est l'ensemble des *brins*. Les cycles de σ sont les *sommets*, ceux de α les *arêtes*, enfin ceux de $\alpha\sigma$ les *faces* de C . Le *genre* de C est la quantité $g = 1 + \frac{1}{2}[z(\alpha) - z(\sigma) - z(\alpha\sigma)]$, où $z(\theta)$ désigne le nombre de cycles de la permutation θ . Une carte de genre nul est dite *planaire*. Deux cartes $C = (\sigma, \alpha)$ opérant sur \mathcal{B} et $C' = (\sigma', \alpha')$ opérant sur \mathcal{B}' sont isomorphes s'il existe une bijection θ de \mathcal{B} sur \mathcal{B}' telle que $\alpha = \theta^{-1}\alpha'\theta$ et $\sigma = \theta^{-1}\sigma'\theta$. Si $C = C'$, alors θ est un automorphisme. Ce que l'on appelle énumération des cartes porte en réalité sur les classes d'équivalence pour l'isomorphie.

Une *carte pointée* est une carte dans laquelle on se donne un *brin distingué* b^* ; le sommet contenant le brin distingué est appelé par la suite *racine*; deux cartes pointées $C = (\sigma, \alpha, b^*)$ et $C' = (\sigma', \alpha', b'^*)$ sont isomorphes si elles le sont en tant que cartes et si de plus $b'^* = \theta b^*$; on montre que si θ est un automorphisme de cartes pointées, alors θ est l'identité. Un *arbre* est une carte planaire à une seule face. Cette notion est ici généralisée : un *g-arbre* est une carte de genre g à une seule face.

Une carte pointée est *bien étiquetée* si on associe à chaque sommet un entier positif, de telle façon que la racine a pour étiquette 0, et deux sommets adjacents ont des étiquettes différant au plus de 1. Plus précisément, si $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ est l'ensemble des brins, alors une carte bien étiquetée est un couple (C, ϵ) tel que

- C est une carte pointée (σ, α, b^*)
- ϵ est une application de l'ensemble des brins dans les entiers naturels, telle que $\epsilon(b^*) = 0$ et pour tout brin b de \mathcal{B}

$$\epsilon(b) = \epsilon(\sigma b)$$

$$|\epsilon(b) - \epsilon(\alpha b)| \leq 1$$

2 Transformation fondamentale

Nous présentons ici une transformation T qui à toute carte ayant \mathcal{F} pour face distinguée associe bijectivement une carte de même genre, ayant le même nombre d'arêtes, et dont la face distinguée \mathcal{F}' contient strictement \mathcal{F} .

2.1 Notations préliminaires

Pour simplifier l'exposé, nous considérerons désormais exclusivement \mathcal{C} , l'ensemble des cartes pointées définies sur $\mathcal{B} = \{1, 2, \dots, 2n\}$ et telles que 1 soit le brin pointé.

- Pour tout $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$, on note $\theta\mathcal{S}$ l'ensemble des éléments de \mathcal{B} qui sont les images par θ des éléments de \mathcal{S} .
- Pour toute permutation θ sur \mathcal{B} , et pour tout brin b de \mathcal{B} on note $\theta^*\{b\}$ l'ensemble des éléments qui appartiennent au cycle de θ dans lequel on trouve b .
- La clôture de \mathcal{S} par θ , notée $\theta^*\mathcal{S}$, est la réunion des $\theta^*\{b\}$ pour tous les b de \mathcal{S} .
- On dira que la permutation θ opérant sur \mathcal{B} *sature* \mathcal{S} si $\theta^*\mathcal{S} = \mathcal{S}$; \mathcal{S} est alors une union de cycles de θ ; il est alors possible de définir la *restriction* de θ à \mathcal{S} .
- Pour toute partie \mathcal{F} de \mathcal{B} contenant le brin 1, on note $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des cartes telles que $(\alpha\sigma)^*\{1\} = \mathcal{F}$, et $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des cartes telles que $\mathcal{F} \subset (\alpha\sigma)^*\{1\}$ et σ sature \mathcal{F} .
- Pour toute permutation θ opérant sur un ensemble \mathcal{B} , et pour tout ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on note $\theta|_{\mathcal{A}}$ la permutation sur \mathcal{A} définie, pour tout élément a de \mathcal{A} , par $\theta|_{\mathcal{A}}a = \theta^k a$, où k est le plus petit entier naturel non nul tel que $\theta^k a \in \mathcal{A}$. Si θ sature \mathcal{A} , alors $\theta|_{\mathcal{A}}$ est égale à la restriction de θ sur \mathcal{A} .

2.2 Définition

Soit $\mathcal{B} = \{1, 2, \dots, 2n\}$, et \mathcal{F} un sous ensemble de \mathcal{B} . A toute carte pointée $C = (\sigma, \alpha)$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ on associe $T(C) = (\sigma', \alpha)$, le couple de permutations défini par

$$\sigma'(b) = \sigma|_{\mathcal{F}}^{-1}(b) \text{ si } b \in \mathcal{F}$$

$$\sigma'(b) = \alpha\sigma(b) \text{ si } b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{F}$$

On vérifie aisément que σ' est une permutation sur \mathcal{B} . Nous allons montrer que $T(C)$ est une carte (i.e. que $\{\alpha, \sigma'\}$ engendre un groupe transitif) qui a même genre que C .

Dans ce qui suit \mathcal{F}' désigne $\sigma^*\mathcal{F}$, la clôture de \mathcal{F} par σ .

2.3 Premières remarques

Nous présentons ici quelques remarques qui découlent immédiatement de la définition de T .

1. \mathcal{F} étant un cycle de $\alpha\sigma$, $\alpha\sigma$ sature $\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}$.
2. $\alpha\sigma' = \sigma$ sur $\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}'$

Soit $b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{F}'$; par définition, on a $b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{F}$; donc $\alpha\sigma'b = \sigma b$. Et comme par définition σ sature \mathcal{F}' , elle sature aussi $\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}'$.

3. $\alpha\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$

Puisque $\mathcal{F} = (\alpha\sigma)^*\{1\}$, on a $\alpha\sigma\mathcal{F} = \mathcal{F}$; donc, en multipliant à gauche par α , on trouve $\alpha\mathcal{F} = \sigma\mathcal{F}$.

Mais comme, par hypothèse, $\mathcal{F}' = \sigma^*\mathcal{F}$, on a $\sigma\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$; il vient donc $\alpha\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

2.4 Une propriété importante de T

Lemme 1 Pour tout brin b de \mathcal{F} et pour tout entier $k > 0$ il existe un entier j tel que :

$$(\alpha\sigma)^k b = \sigma'(\alpha\sigma')^j \alpha b$$

Preuve : Nous établissons la formule sur $(\sigma^{-1}\alpha)^k$, ce qui est équivalent, et nous procédons par récurrence sur k .

