Dénombrement de cartes planaires à deux faces[1]

Michel Bousquet, Gilbert Labelle, Pierre Leroux
Lacim, Département de Mathématiques,
Université du Québec à Montréal.

April 7, 1998

Abstract

Up to now, most of the work on maps has dealt with *rooted* maps, that is, maps with a distinguished and directed edge. We get rid of this restriction in the case of planar maps having two faces. Moreover we enumerate these maps according to their vertex and face degree distributions. The following classes of non rooted 2-face maps are treated: (vertex) labelled or unlabelled, embedded in the plane or on the sphere. The motivation for this research comes from the classification of Belyi functions.

Résumé

Jusqu'à présent, l'étude des cartes a porté essentiellement sur les cartes *pointées*, c'est-à-dire ayant une arête distinguée et orientée. Nous levons cette restriction dans le cas des cartes planaires à deux faces. De plus, nous dénombrons ces cartes selon la distribution des degrés des sommets et des faces. Les classes suivantes de cartes à deux faces non pointées sont considérées: étiquetées (aux sommets) ou non, plongées dans le plan ou sur la sphère. La motivation de cette recherche vient de la classification des fonctions de Belyi.

1 Introduction

Soit Σ une surface connexe fermée et orientée dans $\mathbb{R}^3$. Une *carte* peut être topologiquement définie comme étant une partition de Σ en trois classes finies:

1. Un ensemble $\mathcal{S}$ de points: les *sommets*;
2. Un ensemble $\mathcal{A}$ de courbes de Jordan dont les extrémités sont les sommets: les *arêtes*;
3. Un ensemble $\mathcal{F}$ de domaines simplement connexes: les *faces*.

Le *genre* g d'une carte est le genre de Σ. Il est donné par la formule d'Euler:

$$|\mathcal{S}| - |\mathcal{A}| + |\mathcal{F}| = 2 - 2g.$$

Une carte de genre 0 est généralement appelée carte *planaire*, correspondant au cas où Σ est la sphère orientée. Deux cartes planaires sont dites *équivalentes* s'il existe un homéomorphisme de la

[1] Avec l'aide du financement du CRSNG (Canada) et du FCAR (Québec)

sphère préservant l'orientation et envoyant l'une sur l'autre. On s'intéresse aux classes d'équivalence sous la relation d'homéomorphisme. Un *automorphisme* d'une carte planaire est un homéomorphisme de la sphère envoyant cette carte sur elle-même. On définit une carte *plane* comme étant une carte planaire munie d'une face distinguée, la face *extérieure* ou *infinie*. Autrement dit, une carte plane est une carte planaire munie d'un plongement spécifique dans le plan orienté (sphère épointée). Pour éviter toute ambiguité, les cartes planaires seront dites *sphériques*.

Jusqu'à présent, la plupart des travaux ont porté sur les cartes *pointées*, c'est-à-dire les cartes munies d'une arête distinguée et orientée. Comme les cartes non pointées admettent des automorphismes, leur dénombrement est plus difficile. Voir Liskovets–Walsh [5] and Liskovets [6]–[7].

Dans ce travail, nous dénombrons les cartes planes et sphériques à deux faces, étiquetées *aux sommets* ou non, selon la distribution des degrés des sommets et des faces. Ce problème est motivé par la classification des fonctions de Belyi. Voir Shabat–Zvonkin [10] et Magot–Zvonkin [8]. La stratégie que nous utilisons pour dénombrer les cartes planes à deux faces consiste à exprimer cette espèce en termes d'espèces plus simples, munies de pondérations permettant d'encapsuler l'information sur les distributions des degrés des sommets et des faces.

Les cartes sphériques à deux faces sont alors considérées comme des classes d'équivalence de cartes planes à deux faces; deux cartes planes étant équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par une symétrie antipodale. L'étape cruciale ici est le dénombrement des cartes planes admettant cette symétrie antipodale.

2 Cartes planes

La théorie des espèces constitue un des outils que nous utiliserons dans ce travail. Le lecteur désireux d'en savoir plus sur le sujet peut se réferer à Bergeron–Labelle–Leroux [1]. Voici quelques exemples d'espèces qui nous seront utiles pour l'analyse des cartes planes à deux faces.

