Intégration symbolique des équations différentielles linéaires à coefficients méromorphes via les fonctions de Dirichlet

Hoang Ngoc Minh, Université Lille II, BP 629, 59024 Lille Cedex, France.

1 Les motivations

La *transformation d'évaluation* a été étudiée [10, 11, 12] et implémentée en MACSYMA et en AXIOM pour simuler *le comportement d'entrée/sortie des systèmes dynamiques non linéaires* [11, 4]. Une application de ce procédé est la résolution des équations différentielles linéaires à *coefficients rationnels*, et plus généralement celle des systèmes du premier ordre de la forme :

$$\begin{cases} dq(z) = A(z)q(z)dz, \\ q(z_0) = \gamma, \\ \quad y = \lambda q, \end{cases}$$

où $A = (A_{ij})_{i,j=1..n}$ est une matrice carrée d'ordre n de fonctions rationnelles de z. Le *cas régulier de Fuchs* est celui où A admet des *singularités régulières* (y compris à l'infini). Comme il existe un algorithme (implémenté en MAPLE par A. Barkatou [1]) permettant de ramener le cas régulier de Fuchs au cas où A admet des *singularités simples*, nous pouvons considérer le cas des singularités simples (i.e. les pôles sont finis et d'ordre 1).

Partant de la procédure de Picard qui consiste à transcrire ces équations différentielles en les équations intégrales suivantes :

$$q(z) = q(z_0) + \int_{z_0}^{z} A(s)q(s)ds,$$

et à calculer q comme la limite $\lim_{k\to\infty} q_k$ de la suite récurrente $\{q_k\}_{k\geq 0}$ définie comme suit :

$$q_0 = q(z_0) \quad \text{et} \quad q_k(z) = q(z_0) + \int_{z_0}^{z} A(s)q_{k-1}(s)ds,$$

la sortie y se met sous la forme $y(z) = \lambda U(z_0; z)\gamma$, où la matrice $U(z_0; z)$ est donnée par la *série de Dyson* [6] :

$$U(z_0; z) = \sum_{k\geq 0} \int_{z_0}^{z} \int_{z_0}^{s_k} \cdots \int_{z_0}^{s_2} A(s_k)\ldots A(s_1)ds_1\ldots ds_k.$$

Comme a expliqué P. Cartier [2], le cas *unipotent* est celui où cette série de Dyson est *finie* et dans ce cas, chaque coefficient de la matrice $U(z_0; z)$ est une *somme finie d'intégrales itérées de Chen* obtenues à partir des formes différentielles $A_{ij}dz$, pour i et $j = 1..n$ [5].

Dans ce travail, pour traiter le cas *non fini*, nous écrivons, comme dans [23, 24], le précédent système sous la forme d'un *système bilinéaire* :

$$\begin{cases} dq = \sum_{i=1}^{m} M_i q\, u_i dz, \\ q(z_0) = \gamma, \\ y = \lambda q, \end{cases}$$

où les M_i sont des matrices constantes linéairement indépendantes et $A = \sum_{i=1}^{m} u_i M_i$. D'après M. Fliess, sa série génératrice R, est *rationnelle* et admet (λ, μ, γ) comme *représentation linéaire* (μ étant le morphisme de monoïde défini sur l'alphabet $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ par $\mu(x_i) = M_i$) et la formule de Peano-Bakker donne la sortie y comme l'évaluation du miroir de sa série génératrice, avec les formes différentielles $d\alpha(x_i) = u_i dz$ [9] :

$$R = \sum_{w \in X^*} \lambda\mu(w)\gamma\, w \quad \text{et} \quad y = \sum_{w \in X^*} \lambda\mu(w)\gamma\, \alpha(\tilde{w}).$$

Lorsque la série génératrice R est finie (voir cas unipotent), nous exprimons la sortie y comme l'évaluation des éléments d'une *base de transcendance de l'algèbre de mélange des polynômes* sur X et à l'aide des *fonctions de Dirichlet* (voir Section 2).

En généralisant le précédent procédé pour le cas non fini, il est utile de donner les *conditions nécessaires* (voire *nécessaires et suffisantes*) pour pouvoir expliciter entièrement y. Pour cela, nous explicitons différentes *descriptions syntaxiques* de la série génératrice, et puis nous utilisons, en retour, la transformation d'évaluation comme un *outil sémantique* pour obtenir sa sortie (exacte ou approchée). Mais cela nécessite l'*évaluation des séries rationnelles* avec les *formes différentielles méromorphes* (voir Section 3). Ces outils sont appliqués, ensuite, à l'étude d'une équation intégrale issue des arborescences hyperquaternaires de recherche [8, 16, 17] pour explorer sa nature syntaxique (voir Section 4).