- Pour $k = 1$, soit p le plus petit entier positif ou nul tel que $\sigma^p \alpha b \in \mathcal{F}$, un tel entier existe du fait que $\sigma^{-1}\alpha b = (\alpha\sigma)^{-1}b$ est un élément de \mathcal{F} .

On a alors, puisque σx est égal à $\alpha\sigma'x$ sur $\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}$:

$$\sigma^p(\alpha b) = (\alpha\sigma')^p \alpha b$$

ce qui entraîne

$$\sigma'(\alpha\sigma')^p \alpha b = \sigma_{|\mathcal{F}}^{-1} \sigma^p \alpha b = b'$$

où b' est le premier parmi $\sigma^{-1}\sigma^p \alpha b, \sigma^{-2}\sigma^p \alpha b, \dots, \sigma^{-q}\sigma^p \alpha b$ qui appartient à \mathcal{F} . Mais du fait du choix de p ceci se produit pour la première fois pour $q = p + 1$. Ainsi

$$\sigma'(\alpha\sigma')^p \alpha b = \sigma^{-1}\alpha b.$$

- Supposons la formule établie pour m et calculons $(\sigma^{-1}\alpha)^{m+1}b$. En utilisant la formule avec $k = 1$ pour $b' = (\sigma^{-1}\alpha)^m b$, on obtient l'existence d'un entier l tel que

$$(\sigma^{-1}\alpha)^{m+1}b = (\sigma^{-1}\alpha)(\sigma^{-1}\alpha)^m b = \sigma'(\alpha\sigma')^l \alpha((\sigma^{-1}\alpha)^m b)$$

L'hypothèse de récurrence assure l'existence de j tel que

$$(\sigma^{-1}\alpha)^m b = \sigma'(\alpha\sigma')^j \alpha b$$

Soit en reportant

$$(\sigma^{-1}\alpha)^{m+1}b = \sigma'(\alpha\sigma')^{l+j+1} \alpha b$$

et le résultat est démontré.

Lemme 2 Pour tout brin b de \mathcal{F} on a

$$(\alpha\sigma')^* b \supset \alpha\mathcal{F}$$

Preuve : Si b est un élément de \mathcal{F} , par construction de σ' , $\sigma'b$ appartient à \mathcal{F} . Appliquons le lemme 1 à $b' = \sigma'b$; on obtient

$$(\alpha\sigma)^*b' \subset \sigma'(\alpha\sigma')^*\alpha b' = \sigma'(\alpha\sigma')^*b$$

Soit

$$\mathcal{F} \subset \sigma'(\alpha\sigma')^*b$$

et en appliquant α aux deux membres de l'inclusion, on obtient le résultat.

Proposition 1 *Le cycle de $\alpha\sigma'$ contenant le brin 1 est égal à \mathcal{F}' .*

Preuve :

- L'inclusion $(\alpha\sigma')^*\{1\} \subseteq \mathcal{F}'$ est simple à obtenir; en effet, nous montrons que \mathcal{F}' est clos par $\alpha\sigma'$.

Si b appartient à \mathcal{F}' et pas à \mathcal{F} alors $\alpha\sigma'b = \sigma b$ qui appartient à \mathcal{F}' puisqu'il est clos par σ . Si b appartient à \mathcal{F} alors $\alpha\sigma'b = \alpha\sigma|_{\mathcal{F}}^{-1}b$ appartient à $\alpha\mathcal{F}$ qui est égal à $\sigma\mathcal{F}$ lequel est inclus dans \mathcal{F}' .

- Pour ce qui est de l'inclusion $\mathcal{F}' \subseteq (\alpha\sigma')^*\{1\}$ on utilise le lemme 2.

Soit $b \in \mathcal{F}'$, il existe alors un k et un b' dans \mathcal{F} tels que $b = \sigma^k b'$. Choisissons le k le plus petit tel qu'il en soit ainsi. Si $k > 1$, $\sigma^{k-1}b', \dots, \sigma b'$ ne sont pas dans \mathcal{F} . On a alors :

$$b = (\alpha\sigma')^{k-1}\sigma b'$$

qui est aussi vrai si $k = 1$.

D'après le lemme 2 et puisque $\alpha\mathcal{F} = \sigma\mathcal{F}$:

$$\sigma b' = (\alpha\sigma')^j b'$$

et

$$b = (\alpha\sigma')^{k+j-1}b'$$

Ce qui montre l'inclusion $\mathcal{F}' \subseteq (\alpha\sigma')^*\mathcal{F}$.

Or $\mathcal{F} \subseteq (\alpha\sigma')^*\{1\}$, ce qui donne le résultat.

Nous pouvons maintenant énoncer :

Théorème 1 *$C' = T(C)$ est une carte de même genre que C .*

Nous montrons d'abord que $C' = T(C)$ est une carte, c'est à dire que le groupe engendré par $\{\alpha, \sigma'\}$ muni de la composition des applications opère transitivement sur \mathcal{B} . Il suffit de montrer que pour tout couple (b, b') de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ il existe une permutation $\phi \in \{\alpha, \sigma'\}^*$ telle que $\phi(b) = b'$. Or, puisque C est une carte, il existe $\psi \in \{\alpha, \sigma\}^*$ telle que $\psi(b) = b'$. Considérons deux cas :

1. $\psi = \alpha$: trivialement $\phi = \alpha$ puisque $\alpha' = \alpha$.

2. $\psi = \sigma$: alors, il existe $k \in \mathcal{N}$ tel que $\phi = (\alpha\sigma')^k$; en effet, si $b \in \mathcal{F}$, on sait par les remarques précédentes que $\sigma(b) \in (\alpha\sigma')^*(b)$; sinon, sur $\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}$, on a $\sigma'(b) = \alpha\sigma(b)$, et donc $\sigma(b) = \alpha\alpha\sigma(b) = \alpha\sigma'(b)$.

Si ψ n'est ni α ni σ , alors $\psi = \psi'\alpha$ ou $\psi'\sigma$ et par induction il existe ϕ' telle que $\phi = \phi'\alpha$ ou $\phi = \phi'(\alpha\sigma')^k$ pour un certain k . C' est donc une carte.

Montrons maintenant que $g(C') = g(C)$.