L'espèce C des *cycles orientés*, dont la *série génératrice exponentielle* (énumération étiquetée) est donnée par

$$C(x) = \sum_{n\geq 1}(n-1)!\frac{x^n}{n!} = \log\left(\frac{1}{1-x}\right). \tag{1}$$

La *série génératrice des types d'isomorphie* (énumération non étiquetée) de l'espèce C est donnée par

$$\widetilde{C}(x) = \frac{x}{1-x}.$$

De plus, $C = \sum_{j\geq 1} C_j$, où C_j dénote l'espèce des cycles orientés de longueur j. Il est bien connu que le polynôme indicateur de Pòlya de C_j est donné par

$$Z_{C_j}(x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{j}\sum_{d|j}\phi(d)x_d^{j/d},$$

et qu'ainsi, la *série génératrice de cycles* de l'espèce C est donnée par

$$Z_C(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\phi(m)}{m}\log\left(\frac{1}{1-x_m}\right). \tag{2}$$

L'espèce L des *listes*, ou *ordres totaux* dont les séries correspondantes sont données par

$$L(x) = \sum_{n\geq 0} n!\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x},\ \widetilde{L}(x) = \frac{1}{1-x} \text{ et } Z_L = \frac{1}{1-x_1}$$

L'espèce X des *singletons*, ou *ensembles à un élément* pour laquelle

$$X(x) = x,\ \ \widetilde{X}(x) = x\ \ Z_X = x_1.$$

L'espèce A_L des *arborescences ordonnées*, qui sont définies comme étant des arborescences où la fibre de chaque sommet (l'ensemble des fils) est enrichie d'un ordre total (structure de liste). On a

$$A_L = XL(A_L).$$

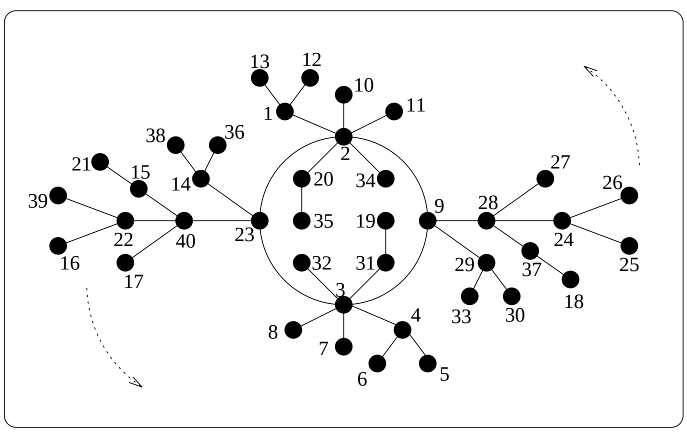
Il s'ensuit que

$$A_L(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

Proposition 1 *L'espèce des cartes planes à deux faces, dénotée par M, satisfait l'identité combinatoire*

$$M = C(XL^2(A_L)). \tag{3}$$

Preuve: On considère la face externe comme étant la première face et la face interne comme étant la seconde face. Une carte plane est donc un *cycle orienté* de structures, chacune d'elles étant constituée d'un *singleton* (une X-structure) auquel est attachée une *paire ordonnée* (une pour chaque face) de *listes d'arborescences ordonnées* (une $L^2(A_L)$-structure), i.e, $M = C(XL^2(A_L))$. □



Notons que l'espèce $XL^2(A_L)$ est *asymétrique*, (le groupe d'automorphismes de chaque $XL^2(A_L)$-structure est trivial). Ceci équivaut à dire que

$$\left(XL^2(A_L)\right)^{\sim}(x) = (XL^2(A_L))(x).$$

De plus, sachant que $A_L = XL(A_L)$, on trouve

$$(XL^2(A_L))(x) = \frac{A_L^2(x)}{x}. \tag{4}$$

2.1 Dénombrement de cartes planes à deux faces.

Soit $M[n]$ l'ensemble des cartes planes étiquetées à deux faces. Étant donné que la série génératrice des structures étiquetées est exponentielle, on a

$$|M[n]| = n![x^n]M(x),$$

où $[x^n]M(x)$ dénote le coefficient de x^n dans $M(x)$. À partir de l'identité (3), et en utilisant les équations (1) et (4), on obtient

$$M(x) = \sum_{\gamma \geq 1} \frac{A_L^{2\gamma}(x)}{\gamma x^\gamma}.$$

Par inversion de Lagrange, on trouve

$$A_L^{2\gamma}(x) = \sum_{m>\gamma} \frac{\gamma}{m-\gamma} \binom{2m-2\gamma}{m} x^m.$$

En combinant les deux dernières expressions, on obtient

$$|M[n]| = (n-1)! \sum_{\gamma=1}^{n} \binom{2n}{n+\gamma},$$

et le résultat suivant s'ensuit:

Proposition 2 *le nombre $|M[n]|$ de cartes planes étiquetées à deux faces sur l'ensemble de sommets $[n]$ est donné par*

$$|M[n]| = \frac{(n-1)!}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right). \tag{5}$$

□

Pour obtenir la série génératrice des types d'isomorphie dans le cas d'espèces composées, on utilise la formule de substitution bien connue suivante (voir Bergeron–Labelle–Leroux [1] et Robinson [9]):

Théorème 3 *Soient F_w et G_w deux espèces pondérées. La série génératrice des $F_w \circ G_v$-structures non étiquetées est donnée par*

$$\begin{aligned} (\widetilde{F_w \circ G_v})(x) &= Z_{F_w}(\widetilde{G_v}(x), \widetilde{G_{v^2}}(x^2), \widetilde{G_{v^3}}(x^3)\ldots) \\ &= Z_{F_w}\left(\widetilde{G_{v^m}}(x^m)\right)_{m\geq 1} \end{aligned} \tag{6}$$

□

Soit $\widetilde{M}_n$ l'ensemble des cartes planes non étiquetées à deux faces sur n sommets. On a

$$\begin{aligned} |\widetilde{M}_n| &= [x^n]\widetilde{M}(x) \\ &= [x^n]Z_C\left((XL^2(A_L)^\sim(x^m)\right)_{m\geq 1} \\ &= [x^n]Z_C\left(XL^2(A_L)(x^m)\right)_{m\geq 1}, \end{aligned}$$

car l'espèce $XL^2(A_L)$ est asymétrique. En utilisant (2), et l'inversion de Lagrange, on obtient

Proposition 4 *Le nombre $|\widetilde{M}_n|$ de cartes planes non étiquetées à deux faces sur n sommets est donné par*

$$|\widetilde{M}_n| = \frac{1}{2n}\sum_{d|n}\phi(\frac{n}{d})\left(2^{2d} - \binom{2d}{d}\right). \tag{7}$$

□

2.2 Dénombrement de cartes planes à deux faces selon la distribution des degrés des sommets.

Soit $r_1, r_2, r_3, \ldots$ une suite infinie de variables formelles et m une carte plane à deux faces. On définit la fonction de poids w_s sur l'espèce M:

$$w_s \ : M \to \mathbf{C}[r_1, r_2, r_3, \ldots] \ : \ \mathsf{m} \mapsto r_1^{d_1} r_2^{d_2} r_3^{d_3} \cdots, \tag{8}$$

où d_k est le nombre de sommets de m de degré k. La carte de l'exemple courant admet le poids $r_1^{24} r_2^4 r_3^6 r_4^4 r_7^2$. La distribution des degrés des sommets d'une carte est caractérisée par un vecteur $d = (d_1, d_2, d_3, \ldots)$. On pose

$$|d| = \sum_k d_k \text{ et } ||d|| = \sum_k k d_k;$$

ainsi, $|d|$ et $||d||$ représentent respectivement le nombre de sommets et le degré total d'une carte. On a alors le lemme d'existence suivant:

Lemme 5 *Soit $d = (d_1, d_2, d_3, \ldots) \neq 0$. Il existe une carte plane à deux faces ayant d pour vecteur de distribution des degrés des sommets si et seulement si*

$$||d|| = 2|d|. \tag{9}$$

□

Considérons maintenant le couple (j, h) de vecteurs:

$$j = (j_1, j_2, j_3, \ldots) \text{ et } h = (h_1, h_2, h_3, \ldots),$$

où j correspond à la distribution des degrés des sommets se trouvant *sur* le cycle et h correspond à la distribution des degrés des sommets se trouvant *de part et d'autre* du cycle. On a alors

Lemme 6 *Supposons que $d = (d_1, d_2, d_3, \ldots) \neq 0$ satisfasse $||d|| = 2|d|$ et soit (j, h) un couple de vecteurs tels que $j + h = d$. Il existe une carte plane à deux faces ayant les distributions des degrés des sommets correspondantes si et seulement si*

$$\begin{array}{ll} 1. & j \neq 0; \\ 2. & j_1 = 0; \\ 3. & ||j|| = 2|j| \Rightarrow h = 0. \end{array} \tag{10}$$

□

La prochaine étape consiste à déterminer l'espèce pondérée M_{w_s} correspondant à la fonction de poids w_s, donnée en (8). En fait, M_{w_s} peut être exprimée comme la composition d'espèces pondérées suivante:

$$M_{w_s} = C(\sum_{m,k\geq 0} X_{r_{m+k+2}} A_{r'}^{m+k}), \tag{11}$$

où X_{r_i} dénote l'espèce des singletons de poids r_i et $A_{r'}$ est une version pondérée de l'espèce des arborescences ordonnées définie par

$$A_{r'} = XL_{r'}(A_{r'})$$

où

$$L_{r'} = 1_{r_1} + X_{r_2} + X_{r_3}^2 + X_{r_4}^3 + \cdots$$

est l'espèce des listes pondérées par r_{i+1} pour une liste de longueur i.

