Fonction Génératrice Polylogarithmique d'Ordre n et de Paramètre t

Hoang Ngoc Minh*

Résumé : Soit $G(z) = \sum_{k\geq 1} g_k z^k$ la série génératrice de la suite de nombres complexes $\{g_k\}_{k\geq 1}$. Nous définissons la fonction génératrice polylogarithmique, d'ordre n et de paramètre t, associée à $\{g_k\}$ comme étant l'évaluation du mot $x_1 x_0^{n-1}$ par rapport aux formes différentielles $d\alpha(x_0) = dz/z$ et $d\alpha(x_1) = G(z)dz/z^{1-t}$. Nous établissons les propriétés de cette fonction dans le cadre de la combinatoire des mots et à l'aide du calcul symbolique. Nous calculons ensuite l'évaluation des mots de la forme $x_{i_1} x_0^{n_1} \ldots x_{i_p} x_0^{n_k}$ et, plus particulièrement, des mots de Lyndon-Širšov. Nous établissons également l'évaluation des séries rationnelles. En particulier, l'évaluation des séries $x_{i_1}(c_1 x_0)^* \ldots x_{i_p}(c_k x_0)^*$ nous conduit aux fonctions spéciales du type hypergéométrique et nous permet d'effectuer certaines sommations de fonctions génératrices polylogarithmiques.

Abstract : Let $G(z) = \sum_{k\geq 1} g_k z^k$ be the generating series of the sequence of complex numbers $\{g_k\}_{k\geq 1}$. We define the polylogarithm generating function, of order n and of parameter t, associated to $\{g_k\}$ as the evaluation of the word $x_1 x_0^{n-1}$ with respect to the differential forms $d\alpha(x_0) = dz/z$ and $d\alpha(x_1) = G(z)dz/z^{1-t}$. We establish some properties of this in the context of combinatorics on words and symbolic computation. We compute then the evaluation of any word of the form $x_{i_1} x_0^{n_1} \ldots x_{i_p} x_0^{n_k}$ and, in particular, the Lyndon-Širšov words. We establish also the evaluation of rational series. In particular, the evaluation of the series $x_{i_1}(c_1 x_0)^* \ldots x_{i_p}(c_k x_0)^*$ leads to the generalized hypergeometric functions and allows to make some summations of polylogarithm generating functions.

1 Introduction

Considérons la fonction génératrice polylogarithmique, d'ordre $n \geq 1$ et de paramètre $t \notin \mathbb{Z}_-^*$:

$$\mathrm{Di}_n(G|t,z) = \sum_{k\geq 1} g_k \frac{z^{k+t}}{(k+t)^n},$$

où $\{g_k\}_{k\geq 1}$ est une suite de nombres complexes de série génératrice $G(z) = \sum_{k\geq 1} g_k z^k$ telle que $G(z)/z^{1-t}$ soit méromorphe dans un domaine obtenu en coupant le plan complexe depuis zéro et depuis chaque singularité de G jusqu'à l'infini sans croisement. La fonction $\mathrm{Di}_n(G|0,z)$ n'est rien d'autre que la fonction génératrice polylogarithmique d'ordre n associée à $\{g_k\}_{k\geq 1}$ [3]. Lorsque la suite $\{g_k\}_{k\geq 1}$ est constante et égale à 1, $\mathrm{Di}_n(G|0,z)$ coïncide avec le n-polylogarithme, $\mathrm{Di}_n(G|0,1)$ coïncide avec la fonction zêta de Riemann et $\mathrm{Di}_n(G|t,1)$ avec celle d'Hurwitz.

*LIFL - UA 369 CNRS - University of Lille II, 59653 Villneuve d'Ascq. E-mail : hoang@lifl.lifl.fr

La fonction $\mathrm{Di}_n(G|t,z)$ peut s'obtenir à partir du procédé récursif que nous avons appelé évaluation du mot $x_1x_0^{n-1}$ [2,3], par rapport aux deux formes différentielles $d\alpha(x_0) = dz/z$ et $d\alpha(x_1) = G(z)dz/z^{1-t}$. Nous rappelons que l'évaluation par rapport aux formes différentielles $\{dz/u_0, \ldots, dz/u_m\}$, du mot w de $\{x_0, \ldots, x_m\}^*$, notée $\alpha_\varsigma(w)$, est l'intégrale itérée de K.T. Chen associée à w. L'évaluation de $w = x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, pour le noyau κ_ς s'annulant en ς et pour ces formes différentielles, notée $\alpha_\varsigma(\kappa_\varsigma; w)$, est la solution s'annulant en ς de l'équation différentielle algébrique suivante [2,3] :

$$\left(u_{i_1}\frac{d}{dz}\right) \circ \ldots \circ \left(u_{i_k}\frac{d}{dz}\right)(f) = \kappa_\varsigma.$$