- En effet, nous avons montré que $\mathcal{F}' = (\alpha\sigma')^*\{1\}$, par conséquent $z(\alpha\sigma') = z((\alpha\sigma')|_{\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}'}) + 1$. Mais, comme nous l'avons noté précédemment, sur $\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}'$ on a $\alpha\sigma' = \sigma$; donc $z(\alpha\sigma') = 1 + z(\sigma) - z(\sigma|_{\mathcal{F}'})$.
- Par définition, $\sigma' = \alpha\sigma$ sur $\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}$. Donc $z(\sigma') = z(\alpha\sigma) - 1 + z(\sigma|_{\mathcal{F}})$.
- Enfin, $\mathcal{F}' = \sigma^*\mathcal{F}$, donc $z(\sigma|_{\mathcal{F}'}) = z(\sigma|_{\mathcal{F}})$

On a donc $g(C') = 1 + \frac{1}{2}[z(\alpha) - (z(\sigma) - 1 + z(\sigma|_{\mathcal{F}'})) - (z(\sigma) + 1 - z(\sigma|_{\mathcal{F}}))] = g(C)$, ce qui achève la preuve du théorème.

2.5 Caractérisation de la carte $C' = T(C)$

Nous montrons ici que $T(C)$ appartient à la fois à $\overline{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ et à $\mathcal{C}_{\mathcal{F}'}$.

Preuve : Soient $C = (\sigma, \alpha)$ une carte de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ et $C' = T(C)$. Par construction, σ' sature \mathcal{F} et $1 \in \mathcal{F}$; comme $(\alpha\sigma')^*\{1\} = \mathcal{F}' = \sigma^*\mathcal{F}$, il est clair que \mathcal{F} est inclus dans $(\alpha\sigma')^*\{1\}$; par conséquent, $T(C)$ appartient à $\overline{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$.

Puisque $(\alpha\sigma')^*\{1\} = \mathcal{F}'$, il est immédiat que $T(C) \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}'}$.

2.6 Exemple

Soit la carte $C = (\sigma, \alpha)$ définie sur $\mathcal{B} = \{1, 2, \dots, 28\}$ par

$$\begin{aligned} \sigma &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)(14, 15, 16, 17)(18)(19, 20, 21)(22, 23, 24)(25)(26, 27, 28) \\ \alpha &= (1, 8)(2, 12)(3, 10)(4, 14)(5, 6)(7, 27)(9, 23)(11, 18)(13, 19)(15, 22)(16, 25)(17, 24)(20, 26)(21, 28) \end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{F} = \{1, 7, 12, 19, 26\}$ et $T(C)$ est définie par

$$\sigma' = (1, 12, 7)(2, 10, 18, 11)(3, 14, 22, 9)(4, 6, 27, 21, 13, 8, 23, 17)(5)(15, 25, 16, 24)(19)(20, 28)(26)$$

On vérifie aisément que C et $T(C)$ ont toutes deux genre 1. Voir figures 1 et 2.

2.7 La transformation inverse $R_{\mathcal{F}}$

Dans ce paragraphe, nous construisons la transformation inverse de T .

Soit $C = (\sigma, \alpha)$ une carte de $\overline{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$.

Remarquons d'abord que \mathcal{F} est un sous-ensemble de $(\sigma\alpha)^*\{1\}$.

Preuve : en effet, puisque C est une carte de $\overline{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$, on sait que \mathcal{F} est inclus dans $(\alpha\sigma)^*\{1\}$ et que $\sigma\mathcal{F} = \mathcal{F}$; choisissons deux brins b_1 et b_2 dans \mathcal{F} ; il existe un entier q tel que $b_1 = (\alpha\sigma)^q b_2$;

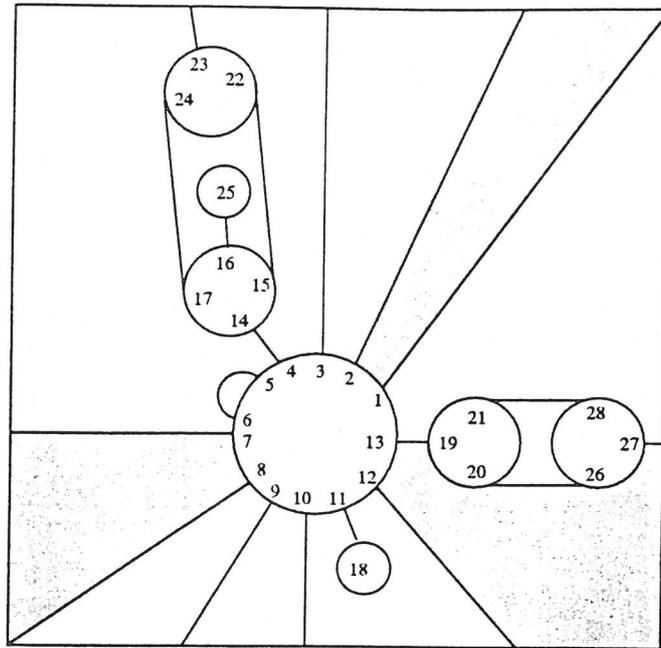


Figure 1: La carte C . Le tore est représenté par un carré dont les côtés opposés sont identifiés. La région hachurée représente la face distinguée.

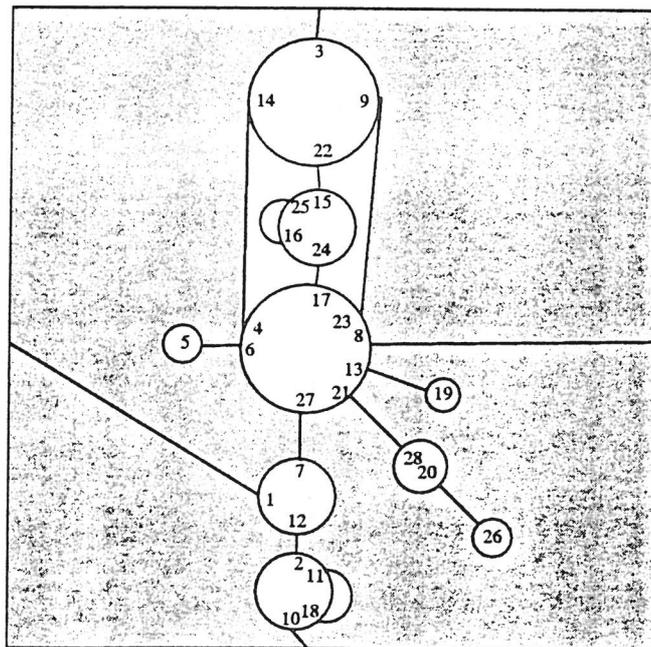


Figure 2: La carte $T(C)$: la face distinguée est plus grande que celle de C .

considérons maintenant $b'_1 = \sigma^{-1}b_1$ et $b'_2 = \sigma^{-1}b_2$; ils appartiennent aussi à \mathcal{F} puisque cet ensemble est saturé par σ ; il existe donc un entier p tel que $b'_1 = (\alpha\sigma)^p b'_2$ et donc $\sigma b'_1 = (\sigma\alpha)^p \sigma b'_2$ soit encore $b_1 = (\sigma\alpha)^p b_2$. Comme 1 est élément de \mathcal{F} , la propriété est établie.