Soit M_d l'ensemble des cartes planes à deux faces étiquetées sur l'ensemble $[|d|]$ et ayant d pour vecteur de distribution des degrés des sommets. On a

$$|M_d| = |d|![r^d x^{|d|}]M_{w_s}(x),$$

où $r^d = r_1^{d_1} r_2^{d_2} r_3^{d_3} \cdots$. En développant, on trouve

Proposition 7 *Le nombre $|M_d|$ de cartes planes à deux faces étiquetées sur $[|d|]$ et ayant d comme vecteur de distribution des degrés des sommets est donné par*

$$|M_d| = \begin{cases} 0, \text{ si } ||d|| \neq 2|d|, \\ (|d|-1)!, \text{ si } |d| = d_2, \\ |d|! \sum_{j,h} \frac{||j||-2|j|}{|j||h|} \binom{|j|}{j} \binom{|h|}{h} 2^{j_3} 3^{j_4} \cdots \text{ autrement}, \end{cases} \tag{12}$$

la somme étant prise sur tous les couples (j, h) tels que $j + h = d, j \neq 0$ et $j_1 = 0$. □

Soit $\widetilde{M}_d$ l'ensemble des cartes planes non étiquetées à deux faces sur $|d|$ sommets et ayant d comme distribution des degrés des sommets. On a

$$|\widetilde{M}_d| = [r^d x^{|d|}]\widetilde{M}_{w_s}(x)$$

Il est clair que

$$|\widetilde{M}_d| = \begin{cases} 0, \text{ si } ||d|| \neq 2|d|, \\ 1, \text{ si } |d| = d_2. \end{cases}$$

Pour le cas restant, on utilise le Théorème 3 sur les espèces composées, et on obtient

Proposition 8 *Si $||d|| = 2|d|$ et $|d| \neq d_2$, alors le nombre $|\widetilde{M}_d|$ de cartes planes à deux faces non étiquetées ayant d comme vecteur de distribution des degrés des sommets est donné par*

$$|\widetilde{M}_d| = \sum_{m,j,h} \frac{\phi(m)(||j||-2|j|)}{m|j||h|} \binom{|j|}{j} \binom{|h|}{h} 2^{j_3} 3^{j_4} 4^{j_5} \cdots, \tag{13}$$

la somme étant prise sur tous les $m \in \mathrm{Div}(d)$, l'ensemble des diviseurs communs aux composantes de d et tous les couples (j, h) tels que $j + h = d/m, j \neq 0$ et $j_1 = 0$. □

2.3 Dénombrement des cartes planes à deux faces selon les distributions conjointes des degrés des sommets et des faces.

Soit

$$s = (s_1, s_2, s_3, \ldots),\ \ t = (t_1, t_2, t_3, \ldots) \text{ et } u = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$$

trois suites infinies de variables formelles et m une carte plane à deux faces. On considère la fonction de poids w_{sf} suivante:

$$w_{sf} \ : M \to \mathbf{C}[s,t,u] \ : \mathsf{m} \mapsto s^j t^h u^k, \tag{14}$$

où

$$s^j = s_1^{j_1} s_2^{j_2} s_3^{j_3} \cdots,\ t^h = t_1^{h_1} t_2^{h_2} t_3^{h_3} \cdots \text{ et } u^k = u_1^{k_1} u_2^{k_2} u_3^{k_3} \cdots$$

décrivent respectivement les distributions des degrés des sommets se trouvant *sur*, *à l'extérieur* et *à l'intérieur* du cycle. Par exemple la carte de l'exemple courant a le poids $s_4^2 s_7^2 t_1^{20} t_2^2 t_3^6 t_4^2 u_1^4 u_2^2$. Soit α le degré de la face externe et β, le degré de la face interne. La donnée du triplet (j,h,k) est suffisante pour connaître les distributions des degrés des sommets et des faces puisque

$$d = j + h + k,\ \alpha = 2|h| + |j|, \text{ and } \beta = 2|k| + |j|.$$

Pour un vecteur h, on définit

$$\mathrm{res}(h) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2|h| - ||h||.$$

Le terme $\mathrm{res}(h)$ est appelé *degré résiduel* de h. Il correspond au nombre d'arborescences ordonnées externes. Il en va de même pour le vecteur k.

