SUITES LINEAIREMENT RECURRENTES QUANTIQUES

EARL J. TAFT

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY
PRINCETON, NJ U.S.A.

Abstract

We define a product $fg{=}h{=}(h_i)$ of two linearly recursive sequences $f{=}(f_i)$ and $g{=}(g_i)$, $i{\geq}0$, by

$$h_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}_q f_i\, g_{j-i},$$

where q is a primitive root of unity in a field k, $\binom{i}{j}_q$ is the Gaussian polynomial, and the coordinates f_i and g_i are in k. When $q{=}1$, this is the classical convolution product. The proof that fg is linearly recursive is not concrete. Rather we construct a certain Hopf algebra A in a braided monoidal category of modules over a quasitriangular Hopf algebra. The linearly recursive sequences appear as the dual Hopf algebra A^0, whose multiplication is the one given at the beginning.

Résumé

On définit un produit $fg{=}h{=}(h_i)$ de deux suites lineárement récurrentes $f{=}(f_i)$ et $g{=}(g_i)$, $i{\geq}0$, par

$$h_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}_q f_i\, g_{j-i},$$

ou q est une racine primitive de l'unité dans un corps k, $\binom{i}{j}_q$ est le polynôme de Gauss en q, et les coordonnées f_i et g_i sont dans k. Quand $q{=}1$, on a le produit de convolution classique. La preuve que fg est linéairement récurrente n'est pas concrète. Il s'agit plutôt d'une certaine algèbre de Hopf A dans une catégorie monoïdale tressée des modules sur une algèbre de Hopf quasitriangulaire. Les suites linéairement récurrentes apparaissent comme l'algèbre de Hopf duale A^0, dont la multiplication est celle décrite au début.

Soit k un corps, $A = k[x]$ l'algèbre des polynômes avec la graduation habituelle. On identifie l'espace dual A^* avec les suites $\{(f_i)\,|\,i \geq 0,\ f_i \in k\}$ où $f = (f_i)$ veut dire que $f_i = f(x^i)$ pour chaque $i \geq 0$. On identifie A^0 (la cogèbre duale à A) avec les suites linéairement récurrentes (voir [2]). Si f vérifie la relation récurrente $f_n = h_1 f_{n-1} + \ldots + h_r f_{n-r}$ pour $n \geq r$ ($h_1, \ldots, h_r$ des constants dans k), cela veut dire que f s'annule sur l'idéal de A engendré par $x^r - h_1 x^{r-1} - \cdots - h_r$. On dit

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

que $x^r - h_1 x^{r-1} - \cdots - h_r$ est une relation récurrente pour f. Si on munit A avec la comultiplication

$$\Delta x^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^j \otimes x^{i-j},$$

alors A est une algébre de Hopf, et A^* a le produit de convolution

$$(fg)\,(x^i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}\, f\,(x^j)\, g\,(x^{i-j}).$$

A^0 est une sous-algèbre de A^*, et A^0 est une algèbre de Hopf. Quant à la comultiplication dans A^0, $\Delta f = \sum_p f_p \otimes g_p$ veut dire que $f(ab) = \sum_p f_p(a) g_p(b)$ pour tout $a, b \in A$.

Maintenant, soit q une racine n-ième primitive de l'unité dans k. Le résultat principal de cette presentation est qu'on peut remplacer la multiplication de convolution dans A^0 par une multiplication "quantique", c'est-à-dire, on remplace les coefficients binômes $\binom{j}{i}$ par les polynômes de Gauss $\binom{j}{i}_q$. On note $(j)_q$ le polynôme $\frac{q^j-1}{q-1} = 1 + q + \ldots + q^{j-1}$ pour $j \geq 0$. Alors $(j)_q! = (j)_q\,(j-1)_q \cdots (1)_q$ et $\binom{j}{i}_q = \frac{(j)_q!}{(i)_q!(j-i)_q!}$ pour $j \geq i$. Alons, nous prétendons que A^0 est fermé sous le produit

$$(fg)\,(x^i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{j}{i}_q f(x^i)\, g\,(x^{j-i}),$$

et que A^0, avec ce produit-ci et la comultiplication décrite là-haut, a la structure d'une algèbre de Hopf dans une cértaine catégorie monoïdale tressée. Cette version quantique des suites linéairement récurrentes n'est pas une algèbre de Hopf dans le sens ordinaire, mais elle l'est dans la catégorie (que nous allons décrire), c'est-à-dire, toutes les applications structurales qui définissent A^0 sont des applications dans la catégorie (voir [1]).