2 Les fonctions de Dirichlet

Avec les formes différentielles rationnelles, les intégrales itérées de faible degré peuvent être calculée à l'aide des polylogarithmes [12, 18, 25]. Plus généralement, nous les exprimons à l'aide des *fonctions de Dirichlet associées à des suites de nombres complexes* $\{g_k\}_{k\geq 1}$, d'ordre $n \geq 1$ et de paramètre $t \notin \mathbb{Z}_-$. Ces fonctions sont obtenues comme l'évaluation des mots $x_1 x_0^{n-1}$ [14] :

$$\mathrm{Di}_n(G|t, z) = \alpha(x_1 x_0^{n-1}) = \sum_{k\geq 1} g_k \frac{z^{k+t}}{(k+t)^n}$$

avec les formes différentielles $d\alpha(x_0) = dz/z$ et $d\alpha(x_1) = G(z)dz/z^{1-t}$, où $G(z)$ est la série génératrice de la suite $\{g_k\}_{k\geq 1}$ telles que $G(z)/z^{1-t}$ soit méromorphe dans un domaine obtenu en coupant le plan complexe depuis zéro et depuis chaque singularité de G jusqu'à l'infini sans croisement. Les propriétés combinatoires de ces fonctions sont établies dans le cadre de *l'algèbre de mélange des séries formelles en les indéterminées non commutatives* et à l'aide du *calcul symbolique* [14]. La fonction $\mathrm{Di}_n(G|0,z)$ est en fait la *fonction génératrice polylogarithmique* $\mathrm{Di}_n(G|z)$ associée à $\{g_k\}_{k\geq 1}$ (f.g.p., [13]). Certaines f.g.p. peuvent être décomposées en polylogarithmes permettant de *spécifier la valeur des intégrales itérées aux singularités de G à l'aide des valeurs spéciales des polylogarithmes* $\mathrm{Li}_n(z)$:

Exemple 2.1 *[13] Soit $\{\nu_i\}_{i\in I}$ une suite de nombres complexes deux à deux différents.*

1. *Si $\{\mu_i\}_{i\in I}$ est une autre suite de nombres complexes alors nous avons :*

$$\left[\forall k\geq 1, g_k=\sum_{i\in I}\mu_i\nu_i^k\right] \iff \left[\forall n\geq 1, \mathrm{Di}_n(G|z)=\sum_{i\in I}\mu_i \,\mathrm{Li}_n(\nu_i z)\right].$$

Par conséquent ($\zeta(n)$ et $\eta(n)$ sont les fonctions zêta *et* eta *de Riemann) :*

(a) si $g_{2k}=0$ et $g_{2k-1}=1$ alors :

$$\alpha_0^1(yx^{n-1})=-\alpha_0^{-1}(yx^{n-1})=\frac{\zeta(n)+\eta(n)}{2},$$

et nous avons, par exemple, $\alpha_0^1(yx)=\pi^2/8, \alpha_0^1(yx^3)=\pi^4/96, \alpha_0^1(yx^5)=\pi^6/960,\ldots$

(b) si $g_{2k}=0$ et $g_{2k-1}=(-1)^k$ alors (pour $\mathrm{i}^2=-1$) :

$$\alpha_0^{\mathrm{i}}(yx^{n-1})=-\alpha_0^{-\mathrm{i}}(yx^{n-1})=\mathrm{i}\frac{\zeta(n)+\eta(n)}{2}.$$

2. *Si $\mu_0,\ldots,\mu_{n-1}$ sont n nombres complexes alors nous avons :*

$$\left[\forall k\geq 1, g_k=\sum_{i=0}^{n-1}\mu_i k^i+\sum_{i\in I}\frac{\nu_i}{k^i}\right] \iff \left[\forall n\geq 1, \mathrm{Di}_n(G|z)=\sum_{i=0}^{n-1}\mu_i \,\mathrm{Li}_{n-i}(z)+\sum_{i\in I}\nu_i \,\mathrm{Li}_{n+i}(z)\right].$$

Dans ce cas, nous avons aussi :

$$\alpha_0^1(xy^{n-1})=\sum_{i=0}^{n-1}\mu_i\zeta(n-i)+\sum_{i\in I}\nu_i\zeta(n+i).$$

Si $G(z)=z(1-z)^{-1}$ alors $\mathrm{Di}_n(G|0,z)$ coïncide avec le polylogarithme, $\mathrm{Di}_n(G|0,1)$ coïncide avec la fonction zêta de Riemann et $\mathrm{Di}_n(G|t,1)$ avec celle d'Hurwitz :

$$\mathrm{Di}_n(G|0,z)=\sum_{k\geq 1}\frac{z^k}{k^n},\quad \mathrm{Di}_n(G|0,1)=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^n}\quad \text{et}\quad \mathrm{Di}_n(G|t,1)=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k+t)^n}.$$

La construction de la fonction génératrice pour les fonctions de Dirichlet revient à calculer l'évaluation de la série rationnelle $x_1(cx_0)^*$. Et en particulier, si $G(z)=z^c(1-z)^{-a}$ alors [13] :

$$\sum_{n\geq 0}c^n \,\mathrm{Di}_{n+1}(G|t,z)=\alpha_0^z[x_1(cx_0)^*]=\frac{\Gamma(a)\Gamma(t+1-a)}{\Gamma(t+1)}z^{c+t}{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}a,t\\t+1\end{matrix}\Big|z\right).$$

Ce cas conduit aux *sommations des polylogarithmes* à l'aide des fonctions hypergéométriques et permet d'en déduire certaines *sommations de séries* :

Exemple 2.2 *[12, 13]*

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \sum_{n\geq 0}(-1)^n \operatorname{Li}_{n+1}(z) = \frac{1}{z}\log(\frac{1}{1-z}) - 1,\\
&(2) \quad \sum_{p\geq 1}(-1)^{p-1} \operatorname{Li}_{2p}(z) = \sum_{k\geq 1}\frac{z^k}{1+k^2},\\
&(3) \quad \sum_{p\geq 0}(-1)^{p} \operatorname{Li}_{2p+1}(z) = \sum_{k\geq 1}\frac{kz^k}{1+k^2},\\
&(4) \quad \sum_{n\geq 0}(-1)^n n \operatorname{Li}_{n+1}(z) = 1 - \frac{1}{z}\operatorname{Li}_2(z),\\
&(5) \quad \sum_{n\geq 1}(1-\frac{1}{k})^n \operatorname{Li}_{n}(-z^k) = -\frac{k^2 z^{k-1}}{k-1}\int_0^z \frac{ds}{1+s^k}.
\end{aligned}$$