Lemme 9 *Soit $d = (d_1, d_2, \ldots) \neq 0$, $\alpha > 0, \beta > 0, j, h$ et k. Il existe une carte plane à deux face ayant d et (α, β) comme distributions conjointes des degrés des sommets et des faces si et seulement si*

1. $(\alpha + \beta)/2 = |d|$
2. $2|d| = ||d||$

Dans ces conditions, il existe une carte dont les distributions des degrés des sommets se trouvant sur, à l'extérieur et à l'intérieur du cycle sont respectivement donnés par j, h et k si et seulement si

3. $j + h + k = d$
4. $2|h| + |j| = \alpha$ et $2|k| + |j| = \beta$
5. $j_1 = 0$ et $j \neq 0$
6. $h \neq 0 \Rightarrow \mathrm{res}(h) \geq 1$ et $k \neq 0 \Rightarrow \mathrm{res}(k) \geq 1$

□

Proposition 10 *Soit d, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ satisfaisant les conditions 1 et 2 du lemme précédent. Le nombre $|M_{d,(\alpha,\beta)}|$ de cartes planes à deux faces étiquetées ayant d et (α, β) comme distributions conjointes des degrés des sommets et des faces est donné par*

$$|M_{d,(\alpha,\beta)}| = |d|! \sum_{j,h,k} \frac{\Phi(h)\Phi(k)\Theta(j,h)}{|j|} \binom{|j|}{j} \binom{|h|}{h} \binom{|k|}{k}, \tag{15}$$

la somme étant prise sur tous les j, h et k satisfaisant les conditions 3, 4 et 5 du lemme précédent, et

$$\Theta(j,h) = [z^{\mathrm{res}(h)}](1+z)^{j_3}(1+z+z^2)^{j_4}(1+z+z^2+z^3)^{j_5}\cdots,$$

et

$$\Phi(h) = \begin{cases} \mathrm{res}(h)/|h|, \text{ si } \mathrm{res}(h) \geq 1, \\ 1, \text{ si } h = 0, \\ 0, \text{ autrement.} \end{cases}$$

□

Dans le cas non étiqueté, on a le résultat suivant.

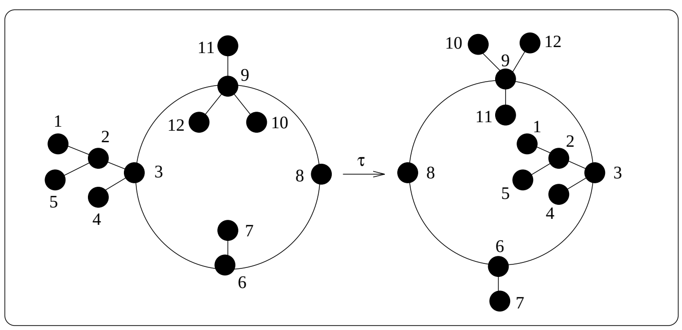
Proposition 11 *Soit d, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ satisfaisant les conditions 1 et 2 du lemme précédent. Le nombre $|\widetilde{M}_{d,(\alpha,\beta)}|$ de cartes à deux faces non étiquetées ayant d et (α, β) comme distributions conjointes des degrés des sommets et des faces est donné par*

$$|\widetilde{M}_{d,(\alpha,\beta)}| = \sum_{m,j,h,k} \frac{\phi(m)\Phi(h')\Phi(k')\Theta(j',h')}{|j|} \binom{|j'|}{j'}\binom{|h'|}{h'}\binom{|k'|}{k'}, \tag{16}$$

où $j' = j/m, h' = h/m$ et $k' = k/m$, la somme étant prise sur tous les j, h, k satisfaisant les conditions 3,4,5 du lemme précédent, et tous les $m \in Div(j, h, k)$. □

3 Cartes sphériques.

Considérons les deux cartes suivantes.



Plongées dans le plan, ces deux cartes sont distinctes. Toutefois, lorsque considérées plongées sur la sphère orientée, les deux structures représentent la *même* carte. Observons que cette transformation consiste essentiellement en une réflexion de la structure par rapport à un axe, suivie d'une réflexion interne–externe par rapport au cycle. Puisque les cartes planes sont considérées à rotation près, n'importe quel axe de réflexion fera l'affaire. Cette transformation est clairement involutive, on l'appellera alors *l'involution antipodale* et sera dénotée par τ.

