L'algèbre des polylogarithmes par les séries génératrices

Hoang Ngoc Minh
Université Lille II,
59024 Lille, France.
e-mail : hoang@lifl.fr

Michel Petitot
Université Lille I,
59655 Villeneuve d'Ascq, France.
e-mail : petitot@lifl.fr

Joris Van Der Hoeven
Université Paris Sud,
91405 Orsay, France.
e-mail : hoeven@lix.polytechnique.fr

ABSTRACT – Generalized polylogarithms are defined as iterated integrals with respect to the two differential forms $\omega^0 = dz/z$ and $\omega^1 = dz/(1-z)$. We compute the polylogarithms in $h(z)$ from their values in z for every transformation h belonging to the group generated by the two transformations $z \to 1-z$ and $z \to 1/z$. These formulæ utilize a certain series in non-commutative variables which turns out to be the Φ_{KZ} series of Drinfel'd.

RÉSUMÉ – Les polylogarithmes généralisés sont des fonctions obtenues comme des intégrales itérées par rapport aux deux formes différentielles $\omega^0 = dz/z$ et $\omega^1 = dz/(1-z)$. On calcule les polylogarithmes en $h(z)$ en fonction de leur valeur en z pour toute transformation h appartenant au groupe engendré par les deux transformations $z \to 1-z$ et $z \to 1/z$. Dans ces formules apparaît une certaine série en variables non commutatives qui se trouve être la série Φ_{KZ} de Drinfel'd et que l'on calcule à partir des mots de Lyndon.

Keywords: polylogarithms, multiple zeta values, monodromy, Lyndon words.

1 Introduction

Les fonctions polylogarithmes jouent un rôle crucial dans la théorie des nombres, en physique statistique (théorie des noeuds), dans la résolution des équations différentielles (étude des singularités [9]). Dans cet article, on généralise certaines identités fonctionnelles (voir formules de Landen dans Lewin [17]) en utilisant la combinatoire des exponentielles de Lie. On retrouve une telle approche dans [5, 7, 8, 22, 19, 23, 1, 10]

Suivant Drinfel'd [8], on étudie les solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dz}S(z) = \left(\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z}\right) S(z) \tag{1}$$

dans laquelle z est un nombre complexe appartenant à $\mathbb{C} - \{0,1\}$ et $S(z)$ une série en les variables non commutatives sur l'alphabet $X = \{x_0, x_1\}$. Si l'on note $S_w(z)$ le coefficient du mot w dans $S(z)$, l'équation (1) est équivalente au système différentiel triangulaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dz} S_{x_0 w}(z) & = & \frac{1}{z} S_w(z) \\ \frac{d}{dz} S_{x_1 w}(z) & = & \frac{1}{1-z} S_w(z) \end{array} \right. \tag{2}$$

Soit $L(z)$ l'unique solution de l'équation (1) qui vérifie la condition à la limite :

$$L(\varepsilon) \quad = \quad e^{x_0 \log \varepsilon} + O(\sqrt{\varepsilon}) \quad \text{pour } \varepsilon \to 0^+. \tag{3}$$

On appelera $L(z)$ la *série génératrice* des polylogarithmes. Notons $\omega^0 = \frac{dz}{z}$ et $\omega^1 = \frac{dz}{1-z}$. On a montré dans [14] que $L(z)$ est une *exponentielle de Lie*. Ses coefficients $L_w(z)$ sont des fonctions multivaluées $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes (voir thm 1) qui sont données par les formules — voir [14] :

$$\left\{ \begin{array}{lll} L_1(z) & = 1 & \\ L_{x_0}(z) & = \int_1^z \omega^0 & = \log z \\ L_{x_1}(z) & = \int_0^z \omega^1 & = -\log(1-z). \end{array} \right. \tag{4}$$

Lorsque le mot w se termine par la lettre x_1, la fonction $L_w(z)$ s'annule en la singularité $z = 0$. Soit $X = \{x_0, x_1\}$. On a [12, 13], $\forall w \in X^* x_1$:

$$L_{x_i w}(z) \quad = \quad \int_0^z \omega^i L_w, \qquad i = 0, 1 \tag{5}$$

Tout mot $w \in X^* x_1$ s'écrit de façon unique :

$$w \quad = \quad x_0^{s_1 - 1} x_1 x_0^{s_2 - 1} x_1 \cdots x_0^{s_k - 1} x_1. \tag{6}$$

On lui associe le multi-indice $s = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ formé d'entiers positifs. Un tel multi-indice est appelé une *composition* de longueur k et de poids $s_1 + s_2 + \cdots + s_k$. On a :

$$L_w(z) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Li}_s(z) \quad = \quad \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k > 0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_k^{s_k}}. \tag{7}$$

Cette série entière est convergente $|z| < 1$. Les fonctions Li_s sont donc mono-valuées à l'intérieur du disque unité.