On construit $R_{\mathcal{F}}(C) = (\sigma'', \alpha)$ de la façon suivante :

- $\forall b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{F}, \sigma''(b) = \alpha\sigma(b)$
- $\forall b \in \mathcal{F} \sigma''(b) = \alpha(\alpha\sigma^{-1})^p(b)$, où p est le plus petit entier strictement positif tel que $(\alpha\sigma^{-1})^p(b) \in \mathcal{F}$.

Pour montrer que la construction est correcte, il faut d'abord établir que σ'' est une permutation sur \mathcal{B} , et que de plus c'est la seule permutation telle que $\sigma = \sigma''^{-1} \cdot \alpha\sigma''|_{\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}}$.

Nous utilisons pour cela une généralisation d'un lemme de [6] :

Lemme 3 *Si A et B sont deux ensembles disjoints, π une permutation sur B , ϕ une application injective de A sur $A \cup B$, alors il existe une unique permutation θ sur $A \cup B$ telle que*

- $\theta|_B = \pi$
- $\forall x \in A \theta(x) = \phi(x)$

Preuve : θ est construite récursivement : si $A = \emptyset$, alors $\theta = \pi$, sinon, on choisit un élément a de A qui n'est l'image par ϕ d'aucun élément de A et θ' est construite sur $(A \setminus \{a\}) \cup B$. Posons $\phi(a) = x$, θ est alors donnée par

$$\theta(a) = x, \theta(\theta'^{-1}(x)) = a, \text{ et pour } y \neq x, y \neq a, \theta(y) = \theta'(y).$$

Posons $\mathcal{F}' = (\alpha\sigma)^*\{1\}$. Puisque $C \in \overline{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$, σ sature \mathcal{F} et $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$; de plus, le brin 1 est un élément de \mathcal{F} ; par conséquent :

- σ^{-1} est une permutation sur \mathcal{F} .
- $(\alpha\sigma)$ est une application injective de $\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$ sur \mathcal{F}' .

Le lemme 3 s'applique donc, et σ'' est clairement la permutation θ cherchée sur \mathcal{F}' . Il est clair que sur $\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}'$, $\sigma'' = \alpha\sigma$.

Il nous reste à montrer que $C'' = (\sigma'', \alpha) = R_{\mathcal{F}}(C)$ est une carte.

Vérifions d'abord que $(\alpha\sigma'')^*\{1\} = \mathcal{F}$. En effet, puisque C est une carte de $\overline{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ le brin 1 est dans l'ensemble \mathcal{F} et \mathcal{F} est inclus dans $(\sigma\alpha)^*\{1\}$. Donc il vient

$$\mathcal{F} = \{1, (\alpha\sigma^{-1})^{q_1}1, \dots, (\alpha\sigma^{-1})^{q_1+q_2+\dots+q_\lambda}1\}$$

Or, par construction, on a

$$\begin{aligned} (\alpha\sigma'')^*\{1\} &= \{1, \alpha\alpha(\alpha\sigma^{-1})^{q_1}1 = (\alpha\sigma^{-1})^{q_1}1, \alpha\alpha(\alpha\sigma^{-1})^{q_2}(\alpha\sigma^{-1})^{q_1}1 \\ &= (\alpha\sigma^{-1})^{q_1+q_2}1, \dots, (\alpha\sigma^{-1})^{q_1+q_2+\dots+q_\lambda}1\} = \mathcal{F} \end{aligned}$$

On raisonne alors, comme dans la preuve du théorème 1, sur un couple (b, b') de brins et l'on cherche une permutation ϕ obtenue par composition de α et σ'' telle que $b' = \phi b$:

Si $b' = \alpha b$, évidemment $\phi = \alpha$.

Si $b' = \sigma b$, on distingue deux cas

1. $b \in \mathcal{F}$: comme $C \in \overline{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$, σ sature \mathcal{F} et donc $b' \in \mathcal{F}$. Or $\mathcal{F} = (\alpha\sigma'')^* \{1\}$. Il existe donc k , naturel non nul tel que $b' = (\alpha\sigma'')^k b$ et par conséquent $\phi = (\alpha\sigma'')^k$.
2. $b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{F}$: clairement $\phi = (\alpha\sigma'')$.

$C'' = R_{\mathcal{F}}(C)$ est donc une carte; de plus, comme $(\alpha\sigma'')^* \{1\} = \mathcal{F}$, cette carte est dans $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. Enfin, puisque σ'' est la seule permutation telle que $\sigma = \sigma''^{-1} \cdot \alpha\sigma''|_{\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}}$, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème 2 T est une bijection de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ sur $\overline{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$.

3 Eclatement d'une carte

De ce qui précède, on tire aisément qu'en itérant la transformation T sur une carte de genre g on obtient un g -arbre ayant le même nombre d'arêtes. Dans cette partie, nous formalisons ce résultat; nous montrons ensuite que si l'on étiquette k les brins qui entrent dans la face distinguée à la k^{eme} itération, alors le g -arbre obtenu est bien étiqueté; de plus, la correspondance est bijective.

3.1 Définition

Dans ce qui suit, pour tout $i \geq 0$, on notera $(\sigma_i, \alpha) = T^i(\sigma, \alpha)$, $\mathcal{F}_i = (\alpha\sigma_i)^* \{1\}$. De plus, nous savons maintenant que si $C = (\sigma, \alpha)$ est une carte, alors (σ_i, α) est une carte de même genre que l'on pourra noter C_i . On appelle éclatement d'une carte $C = (\sigma, \alpha)$ le couple $E(C) = (C_m, \epsilon)$ défini comme suit :

- m est le plus petit naturel tel que $\alpha\sigma_m$ n'a qu'un seul cycle.
- ϵ est l'application de \mathcal{B} dans les entiers naturels définie par $\epsilon(b) = 0 \iff b \in \mathcal{F}_0$ et pour $j > 0$, $\epsilon(b) = j \iff b \in \mathcal{F}_j \setminus \mathcal{F}_{j-1}$.

Pour montrer que cette définition est correcte, remarquons d'abord la propriété suivante : la carte (σ, α) n'a qu'une seule face si et seulement si $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

Preuve : Si (σ, α) n'a qu'une face, alors $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \subset \mathcal{B}$ donne le résultat.