On peut donc extraire les sommations suivantes ($\operatorname{Li}_n(1) = \zeta(n)$ *et* $\operatorname{Li}_n(-1) = -\eta(n)$) *:*

$$\begin{aligned}
&(2') \quad \sum_{p\geq 1}(-1)^{p-1}\zeta(2p) = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{1+k^2} = \frac{\pi}{e^{2\pi}-1} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2},\\
&(4') \quad \sum_{n\geq 2}(-1)^n n\zeta(n+1) = 1,\\
&(1'') \quad \sum_{n\geq 1}(-1)^n\eta(n) = \log 2 - 1,\\
&(2'') \quad \sum_{p\geq 1}(-1)^p\eta(2p) = \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{1+k^2} = \frac{\pi}{e^{\pi}-1} - \frac{\pi}{e^{2\pi}-1} - \frac{1}{2},\\
&(3'') \quad \sum_{p\geq 1}(-1)^p\eta(2p-1) = \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k k}{1+k^2},\\
&(4'') \quad \sum_{n\geq 2}(-1)^n n\eta(n+1) = \frac{\pi^2}{6} - 1,\\
&(5'') \quad \sum_{n\geq 1}(\frac{k-1}{k})^n\eta(n) = \frac{k^2}{k-1}\int_0^1 \frac{ds}{1+s^k}, \qquad (k>1).
\end{aligned}$$

De (5″), *nous obtenons, par exemple :*

$$\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{2})^n\eta(n) = \pi,\ \sum_{n\geq 1}(\frac{2}{3})^n\eta(n) = \frac{3}{2}\log 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi,\ \sum_{n\geq 1}(\frac{3}{4})^n\eta(n) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\Big[\log(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}) + \pi\Big],\ldots.$$

3 L'évaluation des séries rationnelles

Nous allons donner les situations qui permettent actuellement de calculer exactement l'évaluation d'une série rationnelle S en examinant sa représentation linéaire (λ, μ, γ), où μ est un morphisme de monoïde de X^* dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et λ, γ sont des matrices ligne et colonne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ respectivement. Sans perdre de généralité, nous supposons que cette représentation est *minimale* [3]. Nous utilisons également le morphisme de monoïde ρ de X^* dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle)$ défini par $\rho(x) = \mu(x)x$ pour tout $x \in X$.

3.1 L'évaluation des séries finies

Lorsqu'une série S est un polynôme, il suffit de remplaçer chaque mot w dans S par son évaluation. Mais, d'après les propriétés des intégrales itérées [5] et d'après le théorème de Radford [20, 21], on peut aussi écrire chaque polynôme dans la base de Širšov. Puis avec le théorème de convolution [12], on accélère le calcul de l'évaluation de chaque mot de Širšov. On accélère donc celui des polynômes. D'après les mêmes propriétés, on a aussi intérêt à écrire chaque polynôme dans la base duale de la base PBW-Širšov, $\{R_b\}_{b\in\mathcal{S}}$, puisque le calcul de l'évaluation s'effectue simplement (pour $b = l_1^{i_1}\dots l_k^{i_k}x$, où $x \in, l_i \in \mathcal{S}$ et $l_1 < \dots < l_k$) :

$$R_b = \frac{R_{l_1}^{ш\, i_1} \,ш \dots ш\, R_{l_k}^{ш\, i_k}}{i_1!\dots i_k!}x \quad \text{et} \quad d\alpha(R_b) = \frac{[\alpha(R_{l_1})]^{i_1}\dots[\alpha(R_{l_k})]^{i_k}}{i_1!\dots i_k!}d\alpha(x).$$

Au paragraphe 3.4, on peut trouver un procédé pour écrire chaque polynôme dans la base duale de la base PBW-Širšov et donc avec les mots de Širšov, rendant ainsi le théorème de Radford *concrètement effectif*. Ainsi, avec les formes différentielles méromorphes, il est possible d'exprimer une telle évaluation à l'aide des *fonctions de Nielsen* (nous avons défini les fonctions de Nielsen comme étant l'évaluation des $\{R_b\}_{b\in\mathcal{S}}$ [14]).

Exemple 3.1 *Soit $X = \{x_0, x_1\}$ avec $x_0 < x_1$. Les mots de Širšov de longueur au plus 5 sont les 14 mots $\{x_0, x_1x_0^4, x_1x_0^3, x_1^2x_0^3, x_1x_0^2, x_1x_0x_1x_0^2, x_1^2x_0^2, x_1^3x_0^2, x_1x_0, x_1^2x_0x_1x_0, x_1^2x_0, x_1^3x_0, x_1^4x_0, x_1\}$. On vérifie que $R_{x_1^px_0^n} = x_1^px_0^n$, pour $n, p \geq 0$. Les autres R_b s'expriment aussi en fonction des mots de Širšov. Par exemple $R_{x_1x_0x_1x_0^2} = x_1x_0x_1x_0^2 + 2x_1^2x_0^3$, $R_{x_1^2x_0x_1x_0} = x_1^2x_0x_1x_0 + 3x_1^3x_0^2, \dots$*