En évaluant ces polylogarithmes [18, 24, 2, 15, 16, 3] en $z = 1$, on obtient les *Multiple Zeta Values* (MZV) :

$$\zeta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Li}_s(1) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_k^{s_k}}. \tag{8}$$

$\zeta(s)$ est convergente pour $s_1 \geq 2$ ie. pour $w \in x_0 X^* x_1$. On propose dans [11] un procédé combinatoire simple pour engendrer les relations $\mathbb{Q}$-polynomiales entre les $\zeta(s)$. On conjecture que ce procédé est *complet*.

L'étude de la *monodromie* des polylogarithmes (prolongement analytique sur un chemin fermé) fournit un autre moyen pour calculer les relations entre les MZV. La *série de Chen* $S_{z_0 \rightsquigarrow z}$ est par définition l'unique solution sur le chemin $z_0 \rightsquigarrow z$ de l'équation (1) vérifiant la condition initiale $S(z_0) = 1$. Le prolongement analytique de la série L le long d'un chemin quelconque $z_0 \rightsquigarrow z$ dans $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ est donné par la formule [6, 4]:

$$L(z) \quad = \quad S_{z_0 \rightsquigarrow z} L(z_0). \tag{9}$$

Toutes les formules présentées dans cet article reposent sur le calcul d'une certaine série Z qui est une exponentielle de Lie sur l'alphabet X et dont les coefficients sont des MZV. Comme le montre la formule :

$$S_{\varepsilon \rightsquigarrow 1-\varepsilon} \quad \sim \quad e^{-x_1 \log \varepsilon} \, Z \, e^{-x_0 \log \varepsilon}, \qquad \text{pour } \varepsilon \to 0^+, \tag{10}$$

la série Z *régularise* la série de Chen $S_{\varepsilon \rightsquigarrow 1-\varepsilon}$ attachée au chemin de l'axe réel $\varepsilon \rightsquigarrow 1 - \varepsilon$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$. Cette série Z correspond à la série Φ_{KZ} introduite par Drinfel'd [8] dans l'étude du système KZ_3 de Knizhnik–Zamolodchikov.

Le calcul de la série Z à un ordre n donné figure dans [14] ; il est est effectué dans le système de calcul formel Axiom en utilisant la combinatoire des mots de Lyndon.

Nous établissons les formules – voir section 3 – permettant de calculer la série $L(h(z))$ en fonction de $L(z)$ lorsque la transformation $z \to h(z)$ appartient au groupe de transformations engendré par les deux transformations $z \to 1 - z$ et $z \to 1/z$.

2 Approche combinatoire de la régularisation

Les notations sont celles de [14]. La série génératrice $L(z)$ est une exponentielle de Lie que l'on peut factoriser en utilisant une factorisation classique de la série double [20] dans $\mathrm{Sh}_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle \hat{\otimes} \mathbb{Q}\langle X\rangle$ grâce à deux bases duales liées aux mots de Lyndon. Les polynômes de Lie $P(l)$ forment une base de l'algèbre de Lie libre sur X et les polynômes $P^*(l)$ une base de transcendance de $\mathrm{Sh}_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$.

$$\sum_{w \in X^*} w \otimes w \quad = \quad \prod_{l \in \mathcal{L}yndon(X)} e^{P^*(l) \otimes P(l)}. \tag{11}$$

Proposition 1 ([14]) *Soit L la série génératrice des polylogarithmes définie par les équations (1) et (3). Alors lorsque $\varepsilon \to 0^+$, on a le développement asymptotique :*

$$L(1 - \varepsilon) \sim e^{-x_1 \log \varepsilon} \, Z \quad \text{avec } Z = \prod_{l \in \mathcal{L}yndon(X) - \{x_0, x_1\}} e^{\zeta_{P^*(l)} P(l)} \tag{12}$$

Lemme 1 ([14]) *Z est l'unique exponentielle de Lie telle que*

$$\begin{cases} (Z \mid w) & = \zeta(s), \qquad\qquad w \in x_0 X^* x_1 \\ (Z \mid x_0) & = (Z \mid x_1) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

la composition s étant définie comme en (6).

On considère le $\mathbb{C}$–morphisme (régularisation) $\rho : \mathbb{C}[\varepsilon, \log\varepsilon] \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à tout polynôme de $\mathbb{C}[\varepsilon, \log\varepsilon]$ associe son terme constant. Ce morphisme s'étend de manière naturelle aux séries en un $\mathbb{C}$–morphisme :

$$\rho : \mathbb{C}[\varepsilon, \log\varepsilon]\langle\langle X\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle. \tag{14}$$

En ce sens, la série Z régularise la série de Chen (voir formule (10)) $S_{\varepsilon\rightsquigarrow 1-\varepsilon}$ ie.