Si $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, alors \mathcal{F} est saturé par σ et par $\alpha\sigma$; comme $\{\alpha, \sigma\}$ engendre un groupe transitif cela implique $\mathcal{F} = \mathcal{F}' = \mathcal{B}$.

Donc, si C a une seule face, alors $E = (C, 0)$; sinon $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}$. Et comme par définition $\mathcal{F}' = \sigma^* \mathcal{F}$, clairement, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Comme d'autre part \mathcal{B} est fini, alors il existe un naturel m tel que $T^m(C)$ a une seule face, tandis que $T^{m-1}(C)$ en a plusieurs.

3.2 Propriétés de $E(C)$

Propriété 1 Soit m tel que $E(C) = (C_m, \epsilon)$. Alors, la suite $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_{m-1}$ est une partition de \mathcal{B} .

Par construction, les \mathcal{F}_i constituent une suite croissante de sous-ensembles de \mathcal{B} ; ainsi, les $\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{i-1}$ sont disjoints, et leur réunion est égale à \mathcal{F}_m ; puisque $\mathcal{F}_m = \mathcal{B}$, on a bien une partition.

Propriété 2 $E(C)$ est bien étiquetée par ϵ .

1. Montrons d'abord que si $\epsilon(b) = j$ alors $j - 1 \leq \epsilon(\alpha(b)) \leq j + 1$; cette condition se traduit par $b \in \mathcal{F}_j \setminus \mathcal{F}_{j-1} \iff \alpha(b) \in \mathcal{F}_{j-1} \setminus \mathcal{F}_{j-2} \cup \mathcal{F}_j \setminus \mathcal{F}_{j-1} \cup \mathcal{F}_{j+1} \setminus \mathcal{F}_j$, soit encore $\alpha(b) \in \mathcal{F}_{j+1} \setminus \mathcal{F}_{j-2}$. Bien entendu, si $m < 0$ alors $\mathcal{F}_m = \emptyset$.

Considérons donc un brin $b \in \mathcal{F}_k \setminus \mathcal{F}_{k-1}$. Nous savons que $ab \in \mathcal{F}_{k+1}$. Supposons maintenant que ab soit dans \mathcal{F}_{k-2} ; nous pouvons alors affirmer que b est dans \mathcal{F}_{k-1} , ce qui contredit l'hypothèse.

2. Montrons maintenant que tous les brins d'un même sommet de $E(C)$ ont même étiquette. En effet, à chaque étape j , σ_j est construite sur les brins numérotés $j - 1$ par $\sigma_{j-1}^{-1}|_{\mathcal{F}_{j-1}}$. Par induction sur le nombre d'étapes, les brins dont les étiquettes sont inférieures à $j - 1$ sont déjà à leur place.

3.3 Le résultat principal

Théorème 3 E est une bijection des cartes de genre g vers les g -arbres bien étiquetés ayant le même nombre d'arêtes.

En effet, E est une application injective de $\mathcal{C}g$, l'ensemble des cartes de genre g , dans $\mathcal{C}g_{\mathcal{B}, \epsilon}$, l'ensemble des cartes à une seule face bien étiquetées de genre g , puisque par définition E est une composition de bijections.

D'autre part, montrons que E est une application surjective.

Nous allons montrer que pour toute carte à une seule face bien étiquetée $(C_m = (\sigma_m, \alpha), \epsilon)$, où m est la plus grande étiquette, on peut construire une suite $R_{\mathcal{F}_{m-1}}(C_m) = C_{m-1}, R_{\mathcal{F}_{m-2}}(C_{m-1}), \dots, R_{\mathcal{F}_0}(C_1) = C_0$, où \mathcal{F}_k note l'ensemble des brins étiquetés au plus k . Pour cela, il suffit de montrer que $\forall m \leq k \leq 1$ on a $C_k \in \overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}_{k-1}}$, ce qui se traduit par trois conditions

1. $1 \in \mathcal{F}_{k-1}$
2. σ_k sature \mathcal{F}_{k-1}
3. $\mathcal{F}_{k-1} \subset (\alpha\sigma_k)^* \{1\}$

La condition 1 découle immédiatement de la définition de \mathcal{F}_k et du fait que $\epsilon(1) = 0$

Pour les conditions 2 et 3, procédons par récurrence. De plus, nous remplaçons la condition 2 par une condition 2' plus forte, à savoir σ_k sature $\mathcal{F}_j \forall j < k$. Il est clair que 2' et 3 sont satisfaites pour $k = m$; supposons qu'il en soit ainsi tant que k est supérieur à une certaine valeur $j - 1$, c'est à dire que l'on a

σ_j sature $\mathcal{F}_i \forall i < j$

$$\mathcal{F}_{j-1} \subset (\alpha\sigma_j)^*\{1\}$$

Considérons alors $b \in \mathcal{F}_h$, avec $h < j-1$. Par construction, on a $\sigma_{j-1}b = \alpha(\alpha\sigma_j^{-1})^pb$, avec p plus petit entier positif tel que $(\alpha\sigma_j^{-1})^pb \in \mathcal{F}_{j-1}$. Or, par hypothèse de récurrence, σ_j sature \mathcal{F}_h . Et, comme $h < j-1$, on a $\alpha\sigma_j^{-1}b \in \mathcal{F}_{j-1}$ et $p = 1$. Par conséquent, $\sigma_{j-1}b = \sigma_j^{-1}b \in \mathcal{F}_h$, ce qui établit la condition 2' et donc la condition 2.

Pour la condition 3, remarquons que, de l'hypothèse de récurrence, il découle immédiatement $\mathcal{F}_{j-1} = (\alpha\sigma_{j-1})^*\{1\}$. Et comme par définition $\mathcal{F}_{j-2} \subset \mathcal{F}_{j-1}$, on a bien $\mathcal{F}_{j-2} \subset (\alpha\sigma_{j-1})^*\{1\}$. La condition 3 est donc satisfaite, ce qui achève la preuve.

3.4 Construction directe de $E(C)$

Reprenons les notations de 3.1. Au lieu d'appliquer plusieurs fois la transformation T , on peut construire directement $E(C)$ en calculant d'abord les ensembles $\mathcal{A}_k = \mathcal{F}_k \setminus \mathcal{F}_{k-1}$ si k est non nul; dans le cas contraire, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. \mathcal{A}_k représente donc l'ensemble des brins qui "entrent" dans la face de 1 à la k^{me} itération de T .