On considère le groupe $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, \tau\}$, où Id est la transformation identité, et $\tau^2 = \mathrm{Id}$. Ce groupe *agit* sur l'ensemble des cartes planes à deux faces. De ce point de vue, pour chaque ensemble fini U, l'ensemble des cartes *sphériques* à deux faces sur U peut être considéré comme étant l'ensemble des *orbites* de l'action du groupe $\mathcal{S}_2$ sur l'ensemble $M[U]$. L'espèce des cartes sphériques à deux faces, qu'on notera par $\mathcal{M}$, est *l'espèce quotient* de M par le groupe $\mathcal{S}_2$, ce qu'on exprime par

$$\mathcal{M} = M/\mathcal{S}_2. \tag{17}$$

La solution du problème du dénombrement de divers types de cartes sphériques: étiquetées ou non, selon divers paramètres de distribution des degrés, est alors donnée par la formule de Cauchy-Frobenius, (alias Lemme de Burnside): Étant donné un groupe fini G agissant sur un ensemble pondéré (Y, w), le poids total des orbites de cette action est donné par

$$|Y/G|_w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_Y \; g|_w . \tag{18}$$

3.1 Dénombrement des cartes sphériques étiquetées à deux faces, selon la distribution des degrés des sommets et des faces.

Le dénombrement des cartes sphériques étiquetées à deux faces selon divers paramètres de distribution des degrés est aisé. Il suffit de remarquer que

- Les deux seules cartes planes étiquetées à deux faces laissées fixes sous l'action de τ sont l'unicycle (1) et le 2-cycle (12).
- L'involution antipodale τ préserve la distribution des degrés des sommets.
- L'involution antipodale τ interchange les degrés des faces.

En appliquant le lemme de Burnside à l'ensemble $M[n]$ des cartes planes étiquetées à deux faces sur l'ensemble de sommets $[n]$, on a

$$|\mathcal{M}[n]| = \frac{1}{2} \left(|\mathrm{Fix}_{M[n]} \; \mathrm{Id}| + |\mathrm{Fix}_{M[n]} \; \tau| \right).$$

Comme les seules cartes planes à deux faces étiquetées laissées fixes sous l'action de τ sont l'unicycle (1) et le 2-cycle (12), alors

Proposition 12 *Le nombre $|\mathcal{M}[n]|$ de cartes sphériques étiquetées à deux faces sur l'ensemble $[n]$ est donné par $|\mathcal{M}[1]| = 1$, $|\mathcal{M}[2]| = 3$, et pour $n \geq 3$,*

$$|\mathcal{M}[n]| = \frac{(n-1)!}{4} \left(2^{2n} - \binom{2n}{n} \right). \tag{19}$$

□

Le raisonnement est le même en ce qui concerne les cartes étiquetées selon la distribution des degrés des sommets et des faces. Pour la distribution des degrés des faces dans le cas sphérique, on utilise la notation $\{\alpha, \beta\}$ plutôt que (α, β) car aucune face n'a précéance su l'autre. On obtient alors

Proposition 13 *Le nombre $|\mathcal{M}_d|$ de cartes sphériques étiquetées à deux faces sur l'ensemble $[|d|]$ ayant d comme dstribution des degrés des sommets est donné par*

$$|\mathcal{M}_d| = \begin{cases} 1, & \text{si } d = (0,1) \text{ ou } (0,2), \\ \frac{1}{2}|M_d|, & \text{autrement.} \end{cases} \tag{20}$$

□

Proposition 14 *Le nombre $|\mathcal{M}_{d,\{\alpha,\beta\}}|$ de cartes sphériques étiquetées à deux faces sur l'ensemble $[|d|]$ dont les distributions conjointes des degrés des sommets et des faces sont données par d et $\{\alpha,\beta\}$ est donné par*

$$|\mathcal{M}_{d,\{\alpha,\beta\}}| = \begin{cases} |M_{d,(\alpha,\beta)}|, & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ 1, & \text{si } \alpha = \beta = 1 \text{ ou } 2, \\ \frac{1}{2}|M_{d,(\alpha,\alpha)}|, & \text{autrement.} \end{cases} \tag{21}$$

□

3.2 Dénombrement des cartes sphériques non étiquetées à deux faces, selon la distribution des degrés des sommets et des faces.