$$Z = \rho(S_{\varepsilon\rightsquigarrow 1-\varepsilon}). \tag{15}$$

On obtient à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned}\log Z &= \zeta(2)\,[x_0, x_1] + \zeta(3)\,[x_0, [x_0, x_1]] + \zeta(3)\,[[x_0, x_1], x_1] \\ &\quad + \frac{2}{5}\zeta(2)^2\,[x_0, [x_0, [x_0, x_1]]] + \frac{1}{10}\zeta(2)^2\,[x_0, [[x_0, x_1], x_1]] \\ &\quad + \frac{2}{5}\zeta(2)^2\,[[[x_0, x_1], x_1], x_1] + \cdots\end{aligned} \tag{16}$$

3 Identités fonctionnelles entre polylogarithmes

Le thm suivant démontré dans [14] ramène le test d'égalité à zéro d'une expression polynomiale en les $L_w(t)$ à un simple test d'égalité à zéro dans l'algèbre des polynômes $\mathbb{C}\langle X\rangle$.

Théorème 1 *Soit* $\mathrm{LI}_{\mathbb{C}}$ *la* $\mathbb{C}$*-algèbre engendrée par la fonction constante* 1*, la fonction* log *et les fonctions* Li_s *où* s *est une composition quelconque. Soit* $\mathrm{Sh}_{\mathbb{C}}\langle X\rangle$ *l'algèbre des polynômes* $\mathbb{C}\langle X\rangle$ *munie du produit de mélange. L'application qui, à* x_0 *associe la fonction* log *et à* $w = x_0^{s_1-1}x_1\ldots x_0^{s_k-1}x_1$ *la fonction* $\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_k}$ *se prolonge par linéarité en un unique isomorphisme* $\mathrm{LI}_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{Sh}_{\mathbb{C}}\langle X\rangle$.

La généralisation de ce thm. lorsque l'on prend $\mathbb{C}[z]$ comme anneau des coefficients est facile.

3.1 Changement de variables dans une série de Chen

On considère le groupe G à 6 éléments engendré par les transformations projectives de la droite complexe $P^1\mathbb{C}$ qui laissent globalement invariants les trois points $0, 1, \infty$. Un élément $h \in G$ est déterminé par son action sur ces trois points ; donc $G \simeq \mathfrak{S}_3$. G est engendré par les deux transformations $z \to 1/z$ et $z \to 1 - z$. Ce groupe opère sur les formes et les chemins définis sur $\mathbb{C} - \{0, 1\}$. Le *pull-back* des formes ω^0 et ω^1 vaut $h^*\omega^0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dh(z)}{h(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)}dz$ et $h^*\omega^1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dh(z)}{1-h(z)} = \frac{h'(z)}{1-h(z)}dz$.

Un chemin γ est une application différentiable de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C} - \{0, 1\}$. On pose $h^*\gamma \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1} \circ \gamma$. On a: $\forall h_1, h_2 \in G$, $(h_1h_2)^* = h_2^*h_1^*$. L'intégrale d'une 1-forme ω sur un chemin γ vérifie $\int_\gamma \omega = \int_{h^*\gamma} h^*\omega$. Cette formule se généralise aux intégrales itérées :

$$\int_\gamma \omega^{i_1}\cdots\omega^{i_k} = \int_{h^*\gamma} (h^*\omega^{i_1})\cdots(h^*\omega^{i_k}). \tag{17}$$

Considérons l'action à gauche de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ sur les séries de $\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$. On pose pour $f \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ et $w = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k} \in X^*$:

$$f(w) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_{i_1})\, f(x_{i_2})\dots f(x_{i_k}) \tag{18}$$

On prolonge par linéarité l'action de f aux séries en posant

$$f\left(\sum_w (S \mid w)\; w\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_w (S \mid w)\; f(w).$$

On a clairement $f(S+T) = f(S) + f(T)$ et $f(ST) = f(S)f(T)$.

Soit $\left(H^i_j\right)_{i,j\in\{0,1\}}$ la matrice de l'application linéaire h^* ie. $h^*\omega^i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j H^i_j \omega^j$. Cette action sur les 1-formes est interprêtée comme une *substitution linéaire* sur les lettres de X en posant $h_* x_j = \sum_i x_i H^i_j$, substitution qui se prolonge en une action à gauche sur des séries de $\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$ grâce à (18). On a: $\forall h_1, h_2 \in G$, $(h_1h_2)_* = h_{1*}h_{2*}$.