Montrons par induction que, pour tout $i > 0$

$$\mathcal{A}_{2i} = (\alpha\sigma)^*\mathcal{A}_{2i-1} \setminus \mathcal{A}_{2i-1}$$

$$\mathcal{A}_{2i-1} = \sigma^*\mathcal{A}_{2i-2} \setminus \mathcal{A}_{2i-2}$$

On sait que $\mathcal{A}_{k+1} = \sigma_k^*\mathcal{F}_k \setminus \mathcal{F}_k$; par ailleurs, par construction, σ_k sature \mathcal{F}_{k-1} ; d'autre part, $\mathcal{F}_{k-1} \subset \mathcal{F}_k$; par conséquent $\mathcal{A}_{k+1} = \sigma_k^*(\mathcal{F}_k \setminus \mathcal{F}_{k-1}) \setminus (\mathcal{F}_k \setminus \mathcal{F}_{k-1})$. D'autre part, sur $\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}_{k-1}$, on sait que $\sigma_k = \alpha\sigma_{k-1}$. Comme enfin $\alpha(\alpha\sigma) = \sigma$, le résultat annoncé vient par induction.

D'autre part, si $E(C) = (T^m(C), \epsilon)$, on vérifie aisément par induction sur m que

si m est pair alors

$$\sigma_m b = \sigma|_{\mathcal{A}_{2i}} b \text{ si } b \in \mathcal{A}_{2i}$$

$$\sigma_m b = (\sigma^{-1}\alpha)|_{\mathcal{A}_{2i+1}} b \text{ si } b \in \mathcal{A}_{2i+1}$$

tandis que si m est impair

$$\sigma_m b = \sigma|_{\mathcal{A}_{2i}}^{-1} b \text{ si } b \in \mathcal{A}_{2i}$$

$$\sigma_m b = (\alpha\sigma)|_{\mathcal{A}_{2i+1}} b \text{ si } b \in \mathcal{A}_{2i+1}$$

3.5 Exemple

Reprenons la carte présentée en 2.6 que l'on peut voir figure 1. On a donc

$$\begin{aligned} \sigma &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)(14, 15, 16, 17)(18)(19, 20, 21)(22, 23, 24)(25)(26, 27, 28) \\ \alpha &= (1, 8)(2, 12)(3, 10)(4, 14)(5, 6)(7, 27)(9, 23)(11, 18)(13, 19)(15, 22)(16, 25)(17, 24)(20, 26)(21, \\ \alpha\sigma &= (1, 12, 19, 26, 7)(2, 10, 18, 11)(3, 14, 22, 9)(4, 6, 27, 21, 13, 8, 23, 17)(5)(15, 25, 16, 24)(20, 28) \end{aligned}$$

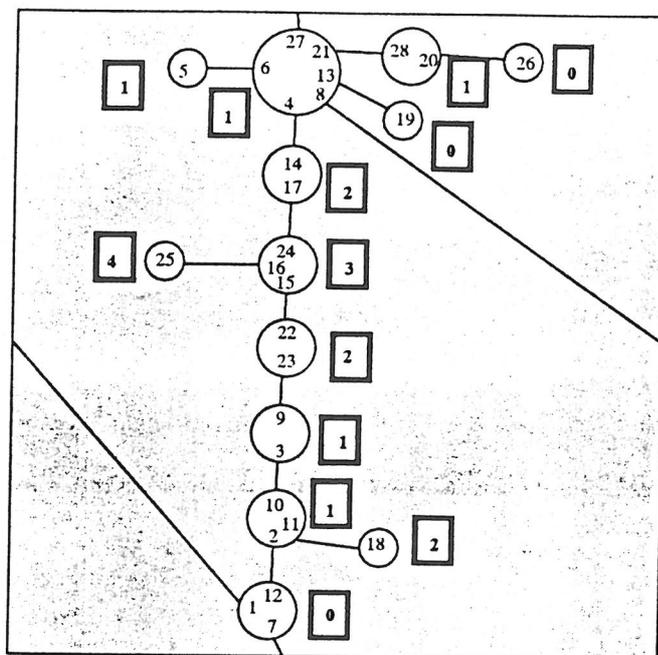


Figure 3: On voit ici l'éclatement de la carte de la figure 1; les étiquettes sont représentées par les entiers encadrés en gras.

On obtient donc

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \{1, 7, 12, 19, 26\} \\
 A_1 &= \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 20, 21, 27, 28\} \\
 A_2 &= \{14, 17, 18, 22, 23\} \\
 A_3 &= \{15, 16, 24\} \\
 A_4 &= \{25\}
 \end{aligned}$$

qui déterminent ϵ . D'où $E(C) = ((\sigma_4, \alpha), \epsilon)$, avec

$$\sigma_4 = (1, 7, 12)(2, 11, 10)(3, 9)(4, 8, 13, 21, 27, 6)(5)(14, 17)(15, 24, 16)(18)(19)(20, 28)(22, 23)(25)(2)$$

Voir figure 3.

4 Application au codage des cartes

4.1 Mots

Soit \mathcal{X} un ensemble fini appelé *alphabet* dont les éléments sont des lettres. Un *mot* f est une suite finie de lettres. La *longueur* de f , notée $|f|$, est le nombre d'éléments de la suite. La *concaténation* de deux mots consiste à écrire l'un à la suite de l'autre pour former un nouveau mot. Un mot f de longueur n est généralement noté par le produit $f(1)f(2) \dots f(n)$. Le mot

vide, noté 1 ou ϵ , est l'application de \emptyset dans \mathcal{X} . \mathcal{X}^* est l'ensemble de tous les mots sur \mathcal{X} ; muni du produit de concaténation, il a une structure de monoïde libre. Un langage est une partie de \mathcal{X}^* .

Un codage est une bijection entre les mots d'un langage et les éléments d'un ensemble.

Un mot g de longueur k est sous-mot du mot f de longueur n si $(g_i)_{i \in [k]}$ est une sous-suite de $(f_j)_{j \in [n]}$.

Enfin, on définit le produit de mélange (en anglais *shuffle*) de f et g et l'on note $f \sqcup g$ l'ensemble des mots h de longueur $|f| + |g|$ et tels que f et g soient sous-mots disjoints de h .