Soient les formes différentielles $d\alpha(x_0) = dz/z$ et $d\alpha(x_1) = dz/(1-z)$. Nous obtenons les fonctions de Dirichlet suivantes, pour tous $n, p \geq 0$ (voir [14]) :

$$\begin{aligned}
\alpha_0^z(x_1^px_0^{n-1}) &= \sum_{k\geq p}\frac{S_k^{(k-p)}}{(k-1)!}\frac{z^k}{k^n},\\
\alpha_0^z(x_1x_0^{n-1}x_1x_0^{p-1}) &= \sum_{k\geq 2}H_{k-1}^{(n)}\frac{z^k}{k^p},\\
\alpha_0^z(x_1^2x_0^{n-1}x_1x_0^{p-1}) &= \sum_{k\geq 2}\left[\sum_{l=2}^{k-1}\frac{S_l^{(l-2)}}{l^n(l-1)!}\right]\frac{z^k}{k^p},
\end{aligned}$$

où les $S_k^{(p)}$ sont les nombres de Stirling de seconde espèce et les $H_k^{(n)}$ sont les nombres harmoniques. Nous déduisons alors les fonctions de Nielsen suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha_0^z(R_{x_1^px_0^{n-1}}) &= \sum_{k\geq p}\frac{S_k^{(k-p)}}{(k-1)!}\frac{z^k}{k^n},\\
\alpha_0^z(R_{x_1x_0x_1x_0^2}) &= \sum_{k\geq 2}H_{k-1}^{(2)}\frac{z^k}{k^3} + 2\sum_{k\geq 2}\frac{S_k^{(k-2)}}{(k-1)!}\frac{z^k}{k^4},\\
\alpha_0^z(R_{x_1^2x_0x_1x_0}) &= \sum_{k\geq 2}\left[\sum_{l=2}^{k-1}\frac{S_l^{(l-2)}}{l^2(l-1)!}\right]\frac{z^k}{k^2} + 3\sum_{k\geq 3}\frac{S_k^{(k-3)}}{(k-1)!}\frac{z^k}{k^3},\dots.
\end{aligned}$$

3.2 L'évaluation des séries mises sous la forme graduée

Puisque $\{x_0, x_1\}^* = x_0^*(x_1x_0^*)^*$ [22], la série rationnelle S se met sous la *forme graduée* suivante :

$$S = \sum_{p\geq 0} \lambda\rho(x_0^*)[\rho(x_1x_0^*)]^p\gamma.$$

Si la matrice $\rho(x_1x_0^*)$ est nilpotente à l'ordre $K+1$ (et inversement) alors :

$$S = \sum_{p=0}^{K} \lambda\rho(x_0^*)[\rho(x_1x_0^*)]^p\gamma.$$

Ainsi, en observant la nilpotence de la matrice $\rho(x_1x_0^*)$, nous pouvons *décider si la série rationnelle S peut se développer en combinaison linéaire d'un nombre fini de fractions rationnelles non commutatives* de la forme $(c_0x_0)^*x_{i_1}(c_1x_0)^* \ldots x_{i_p}(c_px_0)^*$ qui sont les codages symboliques de fonctions du type hypergéométrique :

Exemple 3.2 *Si $G_1(z) = z^{c_1}(1-z)^{-a_1}$ et $G_2(z) = z^{c_2}(1-z)^{-a_2}$ alors nous pouvons considérer les formes différentielles suivantes (t_1, t_2 et $t_1+t_2 \notin \mathbb{Z}_-^*$) :*

$$d\alpha(x_0) = \frac{dz}{z}, \quad d\alpha(x_1) = G_1(z)\frac{dz}{z^{1-t_1}}, \quad \text{et} \quad d\alpha(x_2) = G_2(z)\frac{dz}{z^{1-t_2}}.$$

Nous obtenons les évaluations suivantes :

$$\alpha_0^z[x_1(c_1x_0)^*] = z^{c_1+t_1}\int_0^1 s^{t_1-1}(1-zs)^{-a_1}ds,$$
$$\alpha_0^z[x_1(c_1x_0)^*x_2(c_2x_0)^*] = z^{c_2+t_2}\int_0^1\int_0^1 (s_1s_2)^{t_1-1}(1-zs_1s_2)^{-a_1}s_2^{c_1+t_2}(1-zs_2)^{-a_2}ds_1ds_2.$$

Par conséquent, nous pouvons *décider si l'évaluation d'une série rationnelle se décompose en combinaison linéaire finie de fonctions du type hypergéométrique.*

Exemple 3.3 *Soit la représentation linéaire de la série rationnelle, S_1, suivante :*

$$\lambda = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}, \quad \mu(x_0) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \mu(x_1) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Nous avons $\rho(x_0^*) = \begin{pmatrix}x_0^* & x_0^*x_0x_0^*\\ 0 & x_0^*\end{pmatrix}$ et la matrice $\rho(x_1x_0^*) = \begin{pmatrix}0 & -x_1x_0^*\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ est nilpotente à l'ordre 2. Par conséquent :

$$S_1 = x_0^*x_0x_0^* - x_0^*x_1x_0^* = x_0^* ш (x_0 - x_1).$$

Pour les formes différentielles $d\alpha(x_0) = dz/z$ et $d\alpha(x_1) = dz/(1-z)$, nous avons :

$$\alpha_{z_0}^z(S_1) = \frac{z}{z_0}\log\left(\frac{z}{z_0}\frac{1-z}{1-z_0}\right).$$