Soit $G = \{1, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$ le group cyclique d'ordre n engendré par g, et $k[G]$ l'algèbre du groupe G sur k. $k[G]$ est une algèbre de Hopf de la manière habituelle, mais on considère $H = k[G]$, comme algèbre de Hopf quasitriangulaire, où la R-matrice est donnée par

$$R = \frac{1}{n} \sum_{s,t=0}^{n-1} q^{-st}(g^s \otimes g^t).$$

Alors la catègorie C des H-modules à gauche a la structure d'une catégorie monoïdale tressée. La structure monoïodale se décrit de la facon suivante: Si M, N sont deux H-modules, alors $M \otimes N$ est un H-module par

$$h \cdot (y \otimes z) = \sum_p (h_p \cdot y) \otimes (h'_p \cdot z) \text{ pour } y \in M,\ z \in N,$$

où $\Delta h = \sum_p h_p \otimes h'_p$. On utilise R pour donner la structure tressée dans C. En général, si

$$R = \sum_p r_p \otimes r'_p \in H \otimes H,$$

on définit $t_{M,N} : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$ par

$$t_{M,N}(y \otimes z) = \sum (r'_p \cdot z) \otimes (r_p \cdot y).$$

Notons que si $R = 1 \otimes 1$, $t_{M,N}(y \otimes z) = z \otimes y$.

Nous mettons $A = k[x]$ dans C par l'action $g \cdot x = qx$, c'est-à-dire, $g^s \cdot x^t = q^{st}x^t$. Alors il en resulte qu'on tord $A \otimes A$ par $t_{A,A}(x^a \otimes x^b) = q^{ab}(x^b \otimes x^a)$. On utilise $t_{A,A}$ pour donner $A \otimes A$ la structure d'une algèbre dans C, c'est-à-dire $(x^a \otimes x^b)\,(x^c \otimes x^d) = q^{bc}x^{a+c} \otimes x^{b+d}$. On definit une comultiplication $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ en posant $\Delta x = 1 \otimes x + x \otimes 1$ avec la condition que Δ est un morphisme d'algébres dans C, qui veut dire exactement que

$$\Delta x^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}_q x^i \otimes x^{i-j} \text{ pour } i \geq 0.$$

A est une algèbre de Hopf dans C, où on définit l'antipode S par récurrence à partir de $S(x) = -x$. Par exemple, $S(x^2) = qx^2$.

Pour passer au cas dual (les suites linéairement récurrentes), nous démontrons le théorème suivant: Soit H une algèbre de Hopf quasitriangulaire, C la catégorie monoïdale tressée des H-modules à gauche, A une algèbre de Hopf dans C. Alors, A^0 est aussi une algèbre de Hopf dans C, où la multiplication de convolution et la comultiplication dans A^0 sont tordues (dans le sens ordinaire). Cette dernière condition n'est pas nécessaire dans notre exemple, parce que la multiplication et la comultiplications dans A^0 sont symétriques.

Pour conclure, nous avons montré que A^0, les suites linéairement récurrentes, ont la structure d'une algèbre de Hopf dans une certaine catégorie monoïdale tressée. Le produit est celui des puissances-divisées quantiques, c'est-à-dire, si on identifie la suite linéairement récurrente $f = (f_i)$ avec la fonction génératrice

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i Z^{(i)},$$

alors $Z^{(n)}Z^{(m)} = \binom{n+m}{n}_q Z^{(n+m)}$, où $\binom{n+m}{n}_q$ indique un polynôme de Gauss. Pour $q = 1$, on a les suites linéairement récurrentes classiques. Si f et g sont deux telles suites, qui satisfient aux relations récurrentes données par les polynômes $r(x)$ et $s(x)$, il y une explication que fg (produit de convolution ordinaire) est linéairement récurrente, où on décrit une relation récurrente pour fg en termes des sommes des racines de $r(x)$ et de $s(x)$. Pour $q \neq 1$, notre argument pour le produit de convolution quantique est théorique et nous n'avons pas encore une explication "concrète" pourquoi fg est linéairement récurrente, c'est-à-dire, nous ne pouvons pas construire (en utilisant $r(x)$ et $s(x)$) une relation récurrente pour fg.

Références

[1] S. Majid, *"Braided groups"*. J. Pure Appl. Alg. **86** (1993), pp. 187–221.

[2] B. Peterson et E.J. Taft, *"The Hopf algebra of linearly recursive sequences"*. Aequat. Mat. **20** (1980), pp. 1–17.