Exemple 1.1 *Soient* $\kappa(z) = \sum_{k\geq 1} g_k z^k, d\alpha(x_0) = dz/z$. *Nous avons* $\alpha_0^z(\kappa; x_0^n) = \sum_{k\geq 1} g_k z^k/k^n$. *Nous obtenons ainsi une* transformation polylogarithmique, *qui à la fonction génératrice ordinaire de la suite de nombres complexes* $\{g_k\}_{k\geq 1}$, *associe la fonction génératrice polylogarithmique d'ordre n de la même suite. Cette transformation vérifie aussi les propriétés suivantes [3] :*

$$(a)\quad \forall k \geq 1, g_k = \sum_{i\in I} \mu_i \nu_i^k \iff \forall n \geq 1, \alpha_0^z(\kappa; x_0^n) = \sum_{i\in I} \mu_i \,\mathrm{Li}_n(\nu_i z),$$

$$(b)\quad \forall k \geq 1, g_k = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i k^i + \sum_{j\in J} \frac{\nu_j}{k^j} \iff \forall n \geq 1, \alpha_0^z(\kappa; x_0^n) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \,\mathrm{Li}_{n-i}(z) + \sum_{j\in J} \nu_j \,\mathrm{Li}_{n+j}(z),$$

(les μ_i et ν_i sont les nombres complexes, $\mathrm{Li}_n(z)$ *est le n-polylogarithme).*

Sous certaines conditions de convergence, nous définissons l'évaluation d'une série formelle S sur un alphabet fini X, comme étant la somme $\sum_{w\in X^*} < S|w > \alpha(\kappa_\varsigma; w)$. De cette façon, la transformation d'évaluation vérifie nombreuses propriétés que le lecteur peut trouver dans [2].

L'exemple suivant montre que pour traiter les équations intégrales, il est préférable de manipuler les codages symboliques, c'est-à-dire les séries formelles en variables non commutatives, pour obtenir différentes descriptions syntaxiques. Puis utiliser, en retour, la transformation d'évaluation comme un outil sémantique pour expliciter les solutions (exactes ou approchées).

Exemple 1.2 *Dans l'étude des arborescences hyperquaternaires, Ph. Flajolet [1], G. Labelle et L. Laforest [5,6] sont amenés à étudier l'équation intégrale suivante dont une des méthodes de résolution passe par les équations combinatoires [5,6] :*

$$e = p + 2^d\alpha(e; x_1x_2^{d-1}), \quad d > 0,$$

avec $d\alpha(x_1) = dz/(1-z), d\alpha(x_2) = dz/z(1-z)$. *Ici, la solution est l'évaluation de la série rationnelle* $(2^d x_1 x_2^{d-1})^*$ *avec le noyau p. Pour* $d = 1$, *d'après le théorème de convolution [2], l'évaluation correspondante donne :*

$$e(z) = \frac{1}{(1-z)^2}\int_0^z (1-s)^2 dp(s).$$

Pour $d > 1$, *les méthodes d'itération reviennent à approximer la série* $(2^d x_1 x_2^{d-1})^*$ *par les combinaisons linéaires de monômes* $x_1x_2^{d-1} \ldots x_1x_2^{d-1}$. *L'évaluation de chacun de ces monômes donne le polylogarithme de N. Nielsen [7,8] (voir Section 2). Avec le même théorème de convolution, l'équation intégrale précédente s'écrit sous forme d'une équation de Volterra, à noyau de Volterra séparé* $K_d(z,s) = \sum_{j=0}^{d-1} a_j(z)b_j(s)$ *et de paramètre* $\lambda = 2^d$ *(à rapprocher de [6]) :*

$$e(z) = p(z) + \lambda \int_0^z K_d(z,s)e(s)ds,$$

où nous avons posé $a_j(z) = \frac{1}{j!}\log^j(\frac{z}{1-z})$ *et* $b_j(z) = \frac{1}{(d-1-j)!}\log^{d-1-j}(\frac{1-z}{z})\frac{1}{1-z}$. *Nous posons aussi, pour tous entiers* $i, j = 0, \ldots, d-1, c_i(z) = \int_0^z b_i(s)e(s)ds, p_i(z) = \int_0^z b_i(s)p(s)ds$ *et* $q_{ij} = b_i a_j$. *Multiplions l'équation intégrale précédente par* b_i, *puis intégrons la nouvelle équation intégrale. Nous obtenons alors un système d'équations intégrales plus simple en les inconnues* $\{c_i\}_{i=1,\ldots,d-1}$ *dont l'existence et l'unicité de la solution conditionnent celle de l'équation intégrale initiale :*