3.3 L'évaluation des séries échangeables

Si S est *échangeable* alors elle peut se décomposer en *éléments simples*, c'est-à-dire elle peut s'écrire comme une somme finie de mélanges de séries rationnelles sur une seule lettre :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i,j\geq 0} \lambda\mu(x_0^i)\mu(x_1^j)\gamma\ x_0^i \sqcup\!\sqcup\, x_1^j \\ &= \sum_{i,j\geq 0} \lambda\mu(x_0^i)[g_1 l_1 + \ldots + g_N l_N]\mu(x_1^j)\gamma\ x_0^i \sqcup\!\sqcup\, x_1^j \\ &= \lambda\rho(x_0^*)g_1 \sqcup\!\sqcup\, l_1\rho(x_1^*)\gamma + \ldots + \lambda\rho(x_0^*)g_N \sqcup\!\sqcup\, l_N\rho(x_1^*)\gamma, \end{aligned}$$

où les vecteurs lignes l_k et colonnes g_k sont tels que la somme $g_1 l_1 + \ldots + g_N l_N$ soit la matrice d'identité. Par exemple, on peut supposer que les composants sont nuls sauf celui à la $k^{\text{ème}}$ place qui vaut 1. Ainsi, *nous pouvons calculer entièrement l'évaluation de la série rationnelle échangeable S comme polynôme de logarithmes* (primitives des entrées).

Exemple 3.4 *Soit la représentation linéaire de la série rationnelle, S_2, suivante :*

$$\lambda = (1 \quad 0), \quad \mu(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ici, $\rho(x_1 x_0^*)$ n'est pas nilpotente. La méthode du paragraphe 3.3 n'est donc plus applicable. Par contre, la série est échangeable et nous avons :

$$\begin{aligned} S_2 &= (1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_0^* & x_0^* x_0 x_0^* \\ 0 & x_0^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqcup\!\sqcup\, (1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_1^* & -x_1^* x_1 x_1^* \\ 0 & x_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &+ (1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_0^* & x_0^* x_0 x_0^* \\ 0 & x_0^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sqcup\!\sqcup\, (0 \quad 1)\begin{pmatrix} x_1^* & -x_1^* x_1 x_1^* \\ 0 & x_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x_0^* \sqcup\!\sqcup\, x_1^* \sqcup\!\sqcup\, x_0 - x_0^* \sqcup\!\sqcup\, x_1^* \sqcup\!\sqcup\, x_1 \\ &= x_0^* \sqcup\!\sqcup\, x_1^* \sqcup\!\sqcup\, (x_0 - x_1). \end{aligned}$$

Pour les mêmes formes différentielles que précédemment, nous obtenons :

$$\alpha_{z_0}^z(S_2) = \frac{z}{z_0}\frac{1-z_0}{1-z}\log\left(\frac{z}{z_0}\frac{1-z}{1-z_0}\right).$$

3.4 L'évaluation des séries mises sous la forme factorisée

L'algèbre de Lie, notée L, engendrée par les matrices $\{\mu(x)\}_{x\in X}$ est de dimension $l, m \leq l \leq n^2$. Alors il existe $\{M_i\}_{i=m+1..l}$ telles que $\{M_i\}_{i=1..l}$ forment une base de L et il existe aussi $\{g_i\}_{i=1..l}$, *au voisinage de l'origine*, telles qu'on ait la *représentation en produit fini* de $\alpha(S)$ (voir [23, 24]). En explicitant ce produit, l'évaluation de S est alors un *polynôme en les g_i et leur exponentielles.* Dans les cas où on a une *représentation globale*, il existe alors l séries $\theta_1, \ldots, \theta_l$ sur X^* telles que S soit *rationnelle échangeable* sur le *nouvel alphabet* $\{\theta_i\}_{i=1..l}$ (voir paragraphe 3.3) :

$$\begin{aligned} \alpha(S) &= \lambda[e^{g_1 M_1} \ldots e^{g_l M_l}]\gamma, \\ S &= \lambda[\exp_{\sqcup\!\sqcup}(M_1\theta_1) \ldots \exp_{\sqcup\!\sqcup}(M_l\theta_l)]\gamma. \end{aligned}$$

Si L est *résoluble* à l'ordre $K+1$ alors on peut trouver une base et un ordre sur cette base tels que la représentation en produit fini soit globale [23, 24].

Exemple 3.5 *Considérons la série rationnelle* $(x_2 x_1^* x_3 - x_1)^*$ *dont la représentation linéaire est donnée par :*

$$\lambda = (1 \quad 0), \quad \mu(x_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu(x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu(x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que $\mu([x_2, x_1]) = 2\mu(x_2)$, $\mu([x_3, x_1]) = -2\mu(x_3)$ *et* $\mu([x_3, x_2]) = \mu(x_1)$. *L'algèbre de Lie engendrée par les* $\mu(x_i)$ *est de dimension 3 et elle* n'est pas résoluble. *Puisque :*

$$\begin{aligned} e^{g_1 ad_{\mu(x_1)}} \mu(x_2) &= e^{-2g_1} \mu(x_2), \\ e^{g_2 ad_{\mu(x_2)}} \mu(x_3) &= \mu(x_3) + g_2 \mu(x_1) + g_2^2 \mu(x_2), \\ e^{g_1 ad_{\mu(x_1)}} e^{g_2 ad_{\mu(x_2)}} \mu(x_3) &= e^{2g_1} \mu(x_3) + g_2 \mu(x_1) + g_2^2 e^{-2g_1} \mu(x_2), \end{aligned}$$

alors on a :

$$\begin{aligned} u_1 \mu(x_1) + u_2 \mu(x_2) + u_3 \mu(x_3) &= \dot{g}_1 \mu(x_1) + \dot{g}_2 e^{g_1 ad_{\mu(x_1)}} \mu(x_2) + \dot{g}_3 e^{g_1 ad_{\mu(x_1)}} e^{g_2 ad_{\mu(x_2)}} \mu(x_3) \\ &= [\dot{g}_1 + \dot{g}_3 g_2] \mu(x_1) + [\dot{g}_2 e^{-2g_1} + \dot{g}_3 g_2^2 e^{-2g_1}] \mu(x_2) + \dot{g}_3 e^{2g_1} \mu(x_3). \end{aligned}$$