4.2 Mots de Dyck et cartes planaires

\mathcal{D}_k , le langage de Dyck sur k paires de parenthèses, est défini sur l'alphabet $\{x_i, \bar{x}_i | 1 \leq i \leq k\}$ de la façon suivante :

$$1 \in \mathcal{D}_k \text{ et } f, g \in \mathcal{D}_k \implies x_i f \bar{x}_i g \in \mathcal{D}_k$$

Un codage classique associe un arbre pointé à un mot de Dyck sur une paire de lettres : à partir du brin pointé, on parcourt l'arbre par σ_α ; et pour toute arête $\{b, \alpha b\}$, on écrit x si on la traverse pour la première fois, et \bar{x} si c'est la seconde fois. Par exemple

$$\sigma = (1, 2)(3)(4, 5, 6)(7)(8)$$

$$\alpha = (1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8)$$

$$f = x\bar{x}x\bar{x}\bar{x}\bar{x}$$

Cori et Vauquelin [6] ont montré que l'on peut coder les arbres bien étiquetés et donc les cartes planaires par un sous ensemble du langage de Dyck sur trois paires de lettres. Résumons ce codage :

Un mot f sur $X_3 = \{x_0, x_1, x_{-1}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_{-1}\}$ code une carte planaire ssi

1. C'est un mot de Dyck sur X_3

2. Si δ est le morphisme de X_3^* dans les entiers défini pour $i = -1, 0, 1$ par $\delta(x_i) = i = -\delta(\bar{x}_i)$, et $\delta(1) = 0$, alors, pour tout mot g tel que $f = gh$, on a $\delta(g) \geq 0$.

On peut interpréter ce codage de la façon suivante : on effectue le même parcours de l'arbre que ci-dessus; la première fois qu'elle est rencontrée, une arête est envisagée comme le passage d'un sommet étiqueté k à un sommet étiqueté $k + i$, avec $i \in \{-1, 0, 1\}$; on écrit alors x_i . A la seconde rencontre, l'arête fait repasser de $k + i$ à k ; on écrit donc \bar{x}_i .

La condition sur δ traduit évidemment le fait que les étiquettes ne doivent jamais être négatives.

4.3 Mots de Walsh

4.3.1 Séquence d'entiers

Il est bien connu qu'une carte à un seul sommet et k arêtes peut être codée par un mot de longueur $2k$ sur l'alphabet $\{1, 2, \dots, k\}$; le mot comporte exactement deux occurrences de chaque entier; de plus, la première occurrence d'un entier ne survient dans le mot que si tous les entiers inférieurs sont déjà apparus au moins une fois. L'algorithme de codage peut se résumer ainsi : le brin pointé est codé 1; à partir de ce brin, on parcourt le sommet par σ

et pour tout brin b ainsi rencontré, si αb n'a pas encore été rencontré, on code b par le plus petit entier non encore utilisé, tandis que si αb a déjà été rencontré, b est codé par le même entier que αb . Walsh et Lehman [11] appellent *séquence d'entiers* un tel mot. Par exemple

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ \alpha &= (1, 3)(2, 4)(5, 6) \\ S &= 1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 3\end{aligned}$$

Le *genre de la séquence* est celui de la carte codée (ici ce genre est 1).

4.3.2 Cartes et arbres recouvrants

Soit une carte $C = (\sigma, \alpha)$ sur \mathcal{B} et soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ défini de telle façon que l'on ait $z(\sigma|_{\mathcal{A}}) = z(\sigma)$ et que $(\sigma|_{\mathcal{A}}, \alpha|_{\mathcal{A}})$ soit un arbre; on dit que $A = (\sigma|_{\mathcal{A}}, \alpha|_{\mathcal{A}})$ est un arbre recouvrant de C . Intuitivement, on obtient un arbre recouvrant en supprimant certaines arêtes de la carte, mais en conservant tous les sommets. Walsh a montré [11] que l'on peut coder un couple (C, A) formé d'une carte C de genre g et d'un arbre recouvrant distingué A par un mot de $\mathcal{D}_1 \sqcup S_g$, où S_g est l'ensemble des séquences d'entiers de genre g . Le mot de Dyck code bien entendu l'arbre recouvrant; et dans le parcours de codage, les arêtes qui n'appartiennent pas à cet arbre sont codées par les entiers. Par exemple

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2)(3, 4, 5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12) \\ \alpha &= (1, 3)(2, 8)(4, 9)(5, 12)(6, 7)(10, 11) \\ \mathcal{A} &= \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12\} \\ f &= 1\ x\ x\ 1\ x\ 2\ \bar{x}\ x\ 2\ \bar{x}\ \bar{x}\ \bar{x}\end{aligned}$$

4.3.3 Codage des cartes de genre g

Il suffit pour coder les cartes de genre quelconque de définir un arbre recouvrant canonique : celui qui est construit "le plus vite possible" en parcourant la carte par $\sigma\alpha$. Cette méthode est à rapprocher du codage de R. Cori [5] ou encore de l'algorithme de Trémaux. En reprenant la même carte que ci-dessus, on obtient alors

$$f = x\ x\ x\ 1\ \bar{x}\ \bar{x}\ 1\ x\ 2\ \bar{x}\ \bar{x}\ 2$$

La canonicité de l'arbre recouvrant se traduit par le fait que si f code une carte C et si f s'écrit $u\ i\ v\ i\ w$, i étant un entier, alors aucun x de v n'est fermé par un \bar{x} dans w .

4.3.4 g -arbres

D'après la formule du genre donnée en 1, un g -arbre à v sommets possède $v + 2g - 1$ arêtes et il est recouvert par $v - 1$ arêtes. On peut donc coder un g -arbre à m arêtes par un mot de Dyck sur $\{x, \bar{x}\}$ de longueur $2m - 4g$ mélangé canoniquement à une séquence d'entiers de genre g et de longueur $4g$.

On peut remarquer que le nombre de séquences d'entiers de genre g et de longueur $4g$ est aussi, toujours par la formule du genre, le nombre des cartes de genre g à un seul sommet et une seule face.

4.4 g-arbres bien étiquetés

Reprenons le codage de Walsh pour les g-arbres, et indiquons les lettres selon le codage de Cori et Vauquelin : nous obtenons un codage pour les g-arbres bien étiquetés.

4.5 Nouveau codage des cartes de genre g

En utilisant la bijection E définie en 3.1, et le codage ci-dessus, nous obtenons

Théorème 4 *L'ensemble des cartes de genre g est codable par les mot f du langage \mathcal{K}_g , défini comme suit*

- $f \in c \sqcup s$, où c est un mot du langage de Cori et Vauquelin (mots de \mathcal{D}_3 obéissant à certaines conditions sur δ , cf. 4.2) et s est une séquence d'entiers de genre g et de longueur $4g$.
- Si f s'écrit $u i v i w$, où i est un entier, alors
 - aucun x_j de v n'est fermé par un \bar{x}_j de w ;
 - $|\delta(u) - \delta(uv)| \leq 1$

La dernière condition sur δ s'explique trivialement par le fait que par construction (algorithme de codage) le sous-mot $i i$ code une arête; or les étiquettes des sommets reliés par une arête doivent différer au plus de l'unité.