$$c_i(z) = p_i(z) + \lambda \sum_{j=0}^{d-1} \int_0^z q_{ij}(s)c_j(s)ds, \quad i = 0, \ldots, d-1.$$

$$\frac{1}{b_i}\frac{dc_i}{dz} = p + \lambda \sum_{j=0}^{d-1} a_j c_j, \qquad i = 0, \ldots, d-1.$$

$$e = p + \lambda \sum_{j=0}^{d-1} a_j c_j.$$

Avec cette transformation d'évaluation, la construction de la fonction génératrice pour les fonctions $\mathrm{Di}_n(G|t, z), n \geq 1$, revient alors à calculer l'évaluation de la série rationnelle $x_1(ax_0)^*$. Ainsi, les propriétés combinatoires et les sommations de ces fonctions spéciales (et leurs variances) sont établies dans le cadre de l'algèbre des séries formelles en variables non commutatives et à l'aide du calcul symbolique (Section 2). Plus généralement, en explorant l'agèbre de mélange des séries formelles, nous calculons systématiquement l'évaluation des mots $x_{i_1}x_0^{n_1}\ldots x_{i_p}x_0^{n_k}$ et en particulier, ceux de Lyndon-Širšov (Section 3). Cette évaluation nous conduit aux polylogarithmes de N. Nielsen [7,8]. Nous envisageons d'établir, également, l'évaluation des séries rationnelles en examinant leur représentation matricielle minimale (Section 4). En particulier, l'évaluation des fractions rationnelles non commutatives de la forme $x_{i_1}(c_1x_0)^*\ldots x_{i_p}(c_kx_0)^*$ nous conduit aux fonctions hypergéométrique et nous permet d'effectuer certaines sommations de fonctions génératrices polylogarithmiques (voir aussi [2,3]).

2 Transformation d'évaluation et fonctions spéciales

Dans ce qui suit, nous considérons les trois 1-formes suivantes ($t_1, t_2 \notin \mathbb{Z}_-^*$) :

$$d\alpha(x_0) = \frac{dz}{z}, \quad d\alpha(x_1) = G_1(z)\frac{dz}{z^{1-t_1}}, \quad d\alpha(x_2) = G_2(z)\frac{dz}{z^{1-t_2}},$$

où $G_1(z) = \sum_{k\geq 1} g_{1,k}z^k$ et $G_2(z) = \sum_{k\geq 1} g_{2,k}z^k$ telles que $G_1(z)/z^{1-t_1}$ et $G_2(z)/z^{1-t_2}$ soient méromorphes dans un domaine obtenu en coupant le plan complexe depuis zéro et depuis chaque singularité de G_1 et G_2 jusqu'à l'infini sans croisement. S'il existe un chemin d'intégration inclus dans le disque unité ouvert centré en zéro alors, pour $n \geq 1$, nous avons :

$$\alpha_\varsigma^z(x_{i_1}x_0^{n-1}) = \alpha_0^z(x_{i_1}x_0^{n-1}) - \sum_{j=1}^n \alpha_0^\varsigma(x_{i_1}x_0^{j-1})\frac{1}{(n-j)!}\log^{n-j}(\frac{z}{\varsigma}),$$

$$\alpha_\varsigma^z(x_{i_1}x_0^{n-1}) = \sum_{k\geq 1} g_{i_1,k}\frac{z^{k+t_{i_1}}}{(k+t_{i_1})^n} - \sum_{j=1}^n\Big[\sum_{k\geq 1} g_{i_1,k}\frac{\varsigma^{k+t_{i_1}}}{(k+t_{i_1})^j}\Big]\frac{1}{(n-j)!}\log^{n-j}(\frac{z}{\varsigma}),$$

$$\alpha_\varsigma^z(x_{i_1}x_0^{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^{i-1}}{i!}\log^i(\frac{z}{\varsigma})\alpha_\varsigma^z(x_{i_1}x_0^{n-1-i}) + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\log^{n-1-j}(\varsigma)}{(n-1-j)!}\int_\varsigma^z\frac{[-\log(s)]^j}{j!}d\alpha_\varsigma^s(x_{i_1}).$$