$\sigma \in \mathfrak{S}_3$	$h \in G$	$H \in GL(2,\mathbb{C})$
Id	$z \to z$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\tau_{0,1}$	$z \to 1-z$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\tau_{1,\infty}$	$z \to \dfrac{z}{z-1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\tau_{0,\infty}$	$z \to \dfrac{1}{z}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$(0,1,\infty)$	$z \to \dfrac{1}{1-z}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
$(0,\infty,1)$	$z \to \dfrac{z-1}{z}$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Théorème 2 *Soit h une transformation du groupe $G \simeq \mathfrak{S}_3$ et S_γ la série de Chen associée à un chemin γ de $\mathbb{C} - \{0,1\}$. Avec les conventions précèdentes, on a :*

$$h_*(S_\gamma) = S_{h\circ\gamma}. \tag{19}$$

PREUVE – Convention de notations d'Einstein sur les indices répètés.

$$\begin{aligned}
S_{h\circ\gamma} &= \left(\int_{h\circ\gamma} \omega^{i_1}\cdots\omega^{i_k}\right) x_{i_1}\dots x_{i_k} = \left(\int_{h^*(h\circ\gamma)} (h^*\omega^{i_1})\cdots(h^*\omega^{i_k})\right) x_{i_1}\dots x_{i_k} \\
&= \left(\int_\gamma H^{i_1}_{j_1}\cdots H^{i_k}_{j_k}\omega^{j_1}\cdots\omega^{j_k}\right) x_{i_1}\dots x_{i_k} = \left(\int_\gamma \omega^{j_1}\cdots\omega^{j_k}\right) x_{i_1}\dots x_{i_k} H^{i_1}_{j_1}\cdots H^{i_k}_{j_k} \\
&= \left(\int_\gamma \omega^{j_1}\cdots\omega^{j_k}\right) h_*(x_{j_1}\dots x_{j_k}) = h_*(S_\gamma)
\end{aligned}$$

□

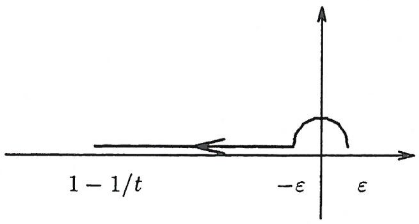

FIG. 1 -

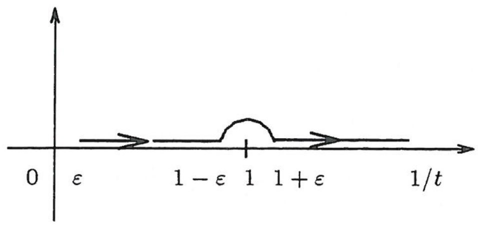

FIG. 2 -

3.2 Calcul des polylogs en $1-t$ pour $0<t<1$

D'après (9) on a :

$$L(1-t) = S_{1-\varepsilon \rightsquigarrow 1-t}\ L(1-\varepsilon). \tag{20}$$

Soit $h(z) \stackrel{\text{def}}{=} 1-z$. On a $h_* x_0 = -x_1$ et $h_* x_1 = -x_0$. Le thm. 2 donne

$$\begin{aligned} S_{1-\varepsilon \rightsquigarrow 1-t} &= h_* S_{\varepsilon \rightsquigarrow t} = h_* \left(L(t) L^{-1}(\varepsilon)\right) \\ &\sim h_* L(t)\ h_* \left(e^{-x_0 \log \varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Dans la suite, on note $h_* L(t)$ par $L(-x_1, -x_0 \mid t)$. D'autre part, $h_* \left(e^{-x_0 \log \varepsilon}\right) = e^{x_1 \log \varepsilon}$. Finalement, reprenant (20) en passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$, on obtient la proposition (voir formules en annexe) :

Proposition 2

$$\forall t \in]0,1[, \quad L(x_0, x_1 \mid 1-t) = L(-x_1, -x_0 \mid t)\ Z(x_0, x_1) \tag{21}$$

3.3 Calcul des polylogs en $1-1/t$ pour $0<t<1$

D'après (9) en suivant le chemin de la figure 1 (le contournement de 0 par le haut est arbitraire), on a :

$$L(1-1/t) = S_{-\varepsilon \rightsquigarrow 1-1/t}\ S_{\varepsilon \rightsquigarrow -\varepsilon}\ L(\varepsilon) = S_{-\varepsilon \rightsquigarrow 1-1/t}\ e^{i\pi x_0}\ e^{x_0 \log \varepsilon}$$

On pose $h(z) \stackrel{\text{def}}{=} 1-1/z$. On a $h_* x_0 = -x_0 + x_1$ et $h_* x_1 = -x_0$. Le thm. 2 donne

$$S_{-\varepsilon \rightsquigarrow 1-1/t} = h_* S_{1-\varepsilon \rightsquigarrow t} = h_* \left(L(t) L^{-1}(1-\varepsilon)\right) = h_* \left(L(t)\ Z^{-1}\ e^{x_1 \log \varepsilon}\right).$$

On obtient finalement, en passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$ la proposition (voir formules en annexe) :

Proposition 3

$$\forall t \in [0,1[, \quad L(x_0, x_1 \mid 1-1/t) = L(-x_0+x_1, -x_0 \mid t)\ Z^{-1}(-x_0+x_1, -x_0)\ e^{i\pi x_0} \tag{22}$$

REMARQUE – Pour tout $w \in X^* x_1$, la formule donnant $L_w(1-1/t)$ ne comporte pas le terme en $i\pi$ et généralise la formule de Landen pour le trilogarithm [17].