Par conséquent, g_1, g_2 *et* g_3 *satisfont le système différentiel triangulaire suivant [23, 24] :*

$$\begin{pmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -g_2 e^{-2g_1} \\ 0 & e^{2g_1} & -g_2^2 e^{-2g_1} \\ 0 & 0 & e^{-2g_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

et on a :

$$\alpha[(x_2 x_1^* x_3 - x_1)^*] = (1 + g_2 g_3) e^{-g_1}.$$

En effectuant dans le précédent système différentiel le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u_1 = v_1, \\ u_2 = v_2 e^{-2g_1}, \\ u_3 = v_3 e^{2g_1}, \end{cases}$$

nous obtenons alors le système triangulaire (plus simple) suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -g_2 \\ 0 & 1 & -g_2^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

La solution de g_2 *s'obtient en résolvant l'équation de Riccati suivante (avec* $a = v_2$ *et* $b = -v_3$*) :*

$$\dot{f} + af^2 + b = 0.$$

On ramène cette équation non linéaire à une équation linéaire en remplaçant f *par* $f_1 + h$*, où* f_1 *est une solution particulière :*

$$\dot{f}_1 + af_1^2 + b = 0.$$

Nous obtenons alors l'équation de Bernoulli suivante :

$$\dot{h} + 2af_1 h + ah^2 = 0.$$

C'est une équation linéaire par rapport à $1/h$ *:*

$$\frac{\dot{h}}{h^2} + \frac{2af_1}{h} + a = 0.$$

Puisque la série rationnelle S peut s'obtenir comme l'image de la *série diagonale* $\sum_{w\in X^*} w \otimes w$ (l'élément à gauche est dans l'algèbre de Cauchy et celui à droite est dans l'algèbre de mélange) par le morphisme $\mu \otimes \mathrm{Id}_{ш}$ de la manière suivante :

$$S = \lambda\Big[\sum_{w\in X^*} \mu(w)w\Big]\gamma = \lambda\Big[(\mu \otimes \mathrm{Id}_{ш})\Big(\sum_{w\in X^*} w\otimes w\Big)\Big]\gamma,$$

alors la factorisation de cette série diagonale [15, 19, 21] nous permet de déduire celle de S :

$$\sum_{w\in X^*} w \otimes w = \prod_{\substack{l\in S \\ \text{lexicographique inverse décroissant}}} \exp_{.\otimes ш}(Q_l \otimes R_l),$$

$$S = \lambda\Big[\prod_{\substack{l\in S \\ \text{lexicographique inverse décroissant}}} \exp_{ш}[\mu(Q_l)R_l]\Big]\gamma,$$

où $\{Q_l\}_{l\in S}$ forme une base de l'algèbre de Lie libre $Lie\langle X\rangle$, appelée base de Širšov et ses éléments sont définis à l'aide de la *factorisation standard* des mots de Širšov comme suit [22] :

$$\begin{cases} \text{si} \quad b \in X & \text{alors} \quad Q_b = b \\ \text{si} \quad st(b) = (m,l) & \text{alors} \quad Q_b = [Q_m, Q_l]. \end{cases}$$

Ainsi, dans le cas *nilpotent* à l'ordre $K + 1$ (donc résoluble), S est une *série rationnelle échangeable* en les R_l (voir paragraphe 3.3). S serait un *polynôme échangeable* en les R_l si elle était un polynôme sur X (voir paragraphe 3.1). Par conséquent, dans le cas nilpotent et avec les formes différentielles méromorphes, l'évaluation de S conduit aux *polynômes en les fonctions de Nielsen et leurs exponentielles.*

4 Application à l'étude d'une équation intégrale

Dans l'étude des arborescences hyperquaternaires de recherche, Ph. Flajolet [8], G. Labellé et L. Laforest [16, 17] sont amenés à étudier l'équation intégrale suivante ($d \geq 1$) :

$$e = p + 2^d\beta(e; x_1x_0^{d-1}),$$

avec $d\beta(x_1) = dz/(1-z)$ et $d\beta(x_0) = dz/z(1-z)$. La solution est l'évaluation de $(2^dx_1x_0^{d-1})^*$:

$$e = \beta[p; (2^dx_1x_0^{d-1})^*].$$

Le calcul exact de la solution de l'équation intégrale précédente peut s'effectuer dans le cas où $d = 1$ puisque, d'après le théorème de convolution [12], nous obtenons :

$$e(z) = \frac{1}{(1-z)^2}\int_0^z (1-s)^2 dp(s).$$

Pour $d > 1$, les méthodes d'itération de Picard consistent alors à approximer cette série par les combinaisons linéaires de monômes $x_1x_0^{d-1}\ldots x_1x_0^{d-1}$. L'évaluation de chacun d'eux étant une fonction de Dirichlet. Par exemple, pour $p = 1$ (voir [12, 13, 14]) :

$$\beta_0^z(x_1x_0^{d-1}) = -\sum_{k\geq 1}\frac{[-z/(1-z)]^k}{k^d}, \beta_0^z(x_1x_0^{d-1}x_1x_0^{d-1}) = \sum_{k\geq 2}\Big[1+\frac{1}{2^d}+\ldots+\frac{1}{(k-1)^d}\Big]\frac{[-z/(1-z)]^k}{k^d}.$$