Exemple 2.1 *(N. Nielsen [7,8]) Soient $\{g_{1,k}\}_{k\geq 1}$ et $\{g_{2,k}\}_{k\geq 1}$ deux suites définies par $g_{1,k}=1$ et $g_{2,k}=(-1)^k$. Alors pour tous entiers $i,j\geq 1$, nous avons :*

$$\begin{aligned}
\alpha_0^z(x_1x_0^{i-1}) &= z^{t_1}\sum_{k\geq 1}\frac{z^k}{(k+t_1)^i},\\
\alpha_0^z(x_2x_0^{j-1}) &= z^{t_2}\sum_{k\geq 1}\frac{(-z)^k}{(k+t_2)^j},\\
\alpha_0^z(x_1x_0^{i-1}x_1x_0^{j-1}) &= z^{2t_1}\sum_{k\geq 2}\Big[\frac{1}{(1+t_1)^i}+\frac{1}{(2+t_1)^i}+\ldots+\frac{1}{(k+t_1-1)^i}\Big]\frac{z^k}{(k+2t_1)^j},\\
\alpha_0^z(x_1x_0^{i-1}x_2x_0^{j-1}) &= z^{t_1+t_2}\sum_{k\geq 2}\Big[\frac{1}{(1+t_1)^i}-\frac{1}{(2+t_1)^i}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k+t_1-1)^i}\Big]\frac{(-z)^k}{(k+t_1+t_2)^j},\\
\alpha_0^z(x_2x_0^{i-1}x_2x_0^{j-1}) &= z^{2t_2}\sum_{k\geq 2}\Big[\frac{1}{(1+t_2)^i}+\frac{1}{(2+t_2)^i}+\ldots+\frac{1}{(k+t_2-1)^i}\Big]\frac{(-z)^k}{(k+2t_2)^j},\\
\alpha_0^z(x_2x_0^{i-1}x_1x_0^{j-1}) &= z^{t_1+t_2}\sum_{k\geq 2}\Big[\frac{1}{(1+t_2)^i}-\frac{1}{(2+t_2)^i}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k+t_2-1)^i}\Big]\frac{z^k}{(k+t_1+t_2)^j},\\
\alpha_0^z(x_1x_0^{i-1} ⧢ x_1x_0^{j-1}) &= z^{2t_1}\sum_{k\geq 2}\Big[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{(l+t_1)^i(k-l+t_2)^j}\Big]z^k,\\
\alpha_0^z(x_1x_0^{i-1} ⧢ x_2x_0^{j-1}) &= z^{t_1+t_2}\sum_{k\geq 2}\Big[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{(-1)^l}{(l+t_1)^i(k-l+t_2)^j}\Big](-z)^k,\\
\alpha_0^z(x_2x_0^{i-1} ⧢ x_2x_0^{i-1}) &= z^{2t_2}\sum_{k\geq 2}\Big[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{(l+t_1)^i(k-l+t_2)^j}\Big](-z)^k.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de convolution [2], nous avons en particulier les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha_\varsigma^z(x_{i_1}x_0^{n_1}\ldots x_{i_k}x_0^{n_k}) &= \int_\varsigma^z\int_\varsigma^{s_k}\ldots\int_\varsigma^{s_2}\frac{1}{n_1!}\log^{n_1}(\frac{s_2}{s_1})\ldots\frac{1}{n_k!}\log^{n_k}(\frac{z}{s_k})d\alpha_\varsigma^{s_1}(x_{i_1})\ldots d\alpha_\varsigma^{s_k}(x_{i_k}),\\
\alpha_\varsigma^z[x_{i_1}(c_1x_0)^*\ldots x_{i_k}(c_kx_0)^*] &= \int_\varsigma^z\int_\varsigma^{s_k}\ldots\int_\varsigma^{s_2}(\frac{s_2}{s_1})^{c_1}\ldots(\frac{z}{s_k})^{c_k}d\alpha_\varsigma^{s_1}(x_{i_1})\ldots d\alpha_\varsigma^{s_k}(x_{i_k}).
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons d'une part :

$$\begin{aligned}
\alpha_\varsigma^z(x_{i_1}x_0^{n-1}) &= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\log^{n-1-j}(z)}{(n-1-j)!}I_\varsigma^z(x_0^jx_{i_1}),\\
\alpha_\varsigma^z(x_{i_1}x_0^{n-1}x_{i_2}x_0^{p-1}) &= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\sum_{q=0}^{p-1}\binom{j+q}{q}\frac{\log^{p-1-q}(z)}{(p-1-q)!}I_\varsigma^z(x_0^{n-1-j}x_{i_1}x_0^{j+q}x_{i_2}),
\end{aligned}$$