3.3.1 Développement asymptotique en $-\infty$

Lorsque dans (22), on fait tendre t vers 0^+, on obtient, compte–tenu de (3):

$$L(x_0, x_1 \mid -1/\varepsilon) = e^{(-x_0+x_1)\log\varepsilon}\; Z^{-1}(-x_0 + x_1, -x_0)\; e^{i\pi x_0} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \text{pour } \varepsilon \to 0^+. \quad (23)$$

Proposition 4 *Lorsque $\varepsilon \to 0^+$, pour tout $w \in X^*$ de longueur n, la partie dominante du polylogarithme $L_w(t)$ lorsque $t \to -\infty$ est donnée par:*

$$L_w(-1/\varepsilon) \sim \frac{(-1)^{|w|_{x_0}}}{n!} \log^n \varepsilon. \quad (24)$$

le nombre d'occurrences de x_0 dans le mot w étant désigné par $|w|_{x_0}$.

La preuve découle directement de la formule (23). Ce thm. généralise et précise une majoration de Wechsung dans [21].

3.4 Calcul des polylogs en $1/t$ pour $0 < t < 1$

D'après (9), en suivant le chemin de la figure 2 (le contournement de 1 par le haut est arbitraire), on a:

$$\begin{aligned} L(1/t) &= S_{1+\varepsilon \rightsquigarrow 1/t}\, S_{1-\varepsilon \rightsquigarrow 1+\varepsilon}\, S_{\varepsilon \rightsquigarrow 1-\varepsilon}\, L(\varepsilon) \\ &= S_{1+\varepsilon \rightsquigarrow 1/t}\, e^{i\pi x_1}\, e^{-x_1 \log\varepsilon}\, Z. \end{aligned}$$

On pose $h(z) \stackrel{\text{def}}{=} 1/z$. On a $h_* x_0 = -x_0 + x_1$ et $h_* x_1 = x_1$. Le thm. 2 donne

$$\begin{aligned} S_{1+\varepsilon \rightsquigarrow 1/t} &= h_* S_{1-\varepsilon \rightsquigarrow t} = h_* \left(L(t) L^{-1}(1-\varepsilon)\right) \\ &= h_* \left(L(t)\; Z^{-1}\; e^{x_1 \log\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

On obtient finalement, en passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$ la proposition (voir formules en annexe):

Proposition 5

$$\forall t \in [0, 1[, \quad L(x_0, x_1 \mid 1/t) = L(-x_0 + x_1, x_1 \mid t)\; Z^{-1}(-x_0 + x_1, x_1)\; e^{i\pi x_1}\; Z(x_0, x_1) \quad (25)$$

4 Propriétés de la série Z

4.1 Dualité

Désignons par $\widetilde{w}$ l'image miroir de $w \in X^*$. On sait que l'inverse d'une exponentielle de Lie S est égale à son antipode: $a(S) = \sum_w (S \mid w)(-1)^{|w|}\widetilde{w}$. Le changement de variable $z \to 1 - z$ appliqué à la série de Chen $S_{t \rightsquigarrow 1-t}$ donne:

$$\begin{aligned} S_{t \rightsquigarrow 1-t}(x_0, x_1) &= S_{1-t \rightsquigarrow t}(-x_1, -x_0) = S^{-1}_{t \rightsquigarrow 1-t}(-x_1, -x_0) \quad (26) \\ &= a\left(S_{t \rightsquigarrow 1-t}(-x_1, -x_0)\right). \quad (27) \end{aligned}$$

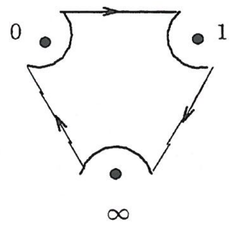

FIG. 3 - *Relation hexagonale*

Soit $\widehat{w}$ le mot obtenu en appliquant la substitution $x_0 \to x_1$ et $x_1 \to x_0$ au mot $\widetilde{w}$ miroir de w. On prolonge par linéarité aux séries de $\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$. On déduit de (26) que pour tout $t \in]0,1[$, $S_{t\rightsquigarrow 1-t} = \widehat{S}_{t\rightsquigarrow 1-t}$. En posant $t = \varepsilon$ avec $\varepsilon \to 0^+$ et en appliquant la régularisation (15), on en déduit la relation de dualité.

Proposition 6

$$Z \;=\; \widehat{Z} \tag{28}$$

En combinant les formules (21) et (28), on en déduit le corrollaire

Corollaire 1 *Pour tout* $t \in]0,1[$ *:*

$$\widehat{L}(1-t)\; L(t) \;=\; Z. \tag{29}$$

En particulier, pour $t = 1/2$*, on a :* $\widehat{L}(\frac{1}{2})\; L(\frac{1}{2}) = Z$.