Soit $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ l'ensemble des cartes sphériques non étiquetées à deux faces sur n sommets. Si on applique le lemme de Burnside, on obtient

$$|\widetilde{\mathcal{M}}_n| = \frac{1}{2}\left(|\mathrm{Fix}_{\widetilde{M}_n}\, \mathrm{Id}| + |\mathrm{Fix}_{\widetilde{M}_n}\, \tau|\right).$$

Le seul terme restant à déterminer est le nombre $|\mathrm{Fix}_{\widetilde{M}_n}\, \tau|$ de cartes planes non étiquetées à deux faces laissées fixes par τ, c'est-à-dire admettant une symétrie antipodale. Ce nombre peut être obtenu par une approche algébrique utilisant la Z-série d'une espèce auxiliaire à deux sortes $H(X,Y)$. On trouve

$$\sum_{n\geq 1} |\mathrm{Fix}_{\mathcal{M}_n}\, \tau| x^n = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1+2x}{\sqrt{1-4x^2}}\right). \tag{22}$$

Observant que

$$L^+(XL(A_L(X^2)))(x) = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1+2x}{\sqrt{1-4x^2}}\right), \tag{23}$$

une autre méthode de démonstration consiste à établir bijectivement une équipotence

$$|\mathrm{Fix}_{\widetilde{M}_n}\, \tau| = |L^+(XL(A_L(X^2)))^{\sim}_n|$$

entre l'ensemble $\mathrm{Fix}_{\widetilde{M}_n}$ et l'ensemble des $L^+(XL(A_L(X^2)))$-structures non étiquetées sur n sommets. Le lecteur intéressé trouvera une démonstration dans Bousquet–Labelle–Leroux [2]. En appliquant les équations (22) et (23), on trouve alors

Proposition 15 *Le nombre $|\widetilde{\mathcal{M}}_n|$ de cartes sphériques non étiquetées sur n sommets est donné par*

$$|\widetilde{\mathcal{M}}_n| = \frac{1}{2}|\widetilde{M}_n| + \begin{cases} \frac{1}{2}\binom{n-1}{(n-1)/2}, & \text{si } n \text{ est impair}, \\ \frac{1}{4}\binom{n}{n/2}, & \text{autrement.} \end{cases} \tag{24}$$

□

Soit $\widetilde{M}_d$ l'ensemble des cartes sphériques non étiquetées à deux faces admettant d comme distribution des degrés des sommets. On a

$$|\widetilde{\mathcal{M}}_d| = \frac{1}{2}\left(|\mathrm{Fix}_{\widetilde{M}_d}\, \mathrm{Id}| + |\mathrm{Fix}_{\widetilde{M}_d}\, \tau|\right),$$

Le seul terme restant à déterminer est $|\mathrm{Fix}_{\widetilde{M}_d}\ \tau|$, c'est-à-dire le nombre de cartes planes non étiquetées à deux faces ayant d comme distribution des degrés des sommets et admettant une symétrie antipodale. On a le lemme d'existence suivant:

Lemme 16 *Il existe une carte plane à deux faces ayant d comme distribution des degrés des sommets et admettant une symétrie antipodale, si et seulement si*

1. $||d|| = 2|d|$;
2. *Le vecteur d admet au plus deux composantes impaires;*
3. *Les composantes impaires, s'il y en a, sont d'indice pair.*

□

Proposition 17 *Si d admet exactement une composante impaire et* $|d| \neq d_2$, *alors* $|\mathrm{Fix}_{\widetilde{M}_d}\ \tau|$, *le nombre de cartes planes non étiquetées à deux faces ayant d comme distribution des degrés des sommets et admettant une symétrie antipodale est donné par*

$$|\mathrm{Fix}_{\widetilde{M}_d}\ \tau| = \sum_{j,h} \frac{||j|| - 2|j| + \ell - 1}{|h|} \binom{|j|}{j} \binom{|h|}{h} 2^{j_3} 3^{j_4} \cdots, \tag{25}$$

la somme étant prise sur tous les couples (j, h) *tels que* $j + h = d'$, $h \neq 0$ *et* $j_1 = 0$, *où* d' *est donné par*

$$d' = (\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}, \ldots, \frac{d_{2\ell} - 1}{2}, \ldots).$$