où $I_\varsigma^z(x_0^jx_{i_1}) = \int_\varsigma^z\frac{[-\log(s)]^j}{j!}d\alpha_\varsigma^s(x_{i_1})$ et $I_\varsigma^z(x_0^jx_{i_1}x_0^qx_{i_2}) = \int_\varsigma^z I_\varsigma^s(x_0^jx_{i_1})\frac{[-\log(s)]^q}{q!}d\alpha_\varsigma^s(x_{i_2})$. Nous obtenons d'autre part :

$$\begin{aligned}
\alpha_\varsigma^z[x_{i_1}(c_1x_0)^*] &= \sum_{k\geq 1}g_{i_1,k}\frac{z^{k+t_{i_1}}}{k+t_{i_1}-c_1}-(\frac{z}{\varsigma})^{c_1}\sum_{k\geq 1}g_{i_1,k}\frac{\varsigma^{k+t_{i_1}}}{k+t_{i_1}-c_1},\\
\alpha_\varsigma^z[x_{i_1}(c_1x_0)^*x_{i_2}(c_2x_0)^*] &= \sum_{k\geq 2}\Big[\sum_{l=1}^{k}\frac{g_{i_1,l}g_{i_2,k-l}}{l+t_{i_1}-c_1}\Big]\frac{z^{k+t_{i_1}+t_{i_2}}}{k+t_{i_1}+t_{i_2}-c_1}\\
&\quad -(\frac{z}{\varsigma})^{c_2}\sum_{k\geq 2}\Big[\sum_{l=1}^{k}\frac{g_{i_1,l}g_{i_2,k-l}}{l+t_{i_1}-c_1}\Big]\frac{\varsigma^{k+t_{i_1}+t_{i_2}}}{k+t_{i_1}+t_{i_2}-c_1}.
\end{aligned}$$

Exemple 2.2 *Avec les mêmes suites de l'exemple 2.1, nous avons :*

$$\alpha_0^z[x_1(c_1x_0)^*] = z^{t_1}\sum_{k\geq 1}\frac{z^k}{k+t_1-c_1},$$

$$\alpha_0^z[x_2(c_2x_0)^*] = z^{t_2}\sum_{k\geq 1}\frac{(-z)^k}{k+t_2-c_2},$$

$$\alpha_0^z[x_1(c_1x_0)^*x_1(c_2x_0)^*] = z^{2t_1}\sum_{k\geq 2}\Big[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{l+t_1-c_1}\Big]\frac{z^k}{k+2t_1-c_2},$$

$$\alpha_0^z[x_1(c_1x_0)^*x_2(c_2x_0)^*] = z^{t_1+t_2}\sum_{k\geq 2}\Big[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{(-1)^l}{l+t_1-c_1}\Big]\frac{(-z)^k}{k+t_1+t_2-c_2},$$

$$\alpha_0^z[x_2(c_1x_0)^*x_2(c_2x_0)^*] = z^{2t_2}\sum_{k\geq 2}\Big[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{l+t_2-c_1}\Big]\frac{(-z)^k}{k+2t_2-c_2},$$

$$\alpha_0^z[x_2(c_1x_0)^*x_1(c_2x_0)^*] = z^{t_1+t_2}\sum_{k\geq 2}\Big[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{(-1)^l}{l+t_2-c_1}\Big]\frac{z^k}{k+t_1+t_2-c_2},$$

$$\alpha_0^z[x_1(c_1x_0)^* \sqcup\!\sqcup\, x_1(c_2x_0)^*] = z^{2t_1}\sum_{k\geq 2}\Big[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{(l+t_1-c_1)(k-l+t_1-c_2)}\Big]z^k,$$

$$\alpha_0^z[x_1(c_1x_0)^* \sqcup\!\sqcup\, x_2(c_2x_0)^*] = z^{t_1+t_2}\sum_{k\geq 2}\Big[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{(-1)^l}{(l+t_1-c_1)(k-l+t_2-c_2)}\Big](-z)^k,$$

$$\alpha_0^z[x_2(c_1x_0)^* \sqcup\!\sqcup\, x_2(c_2x_0)^*] = z^{2t_2}\sum_{k\geq 2}\Big[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{(l+t_2-c_1)(k-l+t_2-c_2)}\Big](-z)^k.$$

Si, en particulier, $G_{i_1}(z) = z^{c_1}/(1-z)^{a_{i_1}}$ et $G_{i_2}(z) = z^{c_2}/(1-z)^{a_{i_2}}$ alors :

$$\alpha_0^z[x_{i_1}(c_1x_0)^*] = z^{c_1+t_{i_1}}\int_0^1 s^{t_{i_1}-1}(1-zs)^{-a_{i_1}}ds,$$

$$\alpha_0^z[x_{i_1}(c_1x_0)^*x_{i_2}(c_2x_0)^*] = z^{c_2+t_{i_2}}\int_0^1\int_0^1 (s_1s_2)^{t_{i_1}-1}(1-zs_1s_2)^{-a_{i_1}}s_2^{c_1+t_{i_2}}(1-zs_2)^{-a_{i_2}}ds_1ds_2.$$