4.2 Relation hexagonale

Le chemin de la fig. 3 n'entoure aucune singularité donc la série de Chen sur ce chemin est égale à 1. Adoptons le raccourci de notation $S \overset{\text{def}}{=} S_{\varepsilon\rightsquigarrow 1-\varepsilon}$. Soit $h : z \to 1 - 1/z$ l'élément de G qui permute circulairement les 3 singularités $0, 1$ et ∞ dans le sens rétrograde. On a :

$$\left(Se^{i\pi x_0}\right) \times h_*\left(Se^{i\pi x_0}\right) \times h_*^2\left(Se^{i\pi x_0}\right) \;=\; 1 + O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{30}$$

En régularisant, d'après (15), S par Z et compte–tenu du fait que $h_* x_0 = -x_0 + x_1$ et $h_* x_1 = -x_0$, on en déduit la proposition :

Proposition 7

$$Z(x_0,x_1)\; e^{i\pi x_0}\; Z(-x_0+x_1,-x_0)\; e^{i\pi(-x_0+x_1)}\; Z(-x_1,x_0-x_1)\; e^{-i\pi x_1} \;=\; 1 \tag{31}$$

Le calcul sur les crochets de Lie de longueur 2 dans la formule de Campbell–Hausdorff permet de retrouver la relation $\zeta(2) = \pi^2/6$. D'autre part, il est clair que l'on peut remplacer i par $-i$ dans la formule (31).

5 Conclusion

Nous avons prouvé que de nombreuses identités fonctionnelles sur les polylogarithmes s'expriment simplement dans le cadre des séries formelles non commutatives ; toutes ces séries sont en fait des exponentielles de Lie que l'on peut multiplier en utilisant la formule de Baker–Campbell–Hausdorff tronquée à un ordre donné. Dans les résultats figurant en annexe, seuls figurent les polylogarithmes codés par des mots de Lyndon car ces fonctions engendrent librement toute l'algèbre des polylogarithmes.

Remerciements Merci à P. Cartier, M. Gergondey, G. Jacob et P. Lochak pour d'utiles discussions.

Les calculs ont été menés en utilisant le logiciel de calcul formel AXIOM sur les machines du centre MEDICIS installé à l'Ecole Polytechnique de Palaiseau.

A Relations entre polylogs

A.1 Polylogs en $1-t$

$$\begin{aligned}
\log(1-t) &= -\mathrm{Li}_1(t) && (32)\\
\mathrm{Li}_1(1-t) &= -\log(t) && (33)\\
\mathrm{Li}_2(1-t) &= -\mathrm{Li}_2(t) + \log(t)\mathrm{Li}_1(t) + \zeta(2) && (34)\\
\mathrm{Li}_3(1-t) &= -\mathrm{Li}_{2,1}(t) + \mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_2(t) - \frac{1}{2}\log(t)\mathrm{Li}_1(t)^2\\
&- \zeta(2)\mathrm{Li}_1(t) + \zeta(3) && (35)\\
\mathrm{Li}_{2,1}(1-t) &= -\mathrm{Li}_3(t) + \log(t)\mathrm{Li}_2(t) - \frac{1}{2}\log(t)^2\mathrm{Li}_1(t)\\
&+ \zeta(3) && (36)\\
\mathrm{Li}_4(1-t) &= -\mathrm{Li}_{2,1,1}(t) + \mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_{2,1}(t) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}_1(t)^2\mathrm{Li}_2(t)\\
&+ \frac{1}{6}\log(t)\mathrm{Li}_1(t)^3 + \frac{1}{2}\zeta(2)\mathrm{Li}_1(t)^2 - \zeta(3)\mathrm{Li}_1(t)\\
&+ \frac{2}{5}\zeta(2)^2 && (37)\\
\mathrm{Li}_{3,1}(1-t) &= -\mathrm{Li}_{3,1}(t) + \log(t)\mathrm{Li}_{2,1}(t) + \mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_3(t)\\
&- \log(t)\mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_2(t) + \frac{1}{4}\log(t)^2\mathrm{Li}_1(t)^2 - \zeta(3)\mathrm{Li}_1(t)\\
&+ \frac{1}{10}\zeta(2)^2 && (38)\\
\mathrm{Li}_{2,1,1}(1-t) &= -\mathrm{Li}_4(t) + \log(t)\mathrm{Li}_3(t) - \frac{1}{2}\log(t)^2\mathrm{Li}_2(t)\\
&+ \frac{1}{6}\log(t)^3\mathrm{Li}_1(t) + \frac{2}{5}\zeta(2)^2 && (39)
\end{aligned}$$