On peut aussi écrire l'équation intégrale précédente sous la forme d'une équation de Volterra de paramètre $\lambda = 2^d$ et à noyau séparé $K_d(z,s) = \sum_{j=0}^{d-1} a_j(z)b_j(s)$, où $a_j(z) = \lambda/j! \log^j[z/(1-z)]$ et $b_j(s) = (-1)^{d-1-j}/[(d-1-j)!(1-s)] \log^{d-1-j}[s/(1-s)]$ (voir le théorème de convolution) :

$$e(z) = p(z) + \lambda \int_0^z K_d(z,s)e(s)ds.$$

Ainsi, $e = p + \sum_{j=0}^{d-1} a_j e_j$, où $e_j(z) = \int_0^z e(s)b_j(s)ds$. En multipliant cette équation par b_i, nous avons $b_i e = b_i p + \sum_{j=0}^{d-1} q_{i,j}e_j$, où $q_{i,j} = b_i a_j$. L'intégration de cette nouvelle équation intégrale nous donne un système d'équations intégrales en les inconnues e_i dont l'existence et l'unicité de la solution conditionnent celle de l'équation intégrale initiale $(i = 0, \ldots, d-1)$:

$$e_i(z) = \int_0^z p(s)b_j(s)ds + \sum_{j=0}^{d-1} \int_0^z e_j(s)q_{i,j}(s)ds.$$

Soient P et E_i tels que $\gamma(P) = p/\lambda$ et $\gamma(E_i) = e_i$, pour $i = 0, \ldots, d-1$. Introduisons également les opérateurs d'intégration suivants $(i, j = 0, \ldots, d-1)$:

$$Q_{i,j} : f \longmapsto \int f(s)q_{i,j}(s)ds.$$

Notons que $Q_{i,i}(z) = (-1)^{d-1-i}\binom{d-1}{i}Q_{d-1,d-1}$ puisque $q_{i,i} = (-1)^{d-1-i}\binom{d-1}{i}q_{d-1,d-1}$.

Nous obtenons ainsi le système d'équations symboliques correspondant $(i = 0, \ldots, d-1)$:

$$E_i = PQ_{i,0} + \sum_{j=0}^{d-1} E_j Q_{i,j}$$

que l'on peut résoudre par l'application successive du *lemme de l'étoile* conduisant aux *fractions continuées en variables non commutatives* [7] :

$$\begin{aligned}
E_{d-1} &= \left[PQ_{d-1,0} + \sum_{j=0}^{d-2} E_j Q_{d-1,j}\right] Q^*_{d-1,d-1},\\
E_{d-2} &= \Big[P(Q_{d-1,0}Q^*_{d-1,d-1}Q_{d-2,d-1} + Q_{d-2,0})\\
&\quad + \sum_{j=0}^{d-3} E_j(Q_{d-1,j}Q^*_{d-1,d-1}Q_{d-2,d-1} + Q_{d-2,j})\Big](Q_{d-1,d-2}Q^*_{d-1,d-1}Q_{d-2,d-1} - Q_{d-1,d-1})^*, \ldots.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la résolution de l'équation intégrale issue des arborescences hyperquaternaires de recherche, consiste aussi à calculer l'évaluation des E_i par rapport aux formes différentielles :

$$d\gamma(P) = \frac{p}{\lambda}, \quad d\gamma(Q_{i,j}) = \lambda \frac{(-1)^{d-1-i}}{(d-1-i)!}\frac{1}{j!}\log^{d-1-i+j}(\frac{z}{1-z})\frac{dz}{1-z},$$

et la solution est la somme suivante (à rapprocher de [17]) :

$$e(z) = p(z) + \lambda \sum_{j=0}^{d-1} \frac{1}{j!}\log^j(\frac{z}{1-z})\gamma_0^z(E_j).$$

Notons que chaque série E_j est de la forme $PF_j, j = 0, \ldots, d-1$. Ainsi, l'évaluation de ces séries peut être effectuée en deux étapes. La première est l'évaluation des séries rationnelles F_j et la seconde consiste en une "convolution" avec p conduisant aux $w_j(z,t)$ de [17].

Exemple 4.1 *Ici, nous examinons le cas* $d = 2$ *et nous avons :*

$$e(z) = p(z) + 4\int_0^z \int_0^s e(r)\frac{dr}{1-r}\frac{ds}{s(1-s)}.$$

Par conséquent, les équations symboliques correspondantes sont les suivantes :

$$\begin{cases} E_0 = -(P + E_0)Q_{1,1} + E_1 Q_{0,1}, \\ E_1 = \quad (P + E_0)Q_{1,0} + E_1 Q_{1,1}. \end{cases}$$