Ainsi, les séries $x_{i_1}(c_1x_0)^*\ldots x_{i_p}(c_px_0)^*$ peuvent être utilisées pour coder certaines fonctions hypergéométriques généralisées. Certaines sommations de polylogarithmes peuvent être aussi obtenues à partir de ces fonctions hypergéométriques (voir [2,3] pour plus de précisions).

Exemple 2.3 *Soit* $k>1, \sum_{n\geq 0}(\frac{k-1}{k})^n \operatorname{Li}_{n+1}(-z^k) = -kz{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}1,1/k\\1/k+1\end{matrix}\Big|-z^k\right)$. *Alors, les sommations* $\sum_{n\geq 1}(\frac{k-1}{k})^n\eta(n)$ *donnent les nombres irrationnels* $\frac{k^2}{k-1}{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}1,1/k\\1/k+1\end{matrix}\Big|-1\right)$. *Par exemple* $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{2})^n\eta(n) = \pi$, $\sum_{n\geq 1}(\frac{2}{3})^n\eta(n) = \frac{3}{2}\log 2+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$, $\sum_{n\geq 1}(\frac{3}{4})^n\eta(n) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\log(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}})+\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$, *puisque (rappelons que* $\operatorname{Li}_n(-1) = -\eta(n)$*) :*

$$\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{2})^n \operatorname{Li}_n(-z^2) = -4z\arctan z,$$

$$\sum_{n\geq 1}(\frac{2}{3})^n \operatorname{Li}_n(-z^3) = \frac{3z^2}{2}\Big[\log(\frac{\sqrt{1-z+z^2}}{z+1}) - \sqrt{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}(2z+1)) - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi\Big],$$

$$\sum_{n\geq 1}(\frac{3}{4})^n \operatorname{Li}_n(-z^4) = \frac{4\sqrt{2}z^2}{3}\Big[\frac{1}{2}\log(\frac{z^2-\sqrt{2}z+1}{z^2+\sqrt{2}z+1}) - \arctan(\sqrt{2}z+1) - \arctan(\sqrt{2}z-1)\Big].$$

3 L'évaluation des mots de Lyndon-Širšov

Equipons l'alphabet X l'ordre total, noté "$<$". Nous considérons sur X^*, ensuite, l'ordre lexicographique inverse comme suit :

$$u < v \iff \begin{cases} \text{soit } \exists w \in X^*, w \neq \varepsilon & \text{tel que} \quad wu = v, \\ \text{soit } \exists f, g, h \in X^*, x, y \in X, x < y & \text{tels que} \quad u = fxh, v = gyh. \end{cases}$$

Nous notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des mots de Širšov. Un mot est dans $\mathcal{S}$ si et seulement si il est strictement plus petit que ses facteurs gauches pour l'ordre lexicographique inverse. Si $b \in \mathcal{S} \setminus X$ alors $b = ml$ où $l, m \in \mathcal{S}$ et $l < m$ (le couple (m, l) est appelé la *factorisation standard* de b).

Exemple 3.1 *Soit $\{x_0, x_1\}$ avec $x_1 < x_0$, les mots de Širšov de longueur au plus 5 sont les 14 mots $\{x_0, x_1x_0^4, x_1x_0^3, x_1^2x_0^3, x_1x_0^2, x_1x_0x_1x_0^2, x_1x_0, x_1^2x_0^2, x_1^2x_0x_1x_0, x_1x_0x_1^2x_0, x_1^2x_0, x_1^3x_0, x_1^4x_0, x_1\}$.*

Chaque mot w de X^* peut s'écrire alors de manière unique comme factorisation par les mots de Širšov, $l_1^{i_1} l_2^{i_2} \ldots l_k^{i_k}$, où chaque l_i est un mot de Širšov et $l_1^{i_1} < \ldots < l_k^{i_k}$ [10]. D'après le théorème de D.E. Radford [9], on a :

$$\frac{l_1^{ш\, i_1} ш \ldots ш\, l_k^{ш\, i_k}}{i_1! \ldots i_k!} = w + \sum_{u \in \mathcal{S}_{|w|}, w < u} c_u u.$$

Ainsi, l'évaluation des mots w peut s'effectuer à l'aide de l'évaluation des mots de Širšov. Elle revient à calculer l'évaluation, à l'aide de la Section 2, des mots de la forme $x_{i_1} x_0^{n_1} \ldots x_{i_k} x_0^{n_k}$.