A.2 Polylogs en $1-1/t$

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{t-1}{t}\right) &= (i\pi) - \mathrm{Li}_1(t) - \log(t) && (40)\\
\mathrm{Li}_1\left(\frac{t-1}{t}\right) &= \log(t) && (41)\\
\mathrm{Li}_2\left(\frac{t-1}{t}\right) &= \mathrm{Li}_2(t) - \log(t)\mathrm{Li}_1(t) - \zeta(2) - \frac{1}{2}\log(t)^2 && (42)\\
\mathrm{Li}_3\left(\frac{t-1}{t}\right) &= \mathrm{Li}_{2,1}(t) - \mathrm{Li}_3(t) - \mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_2(t) + \frac{1}{2}\log(t)\mathrm{Li}_1(t)^2 \\
&+ \left(\zeta(2) + \frac{1}{2}\log(t)^2\right)\mathrm{Li}_1(t) + \log(t)\zeta(2) \\
&+ \frac{1}{6}\log(t)^3 && (43)\\
\mathrm{Li}_{2,1}\left(\frac{t-1}{t}\right) &= -\mathrm{Li}_3(t) + \log(t)\mathrm{Li}_2(t) - \frac{1}{2}\log(t)^2\mathrm{Li}_1(t) \\
&+ \zeta(3) - \frac{1}{6}\log(t)^3 && (44)\\
\mathrm{Li}_4\left(\frac{t-1}{t}\right) &= \mathrm{Li}_{2,1,1}(t) - \mathrm{Li}_{3,1}(t) - \mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_{2,1}(t) + \mathrm{Li}_4(t) \\
&+ \mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_3(t) + \frac{1}{2}\mathrm{Li}_1(t)^2\mathrm{Li}_2(t) - \frac{1}{6}\log(t)\mathrm{Li}_1(t)^3 \\
&+ \left(-\frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{4}\log(t)^2\right)\mathrm{Li}_1(t)^2 + \left(-\log(t)\zeta(2) - \frac{1}{6}\log(t)^3\right)\mathrm{Li}_1(t) \\
&- \frac{7}{10}\zeta(2)^2 - \frac{1}{2}\log(t)^2\zeta(2) - \frac{1}{24}\log(t)^4 && (45)\\
\mathrm{Li}_{3,1}\left(\frac{t-1}{t}\right) &= -\mathrm{Li}_{3,1}(t) + \log(t)\mathrm{Li}_{2,1}(t) + 2\mathrm{Li}_4(t) + (\mathrm{Li}_1(t) - \log(t))\mathrm{Li}_3(t) \\
&- \log(t)\mathrm{Li}_1(t)\mathrm{Li}_2(t) + \frac{1}{4}\log(t)^2\mathrm{Li}_1(t)^2 + \left(-\zeta(3) + \frac{1}{6}\log(t)^3\right)\mathrm{Li}_1(t) \\
&- \log(t)\zeta(3) - \frac{7}{10}\zeta(2)^2 + \frac{1}{24}\log(t)^4 && (46)\\
\mathrm{Li}_{2,1,1}\left(\frac{t-1}{t}\right) &= \mathrm{Li}_4(t) - \log(t)\mathrm{Li}_3(t) + \frac{1}{2}\log(t)^2\mathrm{Li}_2(t) - \frac{1}{6}\log(t)^3\mathrm{Li}_1(t) \\
&- \frac{2}{5}\zeta(2)^2 - \frac{1}{24}\log(t)^4 && (47)
\end{aligned}$$

A.3 Polylogs en $1/t$

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{1}{t}\right) &= -\log(t) && (48)\\
\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{t}\right) &= (i\pi) + \mathrm{Li}_1(t) + \log(t) && (49)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{t}\right) = -\log(t)(i\pi) - \mathrm{Li}_2(t) + 2\zeta(2) - \frac{1}{2}\log(t)^2 \tag{50}$$

$$\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}\log(t)^2(i\pi) + \mathrm{Li}_3(t) - 2\log(t)\zeta(2) + \frac{1}{6}\log(t)^3 \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{2,1}\left(\frac{1}{t}\right) &= -\frac{1}{2}\log(t)(i\pi)^2 + \left(-\mathrm{Li}_2(t) + \zeta(2) - \frac{1}{2}\log(t)^2\right)(i\pi)\\ &- \mathrm{Li}_{2,1}(t) + \mathrm{Li}_3(t) - \log(t)\mathrm{Li}_2(t) + \zeta(3) - \frac{1}{6}\log(t)^3\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{t}\right) &= -\frac{1}{6}\log(t)^3(i\pi) - \mathrm{Li}_4(t) + \frac{4}{5}\zeta(2)^2 + \log(t)^2\zeta(2)\\ &- \frac{1}{24}\log(t)^4\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{3,1}\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{1}{4}\log(t)^2(i\pi)^2 + \left(\mathrm{Li}_3(t) - \zeta(3) - \log(t)\zeta(2) + \frac{1}{6}\log(t)^3\right)(i\pi)\\ &+ \mathrm{Li}_{3,1}(t) - 2\mathrm{Li}_4(t) + \log(t)\mathrm{Li}_3(t) - \log(t)\zeta(3)\\ &+ \frac{4}{5}\zeta(2)^2 + \frac{1}{24}\log(t)^4\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{2,1,1}\left(\frac{1}{t}\right) &= -\frac{1}{6}\log(t)(i\pi)^3 + \left(-\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(t) + \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{4}\log(t)^2\right)(i\pi)^2\\ &+ \left(-\mathrm{Li}_{2,1}(t) + \mathrm{Li}_3(t) - \log(t)\mathrm{Li}_2(t) - \frac{1}{6}\log(t)^3\right)(i\pi)\\ &- \mathrm{Li}_{2,1,1}(t) + \mathrm{Li}_{3,1}(t) - \log(t)\mathrm{Li}_{2,1}(t) - \mathrm{Li}_4(t)\\ &+ \log(t)\mathrm{Li}_3(t) - \frac{1}{2}\log(t)^2\mathrm{Li}_2(t) + \frac{11}{10}\zeta(2)^2\\ &- \frac{1}{24}\log(t)^4\end{aligned} \tag{55}$$