Appliquons le lemme de l'étoile à la seconde équation, on a $E_1 = (P + E_0)Q_{1,0}Q_{1,1}^*$. *Puis, en subtituant* E_1 *dans la première équation, on a* $E_0 = P[(Q_{1,0}Q_{1,1}^*Q_{0,1} - Q_{1,1})^* - 1]$ *et on déduit* $E_1 = P(Q_{1,0}Q_{1,1}^*Q_{0,1} - Q_{1,1})^*$. *Comme* $e(z) = 4\gamma_0^z(P) + 4\gamma_0^z(E_0) + 4\log[z/(1-z)]\gamma_0^z(E_1)$, *alors :*

$$e(z) = [1 + \log(\frac{z}{1-z})]\gamma_0^z[P(Q_{1,0}Q_{1,1}^*Q_{0,1} - Q_{1,1})^*].$$

Ainsi, la résolution de l'équation intégrale initiale consiste aussi à calculer l'évaluation de la série $P(Q_{1,0}Q_{1,1}^*Q_{0,1} - Q_{1,1})^*$, *par rapport aux formes différentielles :*

$$d\gamma(P) = \frac{p}{4},\ d\gamma(Q_{1,0}) = 4\frac{dz}{1-z},\ d\gamma(Q_{1,1}) = 4\log(\frac{z}{1-z})\frac{dz}{1-z},\ d\gamma(Q_{0,1}) = 4\log^2(\frac{z}{1-z})\frac{dz}{1-z}.$$

Cette évaluation peut être obtenue en passant par l'évaluation de la série $(Q_{1,0}Q_{1,1}^*Q_{0,1} - Q_{1,1})^*$ comme dans l'exemple 3.5 (c'est-à-dire l'intégration du système différentiel autonome associé) et en effectuant une convolution avec le "second membre" p.

References

[1] A. BARKATOU.– *A rational version of Moser's algorithm*, ISSAC'95, Montréal, Canada, Juillet 1995.

[2] P. CARTIER.– *Jacobiennes généralisées, monodromie unipotente et intégrales itérées*, séminaire Bourbaki, 40ème année, 1987-1988, N°687, pp. 31-52.

[3] J. BERSTEL & C. REUTENAUER.– *Rational series and their languages*, Springer-Verlag, 1988.

[4] F. BOUSSEMART.– *La simulation graphique interactive des systèmes dynamiques non linéaires : conception et réalisation en Scratchpad*, Thèse, Université Lille I, Lille 1992.

[5] K.T. CHEN.– *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc., vol 83, 1977, pp. 831-879.

[6] F.J. DYSON.– *The radiation theories of Tomonaga, Schwinger and Feynman*, Physical Rev, vol 75, 1949, pp. 486-502.

[7] Ph. FLAJOLET.– *Combinatorial Aspects of Continued Fractions*, Discrete Mathematics, 32, pp 125-161, 1980.

[8] Ph. FLAJOLET.– *Arbres de recherche, équations différentielles, fonctions hypergéométriques et dilogarithmes*, "Fonctions spéciales et Calcul Formel", Limoges, 1993.

[9] M. FLIESS.– *Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives*, Bull. Soc. Math. France, N°109, 1981, pp. 3-40.

[10] HOANG NGOC MINH.– *Evaluation Transform*, dans Theoretical Computer Science, 79, pp. 163-177, 1991.

[11] HOANG NGOC MINH & G. JACOB.– *Evaluation transform and its implementation in MACSYMA*, dans "New Trends in Systems Theory", Birkhaüser, Boston, 1991.

[12] HOANG NGOC MINH.– *Polylogarithms & Evaluation Transform*, "IMACS Symposium", Juin 1993.

[13] HOANG NGOC MINH.– *Chained System Steering With Singular Inputs*, "New Computer Technologies in Control Systems", Pereslavl-Zalessky, Russie, Juillet 1994.

[14] HOANG NGOC MINH.– *Fonction Génératrice Polylogarithmique d'Ordre n et de Paramètre t*, FPSAC'95, Marne-la-Vallée, Juin 1995.

[15] G. JACOB.– *Nonholonomic Motion Planning in Nilpotent Case and Algebraic Equation Systems*, dans *Journées non holonomes*, (Risler & Bellaiche eds.), Birkhäuser, to appear.

[16] G. LABELLE & L. LAFOREST.– *Etude de constantes universelles pour les arborescences hyperquaternaires de recherche*, FPSAC'93, Florence, Juin 1993.

[17] G. LABELLE & L. LAFOREST.– *Variations combinatoires autour des arborescences hyperquaternaires*, "Atelier de Combinatoire franco-québecois", Bordeaux, 1991.

[18] L. LEWIN.– *Polylogarithms and associated functions*, North Holland, New York and Oxford, 1981.

[19] G. MELANÇON & C. REUTENAUER.– *Lyndon words, free algebras and shuffles*, Canadian Journal of Mathematics, 41, 1989, pp. 577-591.

[20] D.E. RADFORD.– *A natural ring basis for shuffle algebra and an application to group schemes*, Journal of Algebra, 58, pp. 432-454, 1979.

[21] C. REUTENAUER.– *Free Lie Algebras*, London Math. Soc. Monog. 7 (new series), Clarendon Press-Oxford Sciences Publications, 1993.

[22] G. VIENNOT.– *Algèbres de Lie libres et monoïdes libres*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, 691, 1978.

[23] J. WEI & E. NORMAN.– *Lie algebraic solution of linear differentiel equations*, J. Math. Phys., 4, 1963, 575-581.

[24] J. WEI & E. NORMAN.– *On global representation of the solution of linear differentiel equations as product of exponentials*, Proc. A.M.S., 15, 1964, pp. 327-334.

[25] Z. WOJTKOWIAK.– *A note on functional equations of the p-adic polylogarithms*, Bull. Soc. Math. France, N°119, 1991, pp. 343-370.