Exemple 3.2 *(N. Nielsen [7,8]) Soient $d\alpha(x_0) = dz/z$ et $d\alpha(x_1) = dz/(1-z)$. Si on note :*

$$s_n = \alpha_0^1(x_1 x_0^{n-1}), \quad s_{n,p} = \alpha_0^1(x_1^p x_0^{n-1}) = \sum_{k \geq p} \frac{S_k^{(k-p)}}{(k-1)!} \frac{1}{k^n}, \quad c_{n,p} = \alpha_0^1(x_1 x_0^{n-1} x_1 x_0^{p-1}) = \sum_{k \geq 2} H_{k-1}^{(n)} \frac{1}{k^p},$$

où les $S_k^{(p)}$ sont les nombres de Stirling et les $H_k^{(n)}$ sont les nombres harmoniques, alors [7] :

$$\begin{aligned}
s_n s_p &= s_{n+p} + c_{n,p} + c_{p,n}, && \text{(pour } n > 1, p > 1\text{)},\\
s_{p+1} &= \sum_{\nu=1}^{p-1} c_{\nu,p}, && \text{(pour } p > 1\text{)},\\
c_{n,p} &= (-1)^n \sum_{\nu=0}^{p-2} \binom{n+\nu-1}{n-1} c_{n+\nu,p-\nu} + \sum_{\nu=0}^{n-2} (-1)^\nu \binom{p+\nu-1}{p-1} s_{n-\nu} s_{p+\nu} \\
&\quad -(-1)^n \binom{p+n-2}{p-1} (s_{p+n} + c_{1,p+n-1}), && \text{(pour } n > 0,\ p > 1\text{)},\\
c_{1,p} &= \frac{p}{2} s_{p+1} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=2}^{p-1} s_\nu s_{p+1-\nu}, && \text{(pour } p > 2\text{)}.
\end{aligned}$$

On a aussi [8] : "La somme de la série numérique $s_{n,p}$ peut s'exprimer sous forme d'un polynôme entier en les nombres $s_2, s_3, \ldots, s_{n+p}$, et homogène du degré $(n+p)$ dans ces quantités si nous supposons s_r du degré r ; les coefficients du polynôme sus-dit sont des nombres rationnels".

4 L'évaluation des séries rationnelles

4.1 Si la série rationnelle est échangeable alors, en la décomposant en éléments simples, nous pouvons calculer entièrement l'évaluation.

Exemple 4.1 *Soit la représentation linéaire de la série rationnelle, R_1, suivante :*

$$\lambda = (1 \quad 0), \quad \mu(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cette série est échangeable ($\mu(x_0x_1) = \mu(x_1x_0)$) et nous avons :

$$\begin{aligned} R_1 &= (1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_0^* & x_0^*x_0x_0^* \\ 0 & x_0^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ш (1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_1^* & -x_1^*x_1x_1^* \\ 0 & x_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &+ (1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_0^* & x_0^*x_0x_0^* \\ 0 & x_0^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ш (0 \quad 1)\begin{pmatrix} x_1^* & -x_1^*x_1x_1^* \\ 0 & x_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x_0^* ш x_1^* ш (x_0 - x_1). \end{aligned}$$

Pour les formes différentielles $d\alpha(x_0) = \frac{dz}{z}, d\alpha(x_1) = \frac{dz}{1-z}$, nous avons $\alpha_\varsigma^z(R_1) = \frac{z}{\varsigma}\frac{1-\varsigma}{1-z}\log(\frac{z}{\varsigma}\frac{1-\varsigma}{1-z})$.

4.2 En observant la nilpotence de la matrice $\rho(x_0^*)\rho(x_1)$, (ρ est le morphisme de monoïde défini, pour tout $x \in X, \rho(x) = \mu(x)x$), nous pouvons effectivement décider si la série rationnelle peut se développer en combinaison linéaire d'un nombre fini de fractions rationnelles non commutatives $x_{i_1}(c_1x_0)^* \ldots x_{i_p}(c_px_0)^*$. L'évaluation de ces fractions s'effectue à l'aide de la Section 2. Nous avons aussi vu que ces fractions peuvent être utilisées pour coder certaines fonctions du type hypergéométrique. Ainsi, nous pouvons effectivement décider si l'évaluation d'une série rationnelle se décompose en combinaison linéaire finie de fonctions du type hypergéométrique.