Références

[1] A. Beilinson and P. Deligne. Interprètation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et régulateurs. In *symposia in pure mathematics*, pages 97–121. A.M.S, 1994.

[2] D. Borwein, J.M. Borwein, and R. Girgensohn. Explicit evaluation of Euler sums. In *Proc. Edin. Math. Soc.*, volume 38, pages 277–294, 1995.

[3] J.M. Borwein, D.M. Bradley, D.J. Broadhurst, and P. Lisoněk. Combinatorial aspects of multiple zetas values. *Electronic J. Combinatorics*, 5(1), 1998.

[4] P. Cartier. Jacobiennes généralisées, monodromie unipotente et intégrales itérées. *Séminaire Bourbaki*, (687):31–52, 1987.

[5] P. Cartier. Construction combinatoire des invariants de Vassiliev–Kontsevich des noeuds. *C.R.Acad.Sci.Paris*, (t.316,série I):1205–1210, 1993.

[6] K.T. Chen. Algebras of iterated path integrals and fondamental groups. *Trans. of the A.M.S.*, 156(3):359–379, may 1971.

[7] V.G. Drinfel'd. Quasi-Hopf algebras. *Leningrad Math. J.*, 1(6):1419–1457, 1990.

[8] V.G. Drinfel'd. On quasitriangular quasi–Hopf algebra and a group closely connected with gal($\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$). *Leningrad Math. J.*, 2(4):829–860, 1991.

[9] J. Écalle. *Résurgence I et II.* Publications Univ. Orsay, Orsay, 1981.

[10] J. Gonzalez-Lorca. *Série de Drinfel'd, monodromie et algèbres de Hecke.* PhD thesis, Ecole Normale Superieure, 45, Rue d'Ulm, Paris, jun 1998.

[11] M. Hoang Ngoc and M. Petitot. Lyndon words, polylogarithms and the Riemann ζ function. *submitted to Discret Maths.*

[12] Minh Hoang Ngoc. Summations of polylogarithms via evaluation transform. *Mathematics and Computers in Simulation*, 1336, 1996.

[13] Minh Hoang Ngoc. Fonction Dirichlet d'ordre n et de paramètre t. *Discrete Mathematics*, 180:222– 241, 1998.

[14] Minh Hoang Ngoc, M. Petitot, and J. Van Der Hoeven. Shuffle algebra and polylogarithms. In *Proc. of FPSAC'98, 10-th international Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, Toronto, Juin 1998.

[15] M. Hoffman. Multiple harmonic series. *Pacific Journal of Mathematics*, 152(2):275– 290, 1992.

[16] M. Hoffman. The algebra of multiple harmonic series. *Journal of Algebra*, August 1997.

[17] L. Lewin. *Polylogarithms and associated functions.* North Holland, New York–Oxford, 1981.

[18] N. Nielsen. Recherches sur des généralisations d'une fonction de Legendre et d'Abel. *Annali di Matematica*, 9:219–235, 1904.

[19] P. Oesterlé. Polylogarithmes. *Séminaire Bourbaki*, (762):31–52, 1992.

[20] C. Reutenauer. *Free Lie Algebras*, volume New Series-7 of *London Mathematical Society Monographs.* Oxford Science Publications, 1993.

[21] G. Wechsung. Functional equations of hyperlogarithms. In L. Lewin, editor, *Structural properties of polylogarithms*, volume 37 of *Mathematical surveys and monographs*, chapter 8, pages 171–184. Amer.Math.Soc., 1992.

[22] G. Wojtkowiak. A note on functional equations on the p-adic polylogarithms. In *Bull.Soc.math. France*, volume 119, pages 343–370. Amer.Math.Soc., 1991.

[23] G. Wojtkowiak. Functional equations of iterated integrals with regular singularities. *Nagoya Maths J.*, 142:145–159, 1996.

[24] D. Zagier. Values of zeta functions and their applications. In *First European Congress of Mathematics*, volume 2, pages 497–512. Birkhäuser, 1994.