Si d admet exactement deux composantes impaires d'indice $2k$ *et* 2ℓ, *avec* $k < l$, *alors le nombre de cartes planes non étiquetées à deux faces ayant d comme distribution des degrés des sommets et admettant une symétrie antipodale est donné par*

$$|\mathrm{Fix}_{\widetilde{M}_d}\ \tau| = \sum_{j,h} \frac{||j|| - 2|j| + k + \ell - 2}{|h|} \binom{|j|}{j} \binom{|h|}{h} 2^{j_3} 3^{j_4} \cdots, \tag{26}$$

la somme étant prise sur tous les couples (j, h) *tels que* $j + h = d'$, $h \neq 0$, $j_1 = 0$, *où* d' *est donné par*

$$d' = (\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}, \ldots, \frac{d_{2k} - 1}{2}, \ldots, \frac{d_{2\ell} - 1}{2}, \ldots).$$

Si d n'admet aucune composante impaire, alors le nombre de cartes planes non étiquetées à deux faces ayant d comme distribution des degrés des sommets et admettant une symétrie antipodale est donné par

$$\begin{aligned} |\mathrm{Fix}_{\widetilde{M}_d}\ \tau| &= \sum_{k,j,h} \frac{||j|| - 2|j| + k - 2}{2|h|} \binom{|j|}{j} \binom{|h|}{h} 2^{j_3} 3^{j_4} \cdots \\ &+ \sum_{j,h} \frac{||j|| - 2|j|}{2|h|} \binom{|j|}{j} \binom{|h|}{h} 2^{j_3} 3^{j_4} \cdots, \end{aligned} \tag{27}$$

la somme étant prise sur tous les indices pairs k, correspondant aux composantes non nulles de d et tous les couples (j, h) *tels que* $j + h = d'$, $h \neq 0$ *et* $j_1 = 0$, *pour le premier terme, et tous les couples*

(j,h) *tels que* $j+h=d''$, $h\neq 0$ *et* $j_1=0$, *pour le second terme,* d' *et* d'' *étant respectivement donnés par*

$$d'=(\frac{1}{2}d_1,\frac{1}{2}d_2,\ldots,\frac{1}{2}(d_k-2),\ldots)$$

et

$$d''=(\frac{1}{2}d_1,\frac{1}{2}d_2,\ldots).$$

□

Proposition 18 *Le nombre* $|\widetilde{\mathcal{M}}_{d,\{\alpha,\beta\}}|$ *de cartes sphériques non étiquetées à deux faces ayant les distributions conjointes des degrés des sommets et des faces données par* d *et* $\{\alpha,\beta\}$ *est donné par*

$$|\widetilde{\mathcal{M}}_{d,\{\alpha,\beta\}}|=\begin{cases}|\widetilde{M}_{d,(\alpha,\beta)}|, & \text{if } \alpha\neq\beta,\\ \frac{1}{2}|\widetilde{M}_{d,(\alpha,\alpha)}|+\frac{1}{2}|\mathrm{Fix}_{\widetilde{M}_d}\,\tau| & \text{if } \alpha=\beta,\end{cases}\tag{28}$$

où $|\mathrm{Fix}_{\widetilde{M}_d}\,\tau|$ *peut être nul ou donné par la proposition 17, selon la distribution des composantes paires et impaires de* d. □

References

[1] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Vol **67**, Cambridge University Press, (1997).

[2] M. Bousquet, G. Labelle, and P. Leroux. *Enumeration of planar two faces maps*, Disc. Math. (à paraître)

[3] R. Cori and A. Machi. *Maps, hypermaps and their automorphisms: a survey,* I, II, III. Expositiones Mathematicae, vol. **10**, (1992), 403–427, 429–447, 449–467.

[4] G. Labelle and P. Leroux. *Enumeration of (uni- or bicolored) plane trees according to their degree distribution*, Disc. Math. **157** (1996), 227–240.

[5] V.A. Liskovets and T.R. Walsh. *The enumeration of non-isomorpic 2-connected planar maps*, Canad. J. Math. **35**, (1983), 417–435.

[6] V.A. Liskovets. *A census of non-isomorphic planar maps*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai **25**, Algebraic Methods in Graph Th. (1981), 479–494.

[7] V.A. Liskovets. *Enumeration of non-isomorphic planar maps*, Selecta Math. Soviet. **4**, (1985), 303–323.

[8] N. magot and A. Zvonkin. *Belyi Functions for Archimedean Solids*, Formal power series and algebraic combinatorics, 9th Conference Procedings, Vol. 3 (1997), 373–389.

[9] R.W. Robinson. *Enumeration of Non-Separable Graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **9**, (1970), 327–356.

[10] G. Shabat and A. Zvonkin. *Plane trees and algebraic numbers*, Contemporary Math. **178** (1994), 233–275.