Exemple 4.2 *Soit la représentation linéaire de la série rationnelle, R_2, suivante :*

$$\lambda = (1 \quad 0), \quad \mu(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons $\rho(x_0)^* = \begin{pmatrix} x_0^* & x_0^*x_0x_0^* \\ 0 & x_0^* \end{pmatrix}$, $\rho(x_0)^*\rho(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & -x_0^*x_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La série rationnelle R_2 est donc nilpotente d'ordre 2 et nous obtenons :

$$R_2 = x_0^*x_0x_0^* - x_0^*x_1x_0^* = x_0^* ш (x_0 - x_1).$$

Pour les mêmes formes différentielles que précédemment, nous avons $\alpha_\varsigma^z(R_2) = \frac{z}{\varsigma}\log(\frac{z}{\varsigma}\frac{1-\varsigma}{1-z})$.

4.3 La factorisation du monoïde libre [10] nous permet aussi de déduire l'expression exacte ou approchée l'évaluation de la série rationnelle S :

$$\alpha_\varsigma^z(S) = \lambda\Big(\prod_{\substack{b \in S_{\leq K} \\ \text{lexicographique croissant}}} e^{\alpha_\varsigma^z(R_b)\mu(Q_b)}\Big)\gamma$$

suivant que l'algèbre de Lie des matrices $\{\mu(x)\}_{x\in X}$ est nilpotente d'ordre K ou non. Dans le cas nilpotent, avec les mêmes formes différentielles que précédemment, l'évaluation s'exprime en sommes et produits finis d'exponentielles de polylogarithmes de N. Nielsen. Rappelons que les mots de Širšov permettent de définir une base $\{Q_b\}_{b\in\mathcal{S}}$ de l'algèbre de Lie libre, appelée base de Širšov, en posant récursivement $Q_b = [Q_m, Q_l]$ si (m,l) est la factorisation standard de l. Rappelons aussi que les $\{R_b\}_{b\in\mathcal{S}}$ forment une base de transcendance de l'algèbre des polynômes pour le produit de mélange, elle est la base duale de la base de Širšov. Les $\{R_w\}_{w\in X^*}$ sont les polynômes homogènes de degré $|w|$ et leurs évaluations sont les suivantes ($l_i \in \mathcal{S}$) [4] :

$$R_w = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } w = \varepsilon, \\ R_v x & \text{si } w = vx \in \mathcal{S}, \\ \frac{R_{l_1}^{ш\, i_1} ш \dots ш\, R_{l_k}^{ш\, i_k}}{i_1! \dots i_k!} & \text{si } w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}, \end{cases} \quad \alpha[R_w] = \begin{cases} 1 & \text{si } w = \varepsilon, \\ \int \alpha(R_v) d\alpha(x) & \text{si } w = vx \in \mathcal{S}, \\ \frac{[\alpha(R_{l_1})]^{i_1} \dots [\alpha(R_{l_k})]^{i_k}}{i_1! \dots i_k!} & \text{si } w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}. \end{cases}$$

References

[1] Ph. Flajolet.– *Arbres de recherche, équations différentielles, fonctions hypergéométriques et dilogarithmes*, "Fonctions spéciales et Calcul Formel", Limoges, 1993.

[2] Hoang Ngoc Minh.– *Summations of Polylogarithms via Evaluation Transform*, to appear in Mathematics and Conputers in Simulation.

[3] Hoang Ngoc Minh.– *Chained System Steering With Singular Inputs*, "New Computer Technologies in Control Systems", Pereslavl-Zalessky, Russia, 1994.

[4] G. Jacob.– *Lyndon Discretization and Exact Motion Planning*, "First European Control Conference", Grenoble, 1991.

[5] G. Labelle & L. Laforest.– *Etude de constantes universelles pour les arborescences hyperquaternaires de recherche*, pp. 89-98.

[6] G. Labelle & L. Laforest.– *Variations combinatoires autour des arborescences hyperquaternaires*, "Atelier de Combinatoire franco-québecois", Bordeaux, 1991.

[7] N. Nielsen.– *Recherches sur le carré de la dérivée logarithmique de la fonction gamma et sur quelques fonctions analogues*, Annali di Matematica, vol 9, 1904, pp. 190-210.

[8] N. Nielsen.– *Recherches sur des généralisations d'une fonction de Legendre et d'Abel*, Annali di Matematica, vol 9, 1904, pp. 219-235.

[9] D.E. Radford.– *A natural ring basis for shuffle algebra and an application to group schemes*, Journal of Algebra, 58, pp. 432-454, 1979.

[10] G. Viennot.– *Algèbres de Lie libres et monoïdes libres*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 691, 1978.