Exemple : une fois de plus, reprenons la carte de 2.6. On a donc

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)(14, 15, 16, 17)(18)(19, 20, 21)(22, 23, 24)(25)(26, 27, 28)$$

$$\alpha = (1, 8)(2, 12)(3, 10)(4, 14)(5, 6)(7, 27)(9, 23)(11, 18)(13, 19)(15, 22)(16, 25)(17, 24)(20, 26)(21, 28)$$

Si on utilise le codage de Walsh, on obtient

$$1 \ 2 \ 3 \ x \ x \ 4 \ 5 \ \bar{x} \ x \ \bar{x} \ 5 \ \bar{x} \ 6 \ 6 \ x \ x \ 7 \ 8 \ \bar{x} \ 8 \ \bar{x} \ 1 \ 4 \ 3 \ x \ \bar{x} \ 2 \ 7$$

Tandis que le codage \mathcal{K}_1 donne

$$x_1 \ x_{-1} \ \bar{x}_{-1} \ x_0 \ x_{-1} \ \bar{x}_{-1} \ \bar{x}_0 \ 1 \ x_0 \ \bar{x}_0 \ x_1 \ x_1 \ x_1 \ \bar{x}_1 \ x_{-1} \ x_{-1} \ x_0 \ 2 \ x_1 \ \bar{x}_1 \ \bar{x}_0 \ \bar{x}_{-1} \ \bar{x}_{-1} \ \bar{x}_1 \ \bar{x}_1 \ \bar{x}_1 \ 1 \ 2$$

4.6 Algébricité de certaines séries énumératrices

Nous appelons *carte k-imbriquée* une carte C telle que $E(C)$ est étiquetée par des entiers inférieurs ou égaux à k , soit encore $E(C) = T^j(C)$ et $j \leq k$.

Théorème 5 *Il existe un codage des cartes k-imbriquées de genre g par les mots d'un langage algébrique.*

Idée de preuve : Pour simplifier, considérons les cartes k -imbriquées dans le tore; elles sont codées par des mots f de $D_3 \sqcup 1\ 2\ 1\ 2$ obéissant aux conditions exposées ci-dessus. De tels mots s'écrivent $f_1\ 1\ f_2\ 2\ f_3\ 1\ f_4\ 2\ f_5$. On appelle *segment* d'un mot f un sous mot f_i pour $1 \leq i \leq 5$. On vérifie aisément que ces mots sont reconnus par un automate à pile déterministe dont l'alphabet de pile est $\{x_0, x_1, x_{-1}\}$ et dont les états, de la forme $\langle p, q, r, s \rangle$, sont définis comme suit :

- p note l'étiquette courante; donc $p \in \{0, 1, \dots, k\}$.
- q note le segment courant; $q \in \{1, 2, \dots, 5\}$.
- r enregistre la valeur de l'étiquette au premier changement de segment et s enregistre cette valeur au deuxième changement de segment; donc $r, s \in \{0, 1, \dots, k\}$.

On désignera l'état d'erreur par $\langle \infty \rangle$. L'état initial est $\langle 0, 1, 0, 0 \rangle$. La pile est vide à l'initialisation. Supposons qu'à une certaine étape on soit dans l'état $\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle$; toute lettre x_i lue est empilée et provoque le passage à l'état $\langle \alpha + i, \beta, \gamma, \delta \rangle$ si $\alpha < k$, sinon à $\langle \infty \rangle$. Toute lettre \bar{x}_i lue provoque un dépilement; si la lettre dépilée est x_i , alors on passe en $\langle \alpha - i, \beta, \gamma, \delta \rangle$, sinon en $\langle \infty \rangle$.

La première lecture de la lettre 1 provoque le passage d'un état $\langle \mu, 1, 0, 0 \rangle$ à $\langle \mu, 2, \mu, 0 \rangle$; la deuxième lecture de cette lettre entraîne le passage de $\langle \nu, 3, \mu, \xi \rangle$ à $\langle \nu, 4, \mu, \xi \rangle$ à condition que $|\nu - \mu| \leq 1$, à $\langle \infty \rangle$ sinon. Une description analogue s'applique aux deux occurrences de la lettre 2.

Les états d'acceptation sont tous les quadruplets $\langle 0, 5, r, s \rangle$, avec $r, s \in \{0, 1, \dots, k\}$. La pile est vide à la fin.

Il est clair que la même construction s'applique quel que soit g puisque le nombre de séquences d'entiers de genre g et de longueur $4g$ est fini. Les mots codant les cartes k -imbriquées de genre g sont donc reconnus par un automate à pile déterministe; ils forment donc un langage algébrique.

Corollaire 1 *La série énumératrice des cartes k -imbriquées de genre g suivant le nombre d'arêtes est une série algébrique.*

5 Conclusion

La bijection entre les cartes de genre g et les g -arbres bien étiquetés nous fournit donc un codage des cartes; les difficultés rencontrées pour retrouver des formules d'énumération simples sont importantes et tiennent pour l'essentiel en deux points

la nécessaire canonicité du mélange;

le respect de l'étiquetage par les arêtes qui n'appartiennent pas à l'arbre recouvrant.

Néanmoins, nous obtenons des familles de cartes pour lesquelles il existe des séries énumératrices algébriques.

Bibliographie

- [1] G.E. Andrews, D.M. Jackson, T.I. Visentin, *A hypergeometric analysis of the genus series for a class of 2-cell embeddings in orientable surfaces*, à paraître.
- [2] D. Arquès, *Relations fonctionnelles et dénombrements des cartes pointées sur le tore*, J. Combin. Theory (B) 43 (1987) 253-274
- [3] E.A. Bender & E.R. Canfield, *The number of rooted maps on an orientable surface*, J. Combin. Theory (B) 53 (1991) 2, 293-299.
- [4] W.G. Brown, *Enumeration of non separable planar maps*, Can. J. Math. 15 (1963) 526-545.
- [5] R. Cori, *Un code pour les graphes planaires et ses applications*, Astérisque 27 (1975) Société Mathématique de France.
- [6] R. Cori & B. Vauquelin, *Planar maps are well labelled trees*, Can. J. Math. 33 (1981) 1023-1042.
- [7] A. Jacques, *Constellations et graphes topologiques*, in *Combinatorial theory and its applications*, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, North Holland Amsterdam, (1970) 657-672.
- [8] A.B. Lehman, *A bijective census of rooted planar maps*, Communication at Ontario Math. Conference (1970)
- [9] R.C. Mullin, *On counting rooted triangular maps*, Can. J. Math. 17 (1965) 373-382.
- [10] W. Tutte, *A census of planar maps*, Can. Journ. Math., 15 (1963) 249-271.
- [11] T.R.S. Walsh & A.B. Lehman, *Counting rooted maps by genus I, II & III*, J. Comb. Theory (B) 13 (1972) 192-218 and 122-141 and (B) 18 (1975) 222-259.